Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Востриков Иван Васильевич

Эллипсоидальные методы в решении задач достижимости и синтеза управлений для систем с запаздыванием

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
академик А. Б. Куржанский

Москва

2016

Оглавление

Введение

Диссертационная работа посвящена эллипсоидальным методам в задачах управления для линейных управляемых систем с запаздыванием.

Актуальность темы

Исследование систем с запаздыванием обусловлено существованием процессов, законы развития которых включают в себя не только текущее состояние, но и предысторию. Подобные процессы возникают в механике, электродинамике, химии, биологии, медицине.

Возникает запаздывание в задачах управления по результатам наблюдений. Запаздывать могут как сами измерения, так и передача сигналов наблюдений.

В механике системами с запаздыванием описываются состояния напряженной деформации ряда материалов. Это задачи наследственной упругости или вязкоупругости. А также задачи аэроавтоупругости, изучающие движения тел с учетом взаимодействия с окружающей средой.

В биологии задачи с последействием возникают при описании эволюции различных биологических систем, в медицине - при описании функционировании систем жизнедеятельности организма (например кровообращения).

Активное изучение уравнений с запаздыванием началось в 50-е года 20-го века. Исследованием таких уравнений начали заниматься А.Д. Мышкис

[36-38] и Б.С. Разумихин [45]. В этих работах текущее состояние системы рассматривалось только в конечномерном пространстве. Что существенно ограничивало круг решаемых задач.

Начало принципиально нового этапа развития теории дифференциальных уравнений с запаздыванием связано с именем Н.Н. Красовского [18-24]. Он первым предложил использовать функциональную структуру решений уравнений с запаздыванием [19]. Это позволило вывести теорию уравнений с запаздыванием на уровень с той же степенью детализации как у теории для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дальнейшее изучение систем с запаздыванием продолжились в работах Р. Беллмана, К. Кука [5, 53], Дж. Хейла [49, 54]. Методы управления системами с запаздыванием развиты в работах С.Н. Шиманова [51], Ю.С. Осипова [41], А.Б. Куржанского [25-27], В.Б. Колмановского [3], Р.Ф. Габасова, Ф.М. Кирилловой [8], Н.В. Азбелева [1], Л.Э. Эльсгольца, С.Б. Норкина [52], Г.А. Каменского [14], А.М. Зверкина [11], А.В. Кима [15], Н.Ю. Лукоянова [33].

В подходе Н.Н. Красовского исследуемую систему можно рассматривать как эволюционное уравнение в функциональном пространстве, элементами которого являются значения функций с предысториями. Это позволяет воспользоваться методом динамического программирования, особенностью применения которого будет являться структура данного пространства.

Возникающие при этом уравнения, рассматривающиеся в функциональном пространстве, требуют введения обобщенных решений в данном пространстве и соответствующих функциональных производных. Различные подходы к введению этих производных можно посмотреть в [3, 15, 33].

Другой проблемой при рассмотрении данных задач является некорректность постановки задачи восстановления начального состояния. Подходы для решения данной проблемы хорошо известны для систем с распределенными параметрами - метод регуляризации А.Н. Тихонова [47], метод квазирешений В.К. Иванова [12], метод квазиобращения Ж.-Л. Лионса – Р. Латтеса [32] и др.

При обращении решения в системах с запаздыванием можно воспользоваться методом прямых [25], а также сведением к уравнению нейтрального типа [5]. В первом случае возникает система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая аппроксимирует исходную систему. Для нее при решении задач управления хорошо развит метод эллипсоидального оценивания [55-58]. С помощью эллипсоидов оцениваются множества достижимости и разрешимости. Это позволяет получать параллельные алгоритмы для нахождения искомых множеств и позволяет строить синтез управления в режиме реального времени. Известно множество алгоритмов для различных классов задач. Расширение границ применения данного метода для задач позволит решать более широкий класс задач, включая и задачи с запаздыванием.

Цель работы

Применить метод динамического программирования для задачи целевого управления. Построить требуемые функционалы цены и получить для них соответствующие уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана. Выписать принцип оптимальности.

Построить эллипсоидальные оценки множества достижимости для задач с запаздыванием.

Совмещая метод прямых и эллипсоидальное исчисление получить алгоритм вычисления синтеза для задач с запаздыванием. При этом исходная система с запаздыванием аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой строится синтез управления с помощью эллипсоидальных методов оценивания.

Научная новизна

Полученные результаты являются новыми.

Получены явный вид функционала цены и уравнение динамического программирования для линейной управляемой системы с постоянным запаздыванием. Рассмотрены случаи нахождения множеств достижимости и разрешимости.

Получены новые формулы исчерпывающих эллипсоидальных оценок для множества достижимости в конечномерном и функциональном пространствах.

С помощью эллипсоидального исчисления построен алгоритм вычисления синтеза управления в реальном времени для аппроксимирующей линейной управляемой системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит в основном теоретический характер. Методы, развитые в работе, позволяют получать оценки множеств, которые активно используются при решении задач управления. Каждая оценка считается независимо от другой, что позволяет активно пользоваться суперкомпьютерными вычислениями. Алгоритмы синтеза управления позволяют работать в реальном времени, что существенно при решении практических задач.

Методы исследования.

Использован метод динамического программирования для построения функционала цены и вывода уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана. С помощью методов выпуклого анализа получен аналитический вид искомого функционала. С помощью методов эллипсоидального исчисления получены формулы исчерпывающих эллипсоидальных оценок для множества достижимости и синтез управления для аппроксимирующей системы.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 3-х работах [61-63]. Все работы опубликованы в журналах из перечня ВАК.

Работы [61, 63] подготовлены автором самостоятельно.

Работа [62] подготовлена совместно с А.Н. Дарьиным и А.Б Куржанским. Идея исследований принадлежит научному руководителю автора, академику А.Б. Куржанскому. Автором получены формулы эллипсоидальных оценок и эллипсоидального синтеза управлений. А.Н. Дарьин провел численное моделирование.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава посвящена применению метода динамического программирования для задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Основное содержание данной главы опубликовано в работе [63].

Рассматривается линейная управляемая система с запаздыванием:

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x_t(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0].$$

с геометрическим ограничением на управление:

$$u(\tau) \in P(\tau) \text{ при } \tau \in [t_0, t_1]$$

где $P(\tau)$ – непрерывная по метрике Хаусдорфа функция, значениями которой являются выпуклые компакты в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Ставится задача целевого управления из заданного множества $X_0(\cdot)$ начальных состояний на множество $\mathcal{M}(\cdot)$.

Вводится понятие текущей позиции.

Определение 1. *Текущая позиция $\{t, x_t(\cdot)\}$ системы есть пара, состоящая из текущего момента времени t и функции $x_t(\cdot)$ – решения в текущий момент времени вместе с предысторией на интервале $[t-h, t)$.*

В силу функциональной природы текущего фазового состояния (для продолжения решения в текущий момент времени требуется знать предысторию на отрезке $[t-h, t]$) возможны две постановки - функциональная и конечномерная.

В первом случае требуется попасть в целевое множество $\mathcal{M}(\cdot)$ состояний, заданных в функциональном пространстве $H = L_2[-h, 0] \times \mathbb{R}^n$: В частности, если требуется привести систему в состояние покоя, то необходимо удерживать систему в этом состоянии в пространстве $\mathbb{R}^n$ в течении всего отрезка времени длительностью h. В этом случае множество $\mathcal{M}(\cdot)$ состоит из нулевой функции из пространства H.

Во втором случае требуется попасть во множество $\mathcal{M}$ конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$. Здесь отсутствует требование удержать систему в этом множестве после попадания в него. Возможны два класса управлений – программные $u(t)$ и синтезированные $U(t, x_t(\cdot))$.

Обе постановки подразумевают построение множеств достижимости $X_t[\cdot]$ и разрешимости $W_t[\cdot]$, являющимися, соответственно, множествами всевозможных состояний системы достижимых из начальной позиции системы и состояний, откуда можно попасть в целевое множество:

$$X_t[\cdot] = X_t(\cdot, t_0, X^0(\cdot)) = \bigcup \{x_t(\cdot, t_0, x_{t_0}(\cdot), u(\cdot))\},$$

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid \exists u(\cdot) \in U[t, t_1] : x_{t_1}(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{M}(\cdot)\}.$$

Также рассматриваются конечномерная и функциональная постановки задачи целевого управления не в заданное время, а в течение некоторого интервала. В этой постановке требуется попадание траектории системы в требуемое множество не в фиксированный момент времени, а в любой момент времени в течении всего заданного отрезка. То есть, для задачи целевого управления во множество $\mathcal{M}(\cdot)$ требуется обеспечить условие $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{M}(\cdot)$, при каком либо моменте времени $\tau \in [t_0, t_1]$. Особенностью данных задач будет, вообще говоря, невыпуклая структура множеств достижимости и разрешимости.

Ключевым понятием при нахождении введенных множеств является функционал цены $V(t, x_t(\cdot))$, зависящий от текущей позиции, и множествами уровня которого будет искомое множество. И для всех задач будет важным определение принципа оптимальности или полугруппового свойства как для функционалов, так и для множеств. Это дает возможность вычислять эти объекты рекуррентно, тем самым уменьшая объем вычислений.

Функционал цены вводится с помощью формул (1.18)-(1.20). Соответствующее отображение удовлетворяет полугрупповому свойству (1.22)

$$V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)) = V(t, x^*(\cdot) \mid \tau, V(\tau, \cdot \mid t_1, V(t_1, \cdot))), \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1.$$

А множество разрешимости представляется в виде множества уровня:

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid V(t, x^*(\cdot)) \le 0\}.$$

Используя методы выпуклого анализа можно получено явное представление функционала цены $V(t, x_t(\cdot))$, задаваемое формулами (1.25)-(1.26)

$$V(t, x^*(\cdot)) = \max_{l(\cdot) \in H} \varphi(t, x^*(\cdot), l(\cdot)).$$

Здесь

$$\varphi(t, x^*(\cdot), l(\cdot)) = \langle l(\cdot), x^*(\cdot)\rangle + \left\langle LS'_{t_1}(\cdot, t) l(\cdot), x(0)\right\rangle -$$
$$- \int\limits_t^{t_1} \rho\left(-LB'(\tau)S'_{t_1}(\cdot,\tau)l(\cdot)\middle|\, P(\tau)\right) d\tau +$$
$$+ \int\limits_{t-h}^{t} \left\langle LA'_1(\tau+h)S'_{t_1}(\cdot,\tau+h)l(\cdot), x(\tau-t)\right\rangle d\tau - \rho\left(l(\cdot)\middle|\, \mathcal{M}\right) - 1/4\left\langle l(\cdot), l(\cdot)\right\rangle,$$

где оператор L определяется выражением (1.3), а функция $x^*(\cdot)$ выражением (1.8).

Доказано, что данный функционал цены удовлетворяет уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана:

$$\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0(\cdot)}, \frac{dx^0(\cdot)}{d\tau}\right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0}, A_0(t)x(0) + A_1(t)x(-h)\right\rangle - \rho\left(-B'(t)\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0}\middle|\, P(t)\right) = 0,$$

с ограничением в момент времени t_1:

$$V(t_1, x^*(\cdot)) = d^2(x^*(\cdot), \mathcal{M}).$$

Случай конечномерного целевого множества является частным случаем задачи с бесконечномерным целевым множеством. Множество разрешимости и функционал цены находятся по вышеописанным формулам, которые сохраняют свой вид. Отличие проявится только в краевом условии, которое будет конечномерным.

С помощью уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (1.27) строится вообще говоря многозначный синтез управлений:

$$U(t, x_t(\cdot)) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in P(t)} \left\langle B'(t)\frac{\partial V(t, x_t(\cdot))}{\partial x^0}, u\right\rangle.$$

Формулами (1.43)-(1.45) задается функционал цены для нахождения множества достижимости. Для которого также выводятся принцип оптимальности и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. С помощью методов выпуклого анализа находится аналитическое выражение.

Для множеств достижимости и разрешимости в течение заданного промежутка времени получены выражения через соответствующие функционалы цены.

Вторая глава посвящена нахождению исчерпывающих эллипсоидальных внутренних и внешних оценок множества достижимости у линейной управляемой системы с запаздыванием при геометрических ограничениях на управление. Основное содержание данной главы опубликовано в работе [61].

Задается линейная управляемая система с запаздыванием

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x_t(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0].$$

на отрезке $[t_0, t_1]$.

Решение системы рассматривается как в конечномерном пространстве, так и в бесконечномерном пространстве H.

Соответственно, получаются две постановки - конечномерная и функциональная.

На управление и начальные условия задаются эллипсоидальные ограничения:

$$u(\tau) \in \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)) \text{ при } \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x^0(\tau) \in \mathcal{E}(x_0(\tau), X_0(\tau)), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0].$$

В этом случае конечномерное множество достижимости является суммой эллипсоида и интеграла от эллипсоида. Поэтому, используя аппарат внутреннего эллипсоидального оценивания ([57], с.204), получаются явные исчерпывающие эллипсоидальные оценки. Множество достижимости $X[t]$ есть объединение эллипсоидов по всевозможным $T(\cdot)$, T_0, $T_0(\cdot)$:

$$X[t] = \bigcup \{\mathcal{E}(x^-(t), X^-(t)) | T(\cdot), T_0, T_0(\cdot)\}.$$

Где

$$X^-(t) = Q^*(t)' Q^*(t),$$

$$\dot{Q}^*(\tau) = Q^*(\tau) A_0'(\tau) + Q^*(\tau - h) A_1'(\tau) + T(\tau) Q^{1/2}(\tau) B'(\tau), \quad \tau \in [t_0, t],$$

при начальных условиях

$$Q^*(\tau) = T_0(\tau) X_0^{1/2}(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0].$$

Выбором матриц $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ ([57], с.204) можно добиться совпадения опорных функций множества достижимости и внутренней оценки для любого заранее фиксированного вектора l из $\mathbb{R}^n$:

Аналогичные формулы получаются для внешних оценок.

В функциональном случае также получается получить внутренние исчерпывающие оценки эллипсоидального типа, причем некоторые из них можно вычислять реккурентно.

В **третьей главе** рассмотрена аппроксимация системы с помощью метода прямых. Обобщен результат [25] на случай системы с управлением.

При нахождении приближенных решений возможны два подхода. Аппроксимация решений и аппроксимация самой постановки задачи. В данном случае используется второй подход. Необходимость регуляризации вызвана некорректностью задачи на поиск множества разрешимости, требуемого при поиске синтеза управления в режиме реального времени.

Рассматривается линейная управляемую система с запаздыванием

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau) x(\tau) + A_1(\tau) x(\tau - h) + B(\tau) u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x_t(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0].$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ с ограниченным начальным условием

$$\|x_0(\cdot)\| \leq K_1.$$

Управление равномерно ограничивается для $\tau \in [t_0, t_1]$:

$$\|u(\tau)\| \leq K_2, \text{ если } u(\tau) \in P(\tau), \ \tau \in [t_0, t_1]$$

Эта система можно аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{y}_0(t) = A_0(t) y_0(t) + A_1(t) y_m(t) + B(t) u(t), \\ \dot{y}_1(t) = \tfrac{m}{h}(y_0(t) - y_1(t)), \\ \dots \\ \dot{y}_m(t) = \tfrac{m}{h}(y_{m-1}(t) - y_m(t)), \end{gathered}$$

где $y_i(t) \in \mathbb{R}^n, \ i = 0, \ 1, \ ..., m$.

Начальные условия примут следующий вид:

$$y_0(t_0) = x_0(0), \quad y_i(t_0) = \frac{m}{h} \int\limits_{-ih/m}^{(-i+1)h/m} x_0(\tau) d\tau, \ i = 1, \ 2, ..., m.$$

Доказывается следующая теорема :

Теорема 1. *Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует число $M(\varepsilon, \delta)$ такое, что для любого $m > M(\varepsilon, \delta)$ равномерно по всем начальным функциям $x_0(\cdot)$ и управлениям $u(\cdot)$, удовлетворяющим соответственно* (3.10), (3.11) *будет выполняться соотношение*

$$\|x(t - ih/m) - y_i(t)\|_{C[t_0+h+\delta, t_1]} < \varepsilon, i = 0, \ 1, \ ..., \ m. \tag{0.1}$$

Из которой следует, что если решить задачу синтеза для приближенной системы (при этом управление и начальное условие должно удовлетворять соответствующим ограничениям) и подставить найденный синтез в исходную систему, то в результате обеспечивается попадание на целевое множество с требуемой точностью.

В **четвертой главе** рассматриваются методы управления конкретной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей систему с запаздыванием. Основные методы и выражения, используемые в данной главе, опубликованы в работе [62].

Вводится функция цены

$$V(t,x) = \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}).$$

Данная функция цены удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \min_{u \in P(t)} \left\langle \frac{\partial V(t,x}{\partial x}, A(t)x + B_0(t)u \right\rangle$$
$$V(t_1,x)t = d^2(x(t_1), \mathcal{M})$$

Требуемый синтез управления здесь состоит из минимизаторов u:

$$U(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in P(t)} \left\langle B_0'(t)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, u \right\rangle.$$

Для упрощения вычислений функция цены выражается через множество разрешимости $W[t]$:

$$V(t,x) = d^2(X(t_1,t)x, X(t_1,t)W[t]).$$

$$V(t,x) = \max_l \{\langle X'(t_1,t)l, x\rangle - \rho\left(X'(t_1,t)l \,|\, W[t]\right) - \frac{1}{4}\langle l,l\rangle\} =$$
$$= \max_l \{\langle l, x\rangle - \rho\left(l \,|\, W[t]\right) - \frac{1}{4}\langle X'(t,t_1)l, X'(t,t_1)l\rangle\},$$
$$U(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in P(t)} \left\langle B_0'(t)l^0, u\right\rangle,$$

где l^0- максимизатор в предыдущем выражении.

Но поскольку размерность системы велика, данные выражения, несмотря на свой явный вид, обладают большой вычислительной сложностью. Но если заменить точное множество $W[t]$ на его внутреннюю эллипсоидальную оценку $W_[t]$ то выражения существенно упростятся. При этом управление может быть найдено по тем же формулам, но с заменой точного множества $W[t]$ на его внутренюю оценку $Z[t]$.

При эллипсоидальных ограничениях на управление и целевое множество строятся внутренние эллипсоидальные оценки $\mathcal{E}(x_-(t), X_-(t))$. И на их основе получаются выражения для синтеза управлений.

$$U(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in \mathcal{E}(p(t),P(t))} \left\langle B_0'(t) l^0, u \right\rangle .$$

В случае эллипсоидальной аппроксимации максимизатор l^0, необходимый для вычисления управления, может быть найден как

$$l^0 = 2\lambda (X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t)),$$
$$F(t) = X'(t,t_1)X(t,t_1),$$

где λ — единственный неотрицательный корень уравнения

$$\langle X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t)), X_-(t)(X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t))\rangle = 1,$$

или $l^0 = 0$, если неотрицательных решений нет.

Приведены графические иллюстрации построения внутренних оценок и синтеза управления.

Глава 1

О методе динамического программирования для линейных управляемых систем с запаздыванием

Введение

Данная глава посвящена применению метода динамического программирования для задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Подобные уравнения были изучены в работах [36], [19], [5], [49]. Задачи управления в традиционных и в игровых постановках рассматривались в работах [24], [27]. Уравнения с запаздыванием также изучались в [7], [33]-[35]. Особенности применения метода динамического программирования для рассматриваемых задач порождены, как известно, функциональной природой решений систем с запаздыванием. Поэтому, следуя [19], в качестве текущего фазового состояния рассматривается пара – вектор значения решения в текущий момент времени и функция, описывающая предысторию решения на интервале, зависящем от величины запаздывания. Соответственно определяется и функциональное пространство, на котором рассматриваются задачи оптимизации некоторых функционалов цены за счет выбора соответствующих управлений.

В данной главе рассмотрены задачи построения прямых и попятных областей достижимости [28] для систем с запаздыванием, а также указаны пути построения стратегий синтеза целевых управлений, подверженных априорным геометрическим ограничениям. Вследствие этого приведены постановки задач как в прямом, так и попятном времени. Получены выражения для функционалов цены, используемых для решения упомянутых задач. На основе приведенных вариантов принципа оптимальности выведены соответствующие уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана, используя которые, оказывается возможным найти позиционные стратегии синтезированных целевых управлений. Основное содержание данной главы опубликовано в работе [63].

1.1 Определения и обозначения

Определение 2. *Под пространством H будем понимать прямое произведение пространств $L_2([-h,0),\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{R}^n$:*

$$H = L_2([-h,0),\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n, \text{ где число } h>0.$$

Элементом пространства H является пара $\{a^0,\ a^0(\cdot)\}$, где $(a^0\in\mathbb{R}^n$, $a^0(\cdot)\in L_2([-h,0),\mathbb{R}^n))$, которую можно понимать как функцию $a^*(\cdot)$, определенную на отрезке $[-h,0]$:

$$a^*(0)=a^0,\quad a^*(\tau)=a^0(\tau),\quad \tau\in[-h,0). \tag{1.1}$$

Пространство H является гильбертовым, со скалярным произведением

$$\langle a(\cdot), b(\cdot)\rangle_H = \langle a(\cdot), b(\cdot)\rangle_{L_2[-h,0)} + \langle a(0), b(0)\rangle .$$

Здесь под $f_t(\cdot)$ будем понимать функцию, определенную на отрезке $[-h, 0]$ и такую, что

$$f_t(\tau) = f(t+\tau) \text{ при } \tau \in [-h, 0]. \tag{1.2}$$

Далее в работе элемент пространства H будет обозначаться одним из двух способов: $a^*(\cdot)$ или $a_t(\cdot)$.

Под $La^*(\cdot)$ для $a^*(\cdot) \in H$ будем понимать выражение:

$$La^*(\cdot) = a^*(0) + \int\limits_{-h}^{0} a^*(\tau)d\tau, \tag{1.3}$$

и под A', – транспонированную матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Под $\rho\,(l|\,\mathcal{M})$ будем понимать опорную функция множества $\mathcal{M}$:

$$\rho\,(l|\,\mathcal{M}) = \sup\{\langle l, x\rangle\,|x \in \mathcal{M}\}.$$

Под $\mathcal{E}(q, Q)$, где $q \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q' = Q \geq 0$, будем понимать эллипсоид с центром q и матрицей Q, то есть выпуклое замкнутое множество определяемое опорной функцией

$$\rho\,(l|\,\mathcal{E}(q, Q)) = \langle q, l\rangle + \langle l, Ql\rangle^{1/2} .$$

В случае невырожденной матрицы Q эллипсоид $\mathcal{E}(q, Q)$ представляет собой следующее множество:

$$\mathcal{E}(q, Q) = \bigcup \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle x - q, Q^{-1}(x - q)\right\rangle \leq 1\right\} .$$

1.2 Линейная управляемая система с запаздыванием

Рассмотрим линейную управляемую систему с запаздыванием:

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1], \tag{1.4}$$

$$x(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad h > 0, \quad A_0(\cdot),\ A_1(\cdot),\ B(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n\times n}),$$
$$u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n).$$

Здесь $u(\cdot)$ есть управление, удовлетворяющее априорному ограничению:

$$u(\tau) \in P(\tau) \text{ при } \tau \in [t_0, t_1], \tag{1.5}$$

где $P(\tau)$ – непрерывная по метрике Хаусдорфа функция, значениями которой являются выпуклые компакты в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Классом $U[\tau_1, \tau_2]$ допустимых программных управлений назовем множество функций из пространства $L_\infty([\tau_1, \tau_2], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих на этом отрезке ограничению* (1.5).

Решение системы (1.4) будем понимать в смысле Каратеодори и рассматривать в виде функции $x_\tau(\cdot)$, принимающей значения в H и определяемой выражением (1.2) ([49]).

Зафиксируем начальную позицию $\{t, x^*(\cdot)\}$ ($t \in [t_0, t_1]$, $x^*(\cdot) \in H$), а именно,

$$x_t(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0]. \tag{1.6}$$

Под $x_\tau(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot))$ (при $\tau > t$) будем понимать решение $x_\tau(\cdot)$ системы (1.4)), (1.6) в момент τ при соответствующей начальной позиции $\{t, x^*(\cdot)\}$ и управлении $u(\cdot)$.

Такое решение существует, единственно и выписывается в следующем виде ([5], с.333, [49], с.51, [27] с.1400):

$$
\begin{gathered}
x_{t_1}(\cdot) = x^*(\cdot) + S_{t_1}(\cdot, t)x(0) + \int\limits_t^{t_1} S_{t_1}(\cdot, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \\
+ \int\limits_{t-h}^{t} S_{t_1}(\cdot, \tau + h)A_1(\tau + h)x_t(\tau - t)d\tau,
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

где функция $x^*(\cdot) \in H$ при $t_1 < t + h$ задается следующим выражением:

$$
x^*(\tau) = x(\tau + t_1 - t),\ \tau \in [-h, t - t_1), \quad x^*(\tau) = 0, \ \ \tau \in [t - t_1, 0]. \tag{1.8}
$$

В случае $t_1 \geq t + h$ функция $x^*(\tau) = 0$ при $\tau \in [-h, 0]$.

Здесь $S(\cdot, \cdot)$ - решение сопряженной системы с опережением:

$$
\frac{\partial S(t, \tau)}{\partial \tau} = -S(t, \tau)A_0(\tau) - S(t, \tau + h)A_1(\tau + h), \tag{1.9}
$$

$$
S(\tau, \tau) = I, \ \ S(t, \tau) = 0, \text{ при } \ t < \tau. \tag{1.10}
$$

Функция $S_{t_1}(\cdot, \tau)$ определяется, согласно (1.2).

Кроме того, справедливо следующее соотношение:

$$
S(t_1, \xi) = S(t_1, t)S(t, \xi) + \int\limits_{t-h}^{t} S(t_1, \tau + h)A_1(\tau + h)S(\tau, \xi)d\tau, \ \xi \leq t \leq t_1, \tag{1.11}
$$

В случае, когда начальное значение $x^*(\cdot)$ является абсолютно непрерывной функцией, выражение (1.4) можно рассматривать как эволюционное уравнение в пространстве H функции $x_\tau(\cdot)$, а именно

$$
\frac{\partial x_\tau(\cdot)}{\partial \tau} = \mathcal{A}_\tau x_\tau(\cdot) + \mathcal{B}_\tau u(\tau), \tag{1.12}
$$

где $\mathcal{A}_\tau$ - неограниченный линейный оператор в пространстве H ([19], с.162):

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{A}_\tau x_\tau(\cdot))(0) = A_0(\tau)x_\tau(0) + A_1(\tau)x_\tau(-h), \\
(\mathcal{A}_\tau x_\tau(\cdot))(\xi) = \tfrac{dx_\tau(\xi)}{d\xi}, \text{ для п.в. } \xi \in [-h, 0).
\end{gathered} \tag{1.13}
$$

Оператор $\mathcal{B}_\tau$ определяется соотношениями:

$$\begin{gathered}(\mathcal{B}_\tau u(\tau))(0) = B(\tau)u(\tau),\\ (\mathcal{B}_\tau u(\tau))(\xi) = 0, \text{ для п.в. } \xi \in [-h, 0).\end{gathered} \tag{1.14}$$

Заметим, что при $\tau > t+h$ решение $x_\tau(\cdot)$ задачи Коши (1.4)-(1.6) будет абсолютно непрерывно при любом допустимом начальном условии, что следует непосредственно из определения решения.

Уравнение (1.4) можно упростить, а именно, обнулить матрицу $A_0(t)$, оставив в правой части только слагаемое с запаздыванием.

Невырожденной линейной заменой

$$x(t) = X(t, t_0)z(t) \tag{1.15}$$

где $X(t, t_0)$ решение системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial X(t,\tau)}{\partial t} = A_0(t)X(t,\tau),\\ X(\tau,\tau) = I\end{gathered}$$

уравнение (1.4) сводится к следующему:

$$\dot{z}(t) = X(t_0, t)A_1(t)X(t-h, t_0)z(t-h) + X(t_0, t)B(t)u(t).$$

Действительно, продифференцировав по t выражение (1.15), получаем

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = \frac{\partial X(t, t_0)}{\partial t} z(t) + X(t, t_0)\dot{z}(t) =\\ = A_0(t)X(t, t_0)z(t) +\\ + X(t, t_0)(X(t_0, t)A_1(t)X(t-h, t_0)z(t-h) + X(t_0, t)B(t)u(t)) =\\ = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t).\end{gathered}$$

Здесь используется свойство фундаментальной матрицы $X(t, \tau)$, для которой справедливо

$$X(t, \tau)X(\tau, t) = I.$$

1.3 Основные постановки

Для введенной выше линейной управляемой системы с запаздыванием (1.4), (1.6) будем рассматривать задачи целевого управления из заданного множества X^0 начальных состояний.

То есть фиксируются начальное множество $X^0(\cdot) \subset H$ и целевое множество $\mathcal{M}(\cdot)$. И требуется привести траекторию системы (1.4), (1.6) из начального состояния $x_{t_0}(\cdot)$:

$$x_{t_0}(\cdot) \in X^0(\cdot)$$

в конечное состояние, принадлежащее множеству $\mathcal{M}(\cdot)$.

В силу функциональной природы текущего фазового состояния возможны две постановки - функциональная и конечномерная. В первом случае требуется попасть в целевое множество $\mathcal{M}(\cdot)$ состояний, заданных в функциональном пространстве H:

$$x_{t_1}(\cdot) \in \mathcal{M}(\cdot), \quad \mathcal{M}(\cdot) \in H.$$

В частности, если требуется привести систему в состояние покоя, то необходимо удерживать систему в этом состоянии в пространстве $\mathbb{R}^n$ в течении всего отрезка времени длительностью h. В этом случае множество $\mathcal{M}(\cdot)$ состоит из нулевой функции из пространства H.

Во втором случае требуется попасть во множество $\mathcal{M}$ конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$:

$$x(t_1) = x_{t_1}(0) \in \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь отсутствует требование удержать систему в этом множестве после попадания в него.

В основном будут рассмотрены задачи с геометрическим ограничением на управление, когда в каждый момент времени управление принадлежит непустому выпуклому компактному множеству:

$$u(\tau) \in P(\tau) \text{ при } \tau \in [t_0, t_1].$$

В частности, будет рассмотрены эллипсоидальные ограничения на управления, когда множество $P(\tau)$ является эллипсоидом:

$$P(\tau) = \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)).$$

Мотивацией для рассмотрения такого класса управлений является возможность получения семейств исчерпывающих эллипсоидальных оценок в исследуемых задачах.

Введем понятие текущей позиции.

Определение 4. *Текущая позиция* $\{t, x_t(\cdot)\}$ *системы* (1.4) *есть пара, состоящая из текущего момента времени* t *и функции* $x_t(\cdot)$ *– решения в текущий момент времени вместе с предысторией на интервале* $[t-h, t)$.

Подчеркнем факт того, что текущая позиция системы имеет функциональную структуру как в конечномерной так и в функциональной постановке, так как для продолжения решения уравнения (1.4) начиная с момента t обязательно нужно знать решение в текущий момент времени вместе с предысторией на интервале $[t-h, t)$.

Возможны два класса управлений – программные $u(t)$ и синтезированные $U(t, x_t(\cdot))$.

В первом случае управление ищется в виде функции $u(t)$, которая зависит только от текущего момента времени.

Во втором случае управление ищется в виде функции $U(t, x_t(\cdot))$ (вообще говоря многозначной), которая зависит от текущей позиции $\{t, x_t(\cdot)\}$ системы (1.4).

При этом синтезированное управление должно быть допустимым, то есть удовлетворять априорным ограничениям на управление, и в случае подстановки его в уравнение (1.4) удовлетворять условию теоремы существования решения дифференциального уравнения (дифференциального включения в случае многозначного синтезированного управления).

Обе постановки подразумевают построение множеств достижимости $X_t[\cdot]$ и разрешимости $W_t[\cdot]$, являющимися, соответственно, множествами всевозможных состояний системы достижимых из начальной позиции системы и состояний, откуда можно попасть в целевое множество:

$$X_t[\cdot] = X_t(\cdot, t_0, X^0(\cdot)) = \bigcup \{x_t(\cdot, t_0, x_{t_0}(\cdot), u(\cdot))\},$$

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid \exists u(\cdot) \in U[t, t_1] : x_{t_1}(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{M}(\cdot)\}.$$

Заметим, что в отсутствие неопределенности искомые множества для задач с программными и синтезированными управлениями будут совпадать. Так как множество синтезированных управлений естественным образом поглощает множество программных управлений. В то же время условия, наложенные на синтезированное управление, требуют наличия конкретной реализации, которой можно сопоставить конкретное программное управление.

Также будут рассмотрены конечномерная и функциональная постановки задачи целевого управления не в заданное время, а в течение некоторого интервала. В этой постановке требуется попадание траектории системы в требуемое множество не в фиксированный момент времени, а в любой момент времени в течении всего заданного отрезка. То есть, для задачи целевого управления во множество $\mathcal{M}(\cdot)$ требуется обеспечить условие $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{M}(\cdot)$, при каком либо моменте времени $\tau \in [t_0, t_1]$.

Под множеством достижимости $X_{\bigcup}[t_1]$ (разрешимости $W_{\bigcup}[t_0]$) в течение промежутка $[t_0, t_1]$ будем понимать объединение областей достижимости (разрешимости) при всех моментах времени $t \in [t_0, t_1]$:

$$X_{\bigcup}[t_1] = \bigcup_{t \in [t_0, t_1]} \{X_t[\cdot]\},$$

$$W_{\bigcup}[t_0] = \bigcup_{t \in [t_0, t_1]} \{W_t[\cdot]\}.$$

Особенностью данных задач будет, вообще говоря, невыпуклая структура множеств достижимости и разрешимости.

Ключевым понятием при нахождении введенных множеств является функционал цены $V(t, x_t(\cdot))$, зависящий от текущей позиции, и множествами уровня которого будет искомое множество, например, множество разрешимости:

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid V(t, x^*(\cdot)) \leq 0\}.$$

И для всех задач будет важным определение принципа оптимальности или полугруппового свойства как для функционалов, так и для множеств. Это дает возможность вычислять эти объекты рекуррентно, тем самым уменьшая объем вычислений.

Например, множество достижимости можно вычислять, зная его значение в промежуточный момент τ:

$$X_t(\cdot, t_0, X^0(\cdot)) = X_t(\cdot, \tau, X_\tau(\cdot, t_0, X^0(\cdot))), \quad t_0 \leq \tau \leq t.$$

Это выражение и будет являться принципом оптимальности для множества достижимости.

1.4 Функционал цены для задачи разрешимости. Принцип оптимальности

Рассмотрим задачу терминального управления когда целевое множество $\mathcal{M}(\cdot)$ лежит в функциональном пространстве H. Будем решать задачу методами выпуклого анализа. При этом будем строить решение не для какого-то фиксированного начального состояния, а для любого начального состояния из которого можно попасть в целевое множество. Для этого введем и построим функционал цены, множеством уровня которого будет искомое множества разрешимости из которого можно управлять системой.

Пусть $\mathcal{M}(\cdot) \subset H$ – целевое множество:

$$x_{t_1}(\cdot) \in \mathcal{M}(\cdot). \tag{1.16}$$

Определение 5. *Множеством разрешимости* $W_t[\cdot] = W_t(\cdot, t_1, \mathcal{M}(\cdot))$ *в момент* t *системы* (1.4), (1.6) *при ограничениях* (1.5), (1.16) *будем называть объединение*

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid \exists u(\cdot) \in U[t, t_1] : x_{t_1}(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{M}(\cdot)\}, \tag{1.17}$$

где $d^2(\cdot, \cdot)$ - квадрат расстояния, порожденного скалярным произведением в пространстве H.

Пусть заданы позиция $\{t, x^*(\cdot)\}$ ($t \in [t_0, t_1]$, $x^*(\cdot) \in H$), момент времени $\tau \in [t, t_1]$ и сильно непрерывный функционал $\varphi(\cdot) : H \to \mathbb{R}^1$. Введем отображение $V(t, x^*(\cdot) \mid \tau, \varphi(\cdot))$:

$$V(t, x^*(\cdot) \mid \tau, \varphi(\cdot)) = \min_{u(\cdot) \in U[t,\tau]} \{\varphi(x_\tau(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot))) \mid x_t(\cdot) = x^*(\cdot)\}, \tag{1.18}$$

где $x_\tau(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot))$ решение системы (1.4)), (1.6) в момент τ при соответствующей начальной позиции $\{t, x^*(\cdot)\}$ и управлении $u(\cdot)$.

Операция минимизации в данном случае корректна, т.к. множество всевозможных состояний $x_{t_1}(\cdot, t, x_t(\cdot), u(\cdot))$ системы (1.4), (1.6) в момент $t_1 \geq t + h$ является сильным компактом в пространстве $C[-h, 0]$, в силу теоремы Арцела-Асколи и слабой компактности в пространстве $L_2[t, t_1]$ множества допустимых управлений ([17], с.110, [27]).

Определение 6. *Функционал цены $V(t, x^*(\cdot))$ есть решение следующей задачи:*

$$V(t, x^*(\cdot)) = V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)), \tag{1.19}$$

с краевым условием

$$V(t_1, x^*(\cdot)) = d^2(x^*(\cdot), \mathcal{M}(\cdot)),\ x^*(\cdot) \in H. \tag{1.20}$$

Заметим, что хотя изначально задача ставится для программных управлений, искомое управление, которое минимизирует функционал, можно искать и в виде синтеза, ибо для задач без неопределенности использование обоих классов приводит к одинаковому результату.

Непосредственно из определения вытекают следующие утверждения.

Теорема 2. *Множество разрешимости можно представить в виде множества уровня функционала цены*

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid V(t, x^*(\cdot)) \leq 0\}.$$

Для множества разрешимости и функционала цены можно выписать соответствующие принципы оптимальности, которые формулируются в следующем виде:

Теорема 3. *Множество разрешимости удовлетворяет полугрупповому свойству*

$$W_t(\cdot, t_1, \mathcal{M}(\cdot)) = W_t(\cdot, \tau, W_\tau(\cdot, t_1, \mathcal{M}(\cdot))),\ \text{\textit{при}}\ t_0 \leq t \leq \tau \leq t_1. \tag{1.21}$$

Теорема 4. *Отображение $V(t, x^*(\cdot))$ удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$V(t, x^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U[t,\tau]} \{V(\tau, x_\tau(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot)))\}, \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1. \quad (1.22)$$

Полученное свойство можно записать в виде:

$$V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)) = V(t, x^*(\cdot) \mid \tau, V(\tau, \cdot \mid t_1, V(t_1, \cdot))), \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1.$$

1.5 Вычисление функционала цены $V(t, x^*(\cdot))$ методами выпуклого анализа

Согласно (1.19)-(1.20), можно записать выражение для функционала цены в следующем виде:

$$V(t, x^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U[t,t_1]} \{d^2(x_{t_1}(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot)), \mathcal{M}(\cdot)) \mid x_t(\cdot) = x^*(\cdot)\}. \quad (1.23)$$

Запишем формулу для вычисления $d^2(\cdot, \cdot)$:

$$d^2(x^*(\cdot), \mathcal{M}(\cdot)) = \max_{l(\cdot)\in H} \{\langle l(\cdot), x^*(\cdot)\rangle_H - \rho\,(l(\cdot)|\,\mathcal{M}(\cdot)) - 1/4\,\langle l(\cdot), l(\cdot)\rangle_H\}. \quad (1.24)$$

Подставляя выражение (1.7) для вычисления $x_{t_1}(\cdot)$ в (1.24) и далее в формулу (1.23) для вычисления $V(t, x^*(\cdot))$, получаем следующие соотношения:

$$V(t, x^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U[t,t_1]} \{d^2(x_{t_1}(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot)), \mathcal{M}(\cdot)) \mid x_t(\cdot) = x^*(\cdot)\} =$$

$$= \min_{u(\cdot)\in U[t,t_1]} \max_{l(\cdot)\in H} \{\langle l(\cdot), x_{t_1}(\cdot)\rangle - \rho\,(l(\cdot)|\,\mathcal{M}) - 1/4\,\langle l(\cdot), l(\cdot)\rangle\} =$$

$$= \min_{u(\cdot)\in U[t,t_1]} \max_{l(\cdot)\in H} \{\langle l(\cdot), x^*(\cdot)\rangle + \left\langle l(\cdot), S_{t_1}(\cdot, t)x(0) + \int\limits_t^{t_1} S_{t_1}(\cdot, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right\rangle +$$

$$+ \left\langle l(\cdot), \int\limits_{t-h}^{t} S_{t_1}(\cdot, \tau + h)A_1(\tau + h)x(\tau - t)d\tau \right\rangle - \rho\,(l(\cdot)|\,\mathcal{M}(\cdot)) - 1/4\,\langle l(\cdot), l(\cdot)\rangle\}.$$

Ввиду того, что выражение под минимаксом вогнуто по по $l(\cdot)$ и выпукло по $u(\cdot)$, операции максимума и минимума можно поменять местами ([44], с.130). Также можно поменять местами операцию минимума по $u(\cdot)$ и интегрирования, причем минимум достигается ([13], с.384, [59], [60], с.654, с.677). Таким образом, получаем следующее выражение для функционала цены:

$$V(t, x^*(\cdot)) = \max_{l(\cdot)\in H} \varphi(t, x^*(\cdot), l(\cdot)). \tag{1.25}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\varphi(t, x^*(\cdot), l(\cdot)) = \langle l(\cdot), x^*(\cdot)\rangle + \left\langle LS'_{t_1}(\cdot, t)l(\cdot), x(0)\right\rangle - \\
-\int\limits_t^{t_1} \rho\left(-LB'(\tau)S'_{t_1}(\cdot,\tau)l(\cdot)\middle|\, P(\tau)\right) d\tau + \\
+\int\limits_{t-h}^{t} \left\langle LA'_1(\tau+h)S'_{t_1}(\cdot,\tau+h)l(\cdot), x(\tau-t)\right\rangle d\tau - \rho\left(l(\cdot)\middle|\, \mathcal{M}(\cdot)\right) - \\
-1/4\left\langle l(\cdot), l(\cdot)\right\rangle,
\end{gathered} \tag{1.26}$$

где оператор L определяется выражением (1.3), а функция $x^*(\cdot)$ выражением (1.8).

1.6 Дифференциально-функциональное уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана

Замечание 1. Известно ([10]), что для дифференцируемого (по Фреше или по Гато) функционала $\Phi(x)$, определенного на гильбертовом пространстве X, производная $\nabla_l(\Phi(x))$ по направлению $l \in X$ выражается через скалярное произведение соответствующей производной и направления:

$$\nabla_l(\Phi(x)) = \left\langle \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}, l\right\rangle.$$

В дальнейшем, под выражением $\left\langle \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}, l \right\rangle$ будем понимать производную $\nabla_l(\Phi(x))$ по направлению l, которая может существовать и в случае, когда функционал $\Phi(x)$ не является дифференцируемым (по Фреше и по Гато).

Рассмотрим начальную позицию $\{t, x^*(\cdot)\}$, где $x^*(\cdot) \in H$ – абсолютно непрерывная функции на отрезке $[-h, 0]$.

Перенесем все члены выражения ((1.22)) в правую часть и разделим их на величину $\tau - t$:

$$\min_{u(\cdot)\in U[t,\tau]} \left\{ \frac{V(\tau, x_\tau(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot))) - V(t, x^*(\cdot))}{\tau - t} \right\} = 0, \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1.$$

Устремляя переменную τ к переменной t, формально получаем уравнение

$$\min_{u\in P(t)} \left\{ \left. \frac{dV(t, x^*(\cdot))}{dt} \right|_{(1.4)} \right\} = 0, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Раскрывая производную в силу системы (1.4), получаем дифференциально-функ-циональное уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial t} + \min_{u\in P(t)} \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^*(\cdot)}, \mathcal{A}_t x^*(\cdot) + \mathcal{B}_t u \right\rangle = 0, \quad t \in [t_0, t_1). \tag{1.27}$$

Учитывая вид (1.13) оператора $\mathcal{A}_t$ и (1.14) оператора $\mathcal{B}_t$ и то, что $x^*(\cdot)$ представляет собой пару $\{x^0,\ x^0(\cdot)\}$ (согласно ((1.1))), получаем:

$$\left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^*(\cdot)}, \mathcal{A}_t x^*(\cdot) + \mathcal{B}_t u \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0(\cdot)}, \frac{dx^0(\cdot)}{d\tau} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0}, A_0(t)x(0) + A_1(t)x(-h) + B(t)u \right\rangle.$$

Взяв минимум по u в выражении (1.27), таким образом, получаем при $t \in [t_0, t_1)$ следующее выражение для уравнения Гамильтона - Якоби - Белл-мана:

$$\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0(\cdot)}, \frac{dx^0(\cdot)}{d\tau} \right\rangle + \tag{1.28}$$

$$+\left\langle \frac{\partial V(t,x^*(\cdot))}{\partial x^0}, A_0(t)x(0)+A_1(t)x(-h)\right\rangle - \rho\left(-B'(t)\frac{\partial V(t,x^*(\cdot))}{\partial x^0}\middle| P(t)\right)=0,$$

с ограничением в момент времени t_1:

$$V(t_1,x^*(\cdot)) = d^2(x^*(\cdot),\ \mathcal{M}(\cdot)). \tag{1.29}$$

Покажем, что функционал цены удовлетворяет этому уравнению.

Заметим, что при фиксированных t, $l(\cdot)$, слагаемые выражения (1.26), в которые входит функция $x^*(\cdot)$, являются линейными функционалами. Следовательно, функционал $\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))$, заданный формулой (1.26), является дифференцируемым по Фреше по элементу $x^*(\cdot)$. Так как функция $x^*(\cdot)$ полагается абсолютно непрерывной, то $\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))$ дифференцируемо по t. Стандартными преобразованиями получаем выражения для соответствующих производных:

$$\frac{\partial\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))}{\partial x_0} = LS'_{t_1}(\cdot,t)l(\cdot), \tag{1.30}$$

$$\frac{\partial\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))}{\partial x_0(\cdot)}(\tau) = \begin{cases} LA'_1(\tau+h+t)S'_{t_1}(\cdot,\tau+h+t)l(\cdot),\ \tau\in[-h,\tau^*), \\ l(\tau+t-t_1+h),\ \tau\in[\tau^*,0), \end{cases} \tag{1.31}$$

где $\tau^* = \min\{-h+t_1-t,\ 0\}$,

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))}{\partial t} = -\int\limits_{\tau^*}^{0}\left\langle l(\tau+t-t_1+h), \frac{dx(\tau)}{d\tau}\right\rangle d\tau - \\ -\left\langle LA'_0(t)S'_{t_1}(\cdot,t)l(\cdot) + LA'_1(t+h)S'_{t_1}(\cdot,t+h)l(\cdot), x(0)\right\rangle + \\ +\rho\left(-LB'(t)S'_{t_1}(\cdot,t)l(\cdot)\middle| P(t)\right) + \\ \left\langle LA'_1(t+h)S'_{t_1}(\cdot,t+h)l(\cdot), x(0)\right\rangle - \left\langle LA'_1(t)S'_{t_1}(\cdot,t)l(\cdot), x(-h)\right\rangle - \\ -\int\limits_{t-h}^{t+\tau^*}\left\langle LA'_1(\tau+h)S'_{t_1}(\cdot,\tau+h)l(\cdot), \frac{dx(\tau-t)}{d\tau}\right\rangle d\tau.\end{gathered} \tag{1.32}$$

Стандартным образом можно проверить, что если сходимость по переменной $x^*(\cdot)$ рассматривать в сильной топологии, а по $l(\cdot)$ в слабой, то производная

$\frac{\partial\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))}{\partial t}$ будет непрерывна по совокупности переменных t, $l(\cdot)$, при фиксированном $x^*(\cdot)$, производные $\frac{\partial\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))}{\partial x_0(\cdot)}$ будут непрерывны по совокупности переменных $x^*(\cdot)$, $l(\cdot)$, а функционал $\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))$ будет полунеперерывным сверху.

Так как функционал $\varphi(t,x^*(\cdot),l(\cdot))$, строго выпуклый по $l(\cdot)$, то максимизатор $l_0(\cdot)$ в (1.25) при фиксированной позиции $\{t,x^*(\cdot)\}$ единственный.

В силу непрерывности $V(t,x^*(\cdot))$, норма максимизатора $l_0(\cdot)$ будет ограничена некоторой константой, если начальную позицию $\{t,x^*(\cdot)\}$ рассматривать в фиксированной окрестности. А, следовательно, максимум по $l(\cdot)$ можно рассматривать не по всему пространству, а по шару в пространстве H, который будет являться слабо компактным множеством, в силу рефлексивности пространства.

В этих условиях, функция $V(t,x^*(\cdot))$ будет дифференцируемой по Фреше по переменным t и $x^*(\cdot)$, что можно проверить, повторив схему доказательства из ([9], с.35) для гильбертова пространства.

Теорема о дифференцировании функции минимума

Теорема 5. *Пусть H-гильбертово пространство, $D\subset H$, D - открытое множество, N - компактное хаусдорфово пространство, $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$ - непрерывны на $D\times N$, тогда $\forall x\in D$, $\forall\alpha\in H$ существует производная по направлению α функции минимума $W(x)=\min\limits_{y\in N}F(x,y)$, причем $\nabla_\alpha W(x)=\min\limits_{y\in N(x)}\langle F'_x(x,y),\alpha\rangle$, где $N(x)=\operatorname{Arg}\min\limits_{y\in N}F(x,y)$. Если множество $N(x)$ состоит из единственного элемента y_0, тогда функция $W(x)$ дифференцируема по Фреше и $W'_x(x)=F'_x(x,y_0)$*

Доказательство. Рассмотрим

$$\forall x\in D,\ \forall\alpha_k\in H\mid\|\alpha_k\|=1,\ x^k=x+\alpha_k\epsilon_k,\ k=1,2,\dots,\ \epsilon_k>0,\epsilon_k\to+0.$$

$$\tfrac{W(x_k)-W(x)}{\epsilon_k} = \tfrac{F(x^k,y^k)-F(x,y)\pm F(x^k,y)}{\epsilon_k} = \tfrac{F(x^k,y^k)-F(x^k,y)+F(x^k,y)-F(x,y)}{\epsilon_k} \leq$$
$$\leq \{y_k \in N(x_k),\ \forall y \in N(x)\} \leq \left\langle F'_x(x+\theta_k(x^k-x),y),\alpha_k \right\rangle$$

$$\limsup_{k\to\infty}\left\{\frac{W(x^k)-W(x)}{\epsilon_k} - \langle F'_x(x,y),\alpha_k\rangle\right\} \leq 0,\ \forall y \in N(x)$$

в силу непрерывности производной $F'_x(x,y)$.

В частности если $\alpha_k = \alpha$

$$\limsup_{k\to\infty}\left\{\frac{W(x^k)-W(x)}{\epsilon_k}\right\} \leq \langle F'_x(x,y),\alpha\rangle,\ \forall y \in N(x)$$

.

Аналогично доказывается неравенство в обратную сторону.

Рассмотрим

$$\tfrac{W(x^k)-W(x)}{\epsilon_k} = \tfrac{F(x^k,y^k)-F(x,y)\pm F(x,y^k)}{\epsilon_k} = \tfrac{F(x^k,y^k)-F(x,y^k)+F(x,y^k)-F(x,y)}{\epsilon_{k_l}} \geq$$
$$\geq \left\langle F'_x(x+\theta_k(x^k-x),y^k),\alpha_k \right\rangle$$

$$\frac{W(x^k)-W(x)}{\epsilon_k} - \left\langle F'_x(x+\theta_k(x^k-x),y^k),\alpha_k \right\rangle \geq 0$$

Существует подпоследовательность $\{k_l\}$ такая, что

$$\liminf_{k\to\infty}\left\{\frac{W(x^k)-W(x)}{\epsilon_k} - \left\langle F'_x(x+\theta_k(x^k-x),y^k),\alpha_k \right\rangle\right\} =$$
$$= \lim_{l\to\infty}\left\{\frac{W(x^{k_l})-W(x)}{\epsilon_{k_l}} - \left\langle F'_x(x+\theta_{k_l}(x^{k_l}-x),y^{k_l}),\alpha_{k_l} \right\rangle\right\}$$

Без ограничения общности $y_{k_l} \to y^* \in N$ так как N - компакт. Покажем, что $y^* \in N(x)$. Так как

$$F(x^{k_l},y^{k_l}) \leq F(x^{k_l},y),\ \forall y\ \Rightarrow\ F(x,y^*) \leq F(x,y).$$

В случае единственности минимизатора $y \in N(x)$ получаем, что $y = y^*$ и, следовательно,

$$\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{W(x^{k_l})-W(x)}{\epsilon_{k_l}} - \langle F'_x(x,y),\alpha_{k_l}\rangle\right\} \geq 0.$$

В случае $\alpha_k = \alpha$, и вообще говоря неединственного минимизатора $y \in N(x)$ получаем

$$\liminf_{k\to\infty} \left\{ \frac{W(x^k) - W(x)}{\epsilon_k} \right\} \geq \langle F'_x(x, y^*), \alpha \rangle \geq \min_{y\in N(x)} \langle F'_x(x, y), \alpha \rangle .$$

что и завершает доказательство теоремы.

Таким образом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(t, x^*(\cdot), l_0(\cdot))}{\partial t}, \quad \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi(t, x^*(\cdot), l_0(\cdot))}{\partial x_0},$$
$$\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x_0(\cdot)} = \frac{\partial \varphi(t, x^*(\cdot), l_0(\cdot))}{\partial x_0(\cdot)}. \tag{1.33}$$

Подставив функционал $V(t, x^*(\cdot))$ в левую часть уравнения (1.28), учитывая (1.30))-(1.32) и (1.33), убеждаемся в справедливости уравнения (1.28).

1.7 Множество разрешимости и функционал цены в случае конечномерного целевого множества

Выше был рассмотрен случай, когда целевое множество лежит в бесконечномерном пространстве H. Теперь рассмотрим конечномерный случай, когда нужно перевести систему в некоторое множество, лежащее в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Зададим целевое множество $\mathcal{M}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$x_{t_1}(0) \in \mathcal{M}.$$

Но поскольку начальную позицию системы (1.4) необходимо задать вместе с предысторией, то и в случае конечномерного целевого множества текущая позиция $\{t, x^*(\cdot)\}$ будет задаваться в бесконечномерном пространстве H, то есть $x^*(\cdot) \in H$.

При этом множество разрешимости $W_t[\cdot]$ также будет являться подмножеством пространства H:

$$W_t[\cdot] = W_t(\cdot, t_1, \mathcal{M}) = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H | \exists u(\cdot) \in U[t, t_1] : x_{t_1}(0, t, x^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{M}\}. \tag{1.34}$$

Функционал цены $V(t, x^*(\cdot))$ вводится аналогично бесконечномерному случаю, используя определение (1.18) отображения $V(t, x^*(\cdot) \mid \tau, \varphi(\cdot))$:

Определение 7. *Функционал цены $V(t, x^*(\cdot))$ есть решение следующей задачи:*

$$V(t, x^*(\cdot)) = V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)), \tag{1.35}$$

с краевым условием

$$V(t_1, x^*(\cdot)) = d^2(x(0), \mathcal{M}), \; x^*(\cdot) \in H. \tag{1.36}$$

Отличие состоит в краевом условии, которое в данном случае представляет собой квадрат расстояния в пространстве $\mathbb{R}^n$, а не в пространстве H.

Функционал цены можно также записать в виде, аналогичном (1.23):

$$V(t, x^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot) \in U[t, t_1]} \{d^2(x_{t_1}(0, t, x^*(\cdot), u(\cdot)), \mathcal{M}) \mid x_t(\cdot) = x^*(\cdot)\}. \tag{1.37}$$

Множество разрешимости также представляется в виде множества уровня функционала цены:

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid V(t, x^*(\cdot)) \leq 0\}.$$

Для множества разрешимости и функционала цены соответствующие принципы оптимальности (1.21), (1.22) сохраняются:

Теорема 6. *Множество разрешимости удовлетворяет полугрупповому свойству*

$$W_t(\cdot, t_1, \mathcal{M}) = W_t(\cdot, \tau, W_\tau(\cdot, t_1, \mathcal{M})), \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1.$$

Теорема 7. *Отображение $V(t, x^*(\cdot))$ удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$V(t, x^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U[t,\tau]} \{V(\tau, x_\tau(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot)))\}, \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1,$$

которое можно записать в виде:

$$V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)) = V(t, x^*(\cdot) \mid \tau, V(\tau, \cdot \mid t_1, V(t_1, \cdot))), \text{ при } t_0 \le t \le \tau \le t_1.$$

При этом, полученное методами выпуклого анализа аналитическое выражение (1.25), (1.26) для функционала цены упрощается:

$$V(t, x^*(\cdot)) = \max_{l\in\mathbb{R}^n} \langle S'(t_1, t)l, x(0)\rangle - \int_t^{t_1} \rho\left(-B'(\tau)S'(t_1, \tau)l \,|\, P(\tau)\right) d\tau +$$
$$+ \int_{t-h}^{t} \langle A_1'(\tau + h)S'(t_1, \tau + h)l, x(\tau - t)\rangle \, d\tau - \rho\left(l \,|\, \mathcal{M}\right) - 1/4 \langle l, l\rangle, \tag{1.38}$$

Уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана для функционала цены здесь полностью сохраняет свой вид: (1.27) и (1.28).

$$\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial t} + \min_{u\in P(t)} \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^*(\cdot)}, \mathcal{A}_t x^*(\cdot)\right\rangle = 0, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Или более детально:

$$\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0(\cdot)}, \frac{dx^0(\cdot)}{d\tau}\right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0}, A_0(t)x(0) + A_1(t)x(-h)\right\rangle - \rho\left(-B'(t)\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0} \,\middle|\, P(t)\right) = 0.$$

При этом граничное условие становится следующим:

$$V(t_1, x^*(\cdot)) = d^2(x(0), \mathcal{M}).$$

1.8 Задача быстродействия

Рассмотрим задачу быстродействия из точки во множество в классе программных управлений.

Зафиксируем начальную позицию $\{t, x^*(\cdot)\}$. Требуется попасть во множество $\mathcal{M}(\cdot)$ как можно быстрее. Множество $\mathcal{M}(\cdot)$ можно брать как в пространстве H так и в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В первом случае ($\mathcal{M}(\cdot) \subset H$) будем искать минимальный момент времени t_1^* такой, что

$$x_{t_1^*}(\cdot) \in \mathcal{M}(\cdot),$$

или, если момент недостижим, то точную нижнюю грань:

$$t_1^* = \inf\{t_1 \mid x_{t_1}(\cdot) \in \mathcal{M}(\cdot)\}.$$

Во втором случае ($\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$) будем искать минимальный момент времени t_1^* такой, что

$$x_{t_1^*}(0) \in \mathcal{M},$$

или, если момент недостижим, то точную нижнюю грань:

$$t_1^* = \inf\{t_1 \mid x_{t_1}(0) \in \mathcal{M}\}.$$

В первом случае будем определять функционал цены $V(t, x^*(\cdot))$ по формулам (1.19), (1.20), (1.23), во втором случае по формулам (1.35)-(1.37). Дальнейшая схема решения в обеих постановок будет одной и той же.

Из определения функционала цены следует, что минимальный момент времени t_1^* попадания в соответствующее целевое множество можно найти, решив экстремальную задачу поиска точной нижней грани всех моментов времени t_1, таких, что $V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)) = 0$. То есть

$$t_1^* = \inf\{t_1 \mid V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)) = 0.$$

Возможен вариант постановки с фиксированным моментом времени t_1, когда из заданного фазового состояния требуется попасть в момент времени t_1 на множество M. В этом случае ищется точная верхняя грань моментов времени t, таких что $V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)) = 0$. То есть требуемый ближайший момент времени t^*, в который можно начинать движение находится из решения экстремальной задачи

$$t^* = \sup\{t \mid V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)) = 0.$$

После нахождения требуемых моментов времени, оптимальное управление можно искать используя вид функционала цены (1.25)-(1.26) для бесконечномерного целевого множества, и, соответственно, (1.38) для целевого множества из пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 8. *Пусть $l^*(\cdot) \in H$ - максимизатор (единственный) в выражении* (1.25) *(соответственно в выражении* (1.38) *для конечномерного целевого множества), тогда оптимальное управление $u^*(\tau)$ удовлетворяет выражению*

$$-\left\langle LB'(\tau)S'_{t_1}(\cdot,\tau)l^*(\cdot), u(\tau)\right\rangle = \rho\left(-LB'(\tau)S'_{t_1}(\cdot,\tau)l^*(\cdot)\middle|\, P(\tau)\right)$$

для почти всех $\tau \in [t, t_1]$. И в случае однозначной разрешимости данного уравнения $u^*(\tau)$ с необходимостью будет оптимальным управлением.

1.9 Синтез управлений

Рассмотрим задачу построения синтеза управления. Из начальной позиции $t_0, x^0(\cdot)$ требуется попасть в целевое множество $\mathcal{M}(\cdot)$, которое в зависимости от постановки, является подмножеством пространства H или $\mathbb{R}^n$. То есть требуется найти функцию $U(t, x^*(\cdot))$, зависящую от текущей позиции, такую, что после подстановки ее в уравнение (1.4), последнее будет иметь решение, которое будет удовлетворять соответствующим начальным и целевым условиям.

Также как и для задачи быстродействия, ввиду того, что текущая позиция в обеих постановках принадлежит бесконечномерному пространству H, схема построения синтеза будет одинакова как для бесконечномерного целевого множества, так и для конечномерного. Различными будут значения функционалов цены и краевые условия. В то же время уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана будут иметь одинаковый вид. Поэтому выражения для вычисления синтезированного управления будут одинаковыми в обеих постановках.

Итак, уравнение (1.27) позволяет построить синтез управлений:

$$U(t, x_t(\cdot)) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in P(t)} \left\langle B'(t) \frac{\partial V(t, x_t(\cdot))}{\partial x^0}, u \right\rangle.$$

Заметим, что стратегия управления $U(t, x_t(\cdot))$ является многозначным отображением, поэтому, уравнение (1.4) превращается в дифференциальное включение

$$\dot{x}(\tau) \in A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)U(t, x_t(\cdot)), \quad \tau \in [t_0, t_1], \qquad (1.39)$$

решением которого является совокупность всех абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих ему почти всюду.

Вопрос о разрешимости данного дифференциального включения решается положительно.

Действительно, отображение $U(t, x_t(\cdot))$ является полунепрерывным сверху [6], принимающим выпуклые компактные значения. Следовательно, решение дифференциального включения существует ([26]). Непосредственно подставляя любую реализацию дифференциального включения в функционал цены и интегрируя по времени, можно проверить, что функционал цены будет сохранять свое значение.

Таким образом $U(t, x_t(\cdot))$ является искомым синтезированным управлением.

1.10 Функционал цены для задачи достижимости

Наложим на начальное значение ограничения:

$$x_{t_0}(\cdot) \in X^0(\cdot), \quad X^0(\cdot) \subset H. \tag{1.40}$$

Определение 8. *Множеством достижимости* $X_t[\cdot] = X_t(\cdot, t_0, X^0(\cdot))$ *в момент* t *системы* (1.4), (1.6) *при ограничениях* (1.5), (1.40) *будем называть объединение*

$$X_t[\cdot] = X_t(\cdot, t_0, X^0(\cdot)) = \bigcup \{x_t(\cdot, t_0, x_{t_0}(\cdot), u(\cdot))\}. \tag{1.41}$$

всевозможных состояний системы (1.4), (1.6) *в момент времени* t *при ограничениях* (1.5), (1.40).

Непосредственно из определения следует что, для отображения $X_t(\cdot, t_0, X^0(\cdot))$ справедлив принцип оптимальности или полугрупповое свойство:

$$X_t(\cdot, t_0, X^0(\cdot)) = X_t(\cdot, \tau, X_\tau(\cdot, t_0, X^0(\cdot))), \quad t_0 \le \tau \le t. \tag{1.42}$$

Пусть заданы параметры $t \in [t_0, t_1]$, $x_t(\cdot) \in H$, $z_{t_1}(\cdot) \in H$, $\tau \in [t, t_1]$ и сильно непрерывный функционал $\varphi(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}^1$. Введем отображение

$V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot) \mid \tau, \varphi(\cdot, \cdot))$:

$$V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot) \mid \tau, \varphi(\cdot, \cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U[t,\tau]} \{\varphi(x_\tau(\cdot, t, x_t(\cdot), u(\cdot)), z_{t_1}(\cdot))\}. \qquad (1.43)$$

Определение 9. *Функционал цены $V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot))$ есть решение следующей задачи:*

$$V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) = V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot, \cdot)), \qquad (1.44)$$

с краевым условием

$$V(t_1, x^*(\cdot), z^*(\cdot)) = d^2(x^*(\cdot), z^*(\cdot)),\ x^*(\cdot) \in H,\ z^*(\cdot) \in H. \qquad (1.45)$$

Рассуждая аналогично случаю разрешимости и учитывая то, что элемент $x_t(\cdot)$ представляет собой пару $\{x_t^0,\ x_t^0(\cdot)\}$ (согласно (1.1)), получаем следующие утверждения.

Теорема 9. *Область достижимости можно представить в виде множества уровня функционала цены*

$$X_{t_1}[\cdot] = \bigcup_{x_{t_0}(\cdot)\in X_0(\cdot)} \{z_{t_1}(\cdot) \mid V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) \le 0\}. \qquad (1.46)$$

Для $V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot))$ можно сформулировать принцип оптимальности.

Теорема 10. *Отображение $V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot))$ удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U[t,\tau]} \{V(\tau, x_\tau(\cdot, t, x_t(\cdot), u(\cdot)), z_{t_1}(\cdot))\},\ \textit{при}\ t_0 \le t \le \tau \le t_1.$$

Данное свойство можно записать в следующем виде:

$$V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot, \cdot)) =$$
$$= V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot) \mid \tau, V(\tau, \cdot, \cdot \mid t_1, V(t_1, \cdot, \cdot))),\ t \le \tau \le t_1.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана будет выглядеть следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot))}{\partial t} + \\
+ \min_{u \in P(t)} \left\langle \frac{\partial V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot))}{\partial x_t^0}, A_0(t)x_t(0) + A_1(t)x_t(-h) + B(t)u \right\rangle + \\
+ \left\langle \frac{\partial V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot))}{\partial x_t^0(\cdot)}, \frac{dx_t(\tau)}{d\tau} \right\rangle = 0, \quad t \in [t_0, t_1),
\end{gathered}
$$

с краевым условием

$$
V(t_1, x_{t_1}(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) = d^2(x_{t_1}(\cdot), z_{t_1}(\cdot)).
$$

При этом, как и в секции 1.4, соответствующий функционал цены можно выписать при помощи методов выпуклого анализа. Получаем,

$$
\begin{gathered}
V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) = \max_{l(\cdot) \in H} \{ \langle L S'_{t_1}(\cdot, t) l(\cdot), x_t(0) \rangle - \\
- \int_t^{t_1} \rho \left(-L B'(\tau) S'_{t_1}(\cdot, \tau) l(\cdot) \middle| P(\tau) \right) d\tau + \\
+ \int_{t-h}^{t} \langle L A'_1(\tau + h) S'_{t_1}(\cdot, \tau + h) l(\cdot), x_t(\cdot) \rangle d\tau - \langle l(\cdot), z_{t_1}(\cdot) \rangle - \\
-1/4 \langle l(\cdot), l(\cdot) \rangle \},
\end{gathered}
\tag{1.47}
$$

где оператор L определяется выражением ((1.3)).

Дальнейшие рассуждения и проверки проводятся аналогично секциям 1.5, 1.6.

Также заметим, что объединение по множеству начальных состояний в выражение для множества достижимости (1.46) можно внести в выражение для функционала цены:

$$
V_0(t_0, X_0(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) = \inf_{x_{t_0}(\cdot) \in X_0(\cdot)} \{ V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) \}.
$$

В этом случае

$$
X_{t_1}[\cdot] = \bigcup \{ z_{t_1}(\cdot) \mid V_0(t_0, X_0(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) \leq 0 \}.
$$

1.11 Функционал цены для задачи достижимости: конечномерный случай

Можно рассматривать множество достижимости в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$, когда нужно знать только значение системы в текущий момент без предыстории. Тогда, аналогично вводятся соответствующие понятия и доказываются соответствующие утверждения.

Определение 10. *Множеством достижимости* $X[t] = X(t, t_0, X^0(\cdot))$ *в момент* t *системы* (1.4), (1.6) *при ограничениях* (1.5), (1.40) *будем называть объединение*

$$X[t] = X(t, t_0, X^0(\cdot)) = \bigcup \{x_t(0, t_0, x_{t_0}(\cdot), u(\cdot))\}. \tag{1.48}$$

всевозможных конечномерных состояний системы (1.4), (1.6) *в момент времени* t *при ограничениях* (1.5), (1.40).

Замечание. Заметим, что в отличие от бесконечномерного случая, для отображения $X(t, t_0, X^0(\cdot))$ принцип оптимальности вида (1.42) не выполняется, так как знания конечномерного множества в текущий момент недостаточно для продолжения ансамбля траекторий – необходимо знать предысторию.

Пусть заданы параметры $t \in [t_0, t_1]$, $x_t(\cdot) \in H$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [t, t_1]$ и сильно непрерывный функционал $\varphi(\cdot, \cdot) : H \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$.

Введем отображение $V(t, x_t(\cdot), z \mid \tau, \varphi(\cdot, \cdot))$:

$$V(t, x_t(\cdot), z \mid \tau, \varphi(\cdot, \cdot)) = \min_{u(\cdot) \in U[t,\tau]} \{\varphi(x_\tau(\cdot, t, x_t(\cdot), u(\cdot)), z)\}. \tag{1.49}$$

Определение 11. *Функционал цены* $V(t, x_t(\cdot), z)$ *есть решение следующей задачи:*

$$V(t, x_t(\cdot), z) = V(t, x_t(\cdot), z \mid t_1, V(t_1, \cdot, \cdot)), \tag{1.50}$$

с краевым условием

$$V(t_1, x^*(\cdot), z) = d^2(x(0), z),\ x^*(\cdot) \in H,\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{1.51}$$

Рассуждая аналогично случаю разрешимости и учитывая то, что элемент $x_t(\cdot)$ представляет собой пару $\{x_t^0,\ x_t^0(\cdot)\}$ (согласно ((1.1)), получаем следующие утверждения.

Теорема 11. *Область достижимости можно представить в виде множества уровня функционала цены*

$$X[t_1] = \bigcup_{x_{t_0}(\cdot) \in X_0(\cdot)} \{z \mid V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z) \le 0\}. \tag{1.52}$$

Теорема 12. *Отображение $V(t, x_t(\cdot), z)$ удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$V(t, x_t(\cdot), z) = \min_{u(\cdot) \in U[t,\tau]} \{V(\tau, x_\tau(\cdot, t, x_t(\cdot), u(\cdot)), z)\},\ \text{при } t_0 \le t \le \tau \le t_1.$$

Данное свойство можно записать в следующем виде:

$$V(t, x_t(\cdot), z \mid t_1, V(t_1, \cdot, \cdot)) =$$
$$= V(t, x_t(\cdot), z \mid \tau, V(\tau, \cdot, \cdot \mid t_1, V(t_1, \cdot, \cdot))),\ t \le \tau \le t_1.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial V(t, x_t(\cdot), z)}{\partial t} + \min_{u \in P(t)} \left\langle \frac{\partial V(t, x_t(\cdot), z)}{\partial x_t^0}, A_0(t)x_t(0) + A_1(t)x_t(-h) + B(t)u \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial V(t, x_t(\cdot), z)}{\partial x_t^0(\cdot)}, \frac{dx_t(\tau)}{d\tau} \right\rangle = 0, \quad t \in [t_0, t_1),$$

с краевым условием

$$V(t_1, x_{t_1}(\cdot), z) = d^2(x_{t_1}(0), z_{t_1}(\cdot)).$$

Функционал цены можно выписать при помощи методов выпуклого анализа. При этом выражение (1.47) упрощается.

Получаем,

$$V(t, x_t(\cdot), z)) = \max_{l \in \mathbb{R}^n}\{\langle S'(t_1, t)l, x_t(0)\rangle -$$
$$-\int\limits_t^{t_1} \rho\left(-B'(\tau)S'(t_1, \tau)l \,|\, P(\tau)\right) d\tau +$$
$$+\int\limits_{t-h}^{t} \langle A_1'(\tau + h)S'(t_1, \tau + h)l, x_t(\tau - t)\rangle d\tau - \langle l, z\rangle - 1/4\langle l, l\rangle\}.$$

Также заметим, что объединение по множеству начальных состояний в выражение для множества достижимости (1.46) можно внести в выражение для функционала цены:

$$V_0(t_0, X_0(\cdot), z) = \inf_{x_{t_0}(\cdot) \in X_0(\cdot)}\{V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z)\}.$$

В этом случае

$$X[t_1] = \bigcup\{z \mid V_0(t_0, X_0(\cdot), z) \leq 0\}.$$

1.12 Задачи достижимости и разрешимости в течение заданного промежутка времени

При решении определенного класса задач, когда систему нужно привести из заданного состояния в искомое множество не в конкретный момент времени, а в любой в течение заданного промежутка, приходится искать не множества достижимости и разрешимости в конкретный момент времени, а объединенные множества.

Введем эти понятия.

Определение 12. *Под множеством достижимости $X_{\bigcup}[t_1]$ в течение промежутка $[t_0, t_1]$ будем понимать объединение областей достижимости при* *всех моментах времени* $t \in [t_0, t_1]$*:*

$$X_{\bigcup}[t_1] = \bigcup_{t\in[t_0,t_1]} \{X_t[\cdot]\},$$

где $X_t[\cdot]$ *определяется выражением* (1.41).

Определение 13. *Под множеством разрешимости* $W_{\bigcup}[t_0]$ *в течение промежутка* $[t_0, t_1]$ *будем понимать объединение областей разрешимости при всех моментах времени* $t \in [t_0, t_1]$*:*

$$W_{\bigcup}[t_0] = \bigcup_{t\in[t_0,t_1]} \{W_t[\cdot]\},$$

где $W_t[\cdot]$ *определяется выражением* (1.17).

Объединенную область достижимости можно представить в виде множества уровня функционала цены

$$X_{\bigcup}[t_1] = \bigcup_{x_{t_0}(\cdot)\in X_0(\cdot),\tau\in[t_0,t_1]} \{z^*(\cdot) \mid V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z^*(\cdot) \mid \tau, V(\tau, \cdot, \cdot)) \le 0\}$$

где $V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z^*(\cdot)|\tau, V(\tau, \cdot, \cdot))$ определяется согласно (1.43) с краевым условием (1.45) взятым в момент τ:

$$V(\tau, x^*(\cdot), z^*(\cdot)) = d^2(x^*(\cdot), z^*(\cdot)),\ x^*(\cdot) \in H,\ z^*(\cdot) \in H.$$

Можно внести объединение по начальному множеству и по времени в выражение для функции цены

$$V_0^{\bigcup}(t_0, X_0(\cdot), z^*(\cdot)) = \inf_{x_{t_0}(\cdot)\in X_0(\cdot),\tau\in[t_0,t_1]} \{V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z^*(\cdot) \mid \tau, V(\tau, \cdot, \cdot))\}.$$

В этом случае

$$X_{\bigcup}[t_1] = \bigcup \{z^*(\cdot) \mid V_0^{\bigcup}(t_0, X_0(\cdot), z^*(\cdot)) \le 0\}.$$

Объединенную область разрешимости можно представить в виде множества уровня функционала цены

$$W_{\bigcup}[t_0] = \bigcup_{\tau\in[t_0,t_1]} \{x^*(\cdot) \mid V(\tau, x^*(\cdot)) \le 0\}.$$

Можно внести объединение по по времени в выражение для функции цены

$$V_0^{\bigcup}(t_0, x^*(\cdot)) = \inf_{\tau\in[t_0,t_1]} \{V(\tau, x^*(\cdot))\}.$$

В этом случае

$$W_{\bigcup}[t_0] = \bigcup \{x^*(\cdot) \mid V_0^{\bigcup}(t_0, x^*(\cdot)) \le 0\}.$$

Заметим, что введенные множества и функции будут вообще говоря невыпуклыми.

1.13 Задачи достижимости и разрешимости в течение заданного промежутка времени: конечномерный случай.

Задачи достижимости и разрешимости в течение заданного промежутка времени можно рассмотреть в конечномерной постановке. То есть рассматривать конечномерное целевое множество для задачи разрешимости. И рассматривать конечномерные множества достижимости.

Поскольку множества достижимости и разрешимости в течение заданного промежутка времени вводятся через понятия множеств достижимости и разрешимости в определенный момент времени, то объединенное множество достижимости также будет конечномерным. В то же время объединенное множество разрешимости будет бесконечномерным.

Таким образом в конечномерной постановке определения искомых множеств принимают следующий вид:

Определение 14. *Под множеством достижимости $X_{\bigcup}[t_1]$ в течение промежутка $[t_0, t_1]$ будем понимать объединение областей достижимости при всех моментах времени $t \in [t_0, t_1]$:*

$$X_{\bigcup}[t_1] = \bigcup_{t \in [t_0, t_1]} \{X[t]\},$$

где $X[t]$ определяется выражением (1.48).

Определение 15. *Под множеством разрешимости $W_{\bigcup}[t_0]$ в течение промежутка $[t_0, t_1]$ будем понимать объединение областей разрешимости при всех моментах времени $t \in [t_0, t_1]$:*

$$W_{\bigcup}[t_0] = \bigcup_{t \in [t_0, t_1]} \{W_t[\cdot]\},$$

где $W_t[\cdot]$ определяется выражением (1.34).

Объединенную область достижимости можно представить в виде множества уровня функционала цены

$$X_{\bigcup}[t_1] = \bigcup_{x_{t_0}(\cdot) \in X_0(\cdot), \tau \in [t_0, t_1]} \{z \mid V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z \mid \tau, V(\tau, \cdot, \cdot)) \leq 0\}$$

где $V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z | \tau, V(\tau, \cdot, \cdot))$ определяется согласно (1.49) с краевым условием (1.51) взятым в момент τ:

$$V(\tau, x^*(\cdot), z) = d^2(x(0), z),\ x^*(\cdot) \in H,\ z \in \mathbb{R}^n.$$

Можно внести объединение по начальному множеству и по времени в выражение для функции цены

$$V_0^{\bigcup}(t_0, X_0(\cdot), z) = \inf_{x_{t_0}(\cdot) \in X_0(\cdot), \tau \in [t_0, t_1]} \{V(t_0, x_{t_0}(\cdot), z \mid \tau, V(\tau, \cdot, \cdot))\}.$$

В этом случае

$$X_{\bigcup}[t_1] = \bigcup \{z \mid V_0^{\bigcup}(t_0, X_0(\cdot), z) \le 0\}.$$

Объединенную область разрешимости можно представить в виде множества уровня функционала цены

$$W_{\bigcup}[t_0] = \bigcup_{\tau \in [t_0, t_1]} \{x^*(\cdot) \mid V(\tau, x^*(\cdot)) \le 0\}.$$

Можно внести объединение по по времени в выражение для функции цены

$$V_0^{\bigcup}(t_0, x^*(\cdot)) = \inf_{\tau \in [t_0, t_1]} \{V(\tau, x^*(\cdot))\}.$$

В этом случае

$$W_{\bigcup}[t_0] = \bigcup \{x^*(\cdot) \mid V_0^{\bigcup}(t_0, x^*(\cdot)) \le 0\}.$$

Также заметим, что введенные множества и функции будут вообще говоря невыпуклыми.

1.14 Заключение

В данной главе приведены соотношения метода динамического программирования, позволяющие решать задачи разрешимости и достижимости для линейных управляемых систем с запаздыванием.

Глава 2

Эллипсоидальное оценивание множеств достижимости для линейных управляемых систем.

Введение.

Данная глава посвящена нахождению исчерпывающих внутренних и внешних оценок множества достижимости у линейной управляемой системы с запаздыванием при геометрических ограничениях на управление. Используются результаты [57], [58] где приводится техника эллипсоидального оценивания для интегралов от эллипсоидов и множеств достижимости линейных управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Прямым применением формулы для оценки интегралов от эллипсоидов получены исчерпывающие внутренние и внешние оценки для рассматриваемых в конечномерном пространстве множеств достижимости у задачи с запаздыванием. Переносом схемы оценки интегралов от эллипсоидов на функциональное пространство и множества эллипсоидального типа, получены исчерпывающие внутренние оценки в функциональном пространстве для множества достижимости у системы с запаздыванием. В частном случае получены рекуррентные формулы для вычисления внутренних оценок множества достижимости в функциональном пространстве. Основное содержание данной главы опубликовано в работе [61].

2.1 Система

Рассмотрим линейную управляемую систему с запаздыванием (1.4)-(1.6) на отрезке $[t_0, t_1]$.

Условие (1.6) запишем для соответствующего начального времени:

$$x_{t_0}(\cdot) = x^0(\cdot). \tag{2.1}$$

Решение $x(t)$ данной системы выписывается в следующем виде:

$$\begin{gathered} x(t) = S(t, t_0)x^0(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} S(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} S(t,\tau+h)A_1(\tau+h)x^0(\tau)d\tau, \end{gathered} \tag{2.2}$$

Решение системы (1.4), (1.6) можно рассматривать в конечномерном пространстве, как векторную функцию $x(\tau)$, определенную в каждый момент времени $\tau \in [t_0 - h, t_1]$. так и в пространстве H.

Таким образом, проблему нахождения областей достижимости данной системы можно рассматривать в двух постановках - конечномерной и функциональной (соответствующие определения даны ниже). Цель данной главы - получить исчерпывающие внутренние эллипсоидальные оценки множества достижимости в конечномерном и бесконечномерном пространствах на интервале времени $t \in [t_0, t_1]$ и определить, какие из них можно вычислять рекуррентно по t, тем самым уменьшая объем требуемых вычислений.

2.2 Конечномерный случай

2.2.1 Множество достижимости

Наложим на управление и начальные условия следующие ограничения:

$$u(\tau) \in \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)) \text{ при } \tau \in [t_0, t_1], \tag{2.3}$$

$$x^0(\cdot) \in X^0(\cdot), \tag{2.4}$$

где $X^0(\cdot)$ - некоторое подмножество пространства H.

Определение 16. *Множеством достижимости* $X[t] = X(t, t_0, X_0(\cdot))$ *в момент* t *системы* (1.4), (1.6) *при ограничениях* (2.3), (2.4) *называется объединение*

$$X[t] = X(t, t_0, X^0(\cdot)) = \bigcup \{x(t, t_0, x^0(\cdot), u(\cdot))\}$$

всевозможных состояний системы (1.4), (1.6) *в момент* t, *при ограничениях* (2.3), (2.4).

В дальнейшем, ограничение (2.4) полагаем следующим:

$$x^0(\tau) \in \mathcal{E}(x_0(\tau), X_0(\tau)), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0]. \tag{2.5}$$

Из (2.2) следует, что множество достижимости можно представить в виде суммы эллипсоида и интегралов от эллипсоидов:

Теорема 13. *Справедливо следующее выражение для множества достижимости:*

$$\begin{gathered}X[t] = x^*(t) + S(t,t_0)\mathcal{E}(0, X_0(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} S(t,\tau)B(\tau)\mathcal{E}(0, Q(\tau))d\tau + \\ + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} S(t,\tau+h)A_1(\tau+h)\mathcal{E}(0, X_0(\tau))d\tau,\end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$\begin{gathered}x^*(t) = S(t,t_0)x_0(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} S(t,\tau)B(\tau)q(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} S(t,\tau+h)A_1(\tau+h)x_0(\tau)d\tau.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Применяя стандартные методы выпуклого анализа (см., напр., [56], с.14), можно получить выражение для опорной функции множества достижимости:

Теорема 14. *Опорная функция множества достижимости выражается следующим соотношением:*

$$\begin{gathered}\rho(l|X[t]) = < l, x^*(t) > + < l, S(t,t_0)X_0(t_0)S'(t,t_0)l >^{1/2} + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} < l, S(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B'(\tau)S'(t,\tau)l >^{1/2} d\tau + \\ + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} < l, S(t,\tau+h)A_1(\tau+h)X_0(\tau)A_1'(\tau+h)S'(t,\tau+h)l >^{1/2} d\tau,\end{gathered} \tag{2.8}$$

где $x^*(t)$ задается выражением (2.7).

Из этих соотношений вытекает следующая теорема:

Теорема 15. *Множество достижимости $X[t]$ есть выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, и изменяется непрерывно по t.*

2.2.2 Внутренние оценки

Используя аппарат внутреннего эллипсоидального оценивания ([57], с.204) и представление (2.6), можно вывести следующее утверждение:

Теорема 16. *Множество достижимости $X[t]$ есть объединение эллипсоидов по всевозможным $T(\cdot)$, T_0, $T_0(\cdot)$:*

$$X[t] = \bigcup \{\mathcal{E}(x^-(t), X^-(t)) | T(\cdot), T_0, T_0(\cdot)\}.$$

Где

$$\begin{gathered} X^-(t) = Q^*(t)' Q^*(t), \\ Q^*(t) = \int\limits_{t_0-h}^{t_0} T_0(\tau) X_0^{1/2}(\tau) A_1'(\tau+h) S'(t,\tau+h) d\tau + \\ + T_0(t_0) X_0^{1/2}(t_0) S'(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} T(\tau) Q^{1/2}(\tau) B'(\tau) S'(t,\tau) d\tau, \end{gathered} \tag{2.9}$$

$T_0(\cdot)$, $T(\cdot)$ - любые измеримые по Лебегу функции, значениями которых являются ортогональные матрицы в $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$T_0'(\tau) T_0(\tau) = I,\ \tau \in [t_0-h, t_0], \quad T'(\tau) T(\tau) = I,\ \tau \in (t_0, t].$$

Центр эллипсоида $x^-(t)$ совпадает с $x^*(t)$ из выражения (2.7)*, то есть является решением системы*

$$\dot{x}^-(\tau) = A_0(\tau) x^-(\tau) + A_1(\tau) x^-(\tau-h) + B(\tau) q(\tau), \quad \tau \in [t_0, t], \tag{2.10}$$

$$x^-(\tau) = x_0(\tau), \quad \tau \in [t_0-h, t_0]. \tag{2.11}$$

Из (2.9) следует, что матрица $Q^*(t)$ является решением следующего дифференциального уравнения с запаздыванием:

$$\dot{Q}^*(\tau) = Q^*(\tau) A_0'(\tau) + Q^*(\tau-h) A_1'(\tau) + T(\tau) Q^{1/2}(\tau) B'(\tau), \quad \tau \in [t_0, t], \tag{2.12}$$

при начальных условиях

$$Q^*(\tau) = T_0(\tau)X_0^{1/2}(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0]. \tag{2.13}$$

Соответственно дифференциальное уравнение для $X^-(t)$ примет вид:

$$\begin{gathered}\dot{X}^-(\tau) = A_0(\tau)X^-(\tau) + X^-(\tau)A_0(\tau)' + \\ +A_1(\tau)Q^*(\tau - h)'Q^*(\tau) + Q^*(\tau)'Q^*(\tau - h)A_1(\tau)' + \\ +Q^*(\tau)'T(\tau)Q^{1/2}(\tau)B(\tau)' + B(\tau)Q^{1/2}(\tau)T(\tau)'Q^*(\tau), \quad \tau \in [t_0, t],\end{gathered} \tag{2.14}$$

при начальных условиях

$$X^-(\tau) = X_0(\tau), \ \ \tau \in [t_0 - h, t_0]. \tag{2.15}$$

Выбором матриц $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ ([57], с.204) можно добиться совпадения опорных функций множества достижимости и внутренней оценки для любого заранее фиксированного вектора l из $\mathbb{R}^n$:

Теорема 17. *Для любого вектора $l \in R^n$ существуют функции $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ такие, что*

$$\rho(l|X[t]) = \rho(l|\mathcal{E}(x^-(t), X^-(t))). \tag{2.16}$$

Искомые $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ находятся, исходя из следующих уравнений:

$$\begin{gathered}T_0(t_0)X_0^{1/2}(t_0)S'(t, t_0)l = \lambda(\xi)T_0(\xi)X_0^{1/2}(\xi)A_1'(\xi + h)S'(t, \xi + h)l = \\ = \lambda(\tau)T(\tau)Q^{1/2}(\tau)B'(\tau)S'(t, \tau)l, \\ \lambda(\tau) > 0, \ \lambda(\xi) > 0, \ \xi \in [t_0 - h, t_0), \tau \in (t_0, t].\end{gathered} \tag{2.17}$$

Таким образом, каждому вектору l из $\mathbb{R}^n$ соответствуют значения $T_0(l, \cdot)$, $T(l, \cdot)$ и $X^-(l, t)$, при которых выполняется (2.16).

Теорема 18. *Множество достижимости есть объединение эллипсоидов по всевозможным векторам l из единичной сферы:*

$$X[t] = \bigcup \{\mathcal{E}(x^-(t), X^-(l, t)) | l \in \mathbb{R}^n \ : \ \|l\| = 1\}.$$

Поскольку величины $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ в общем случае зависят от t, для вычисления внутренних оценок в другой момент времени, требуется заново решать систему (2.12)-(2.13).

2.2.3 Пример

Проиллюстрируем графически формулы для оценки множества достижимости. Рассмотрим следующий пример:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_0(\tau) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \tau \in [t_0 - h, t_0], \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad n = 2.$$

И четыре случая, отличающиеся друг от друга величиной запаздывания h: h=0, h=0.01, h=0.1, h=0.3.

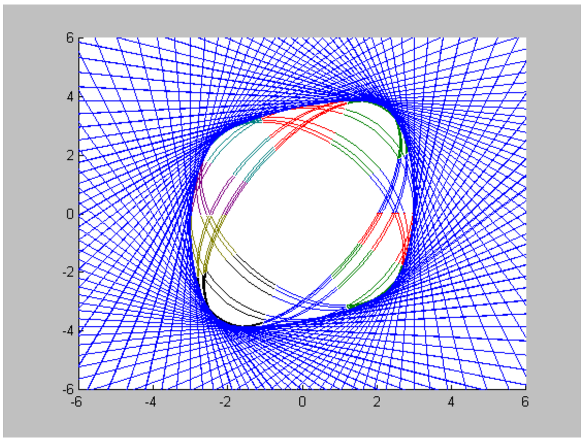
Рисунки демонстрируют внутренние эллипсоидальные оценки множества достижимости в момент $t = t_1$, полученные по формулам (2.12), (2.13)) и (2.17), и соответствующие опорные плоскости, полученные из формулы (2.8). Продемонстрировано влияние величины запаздывания на множество достижимости.

2.3 Функциональный случай

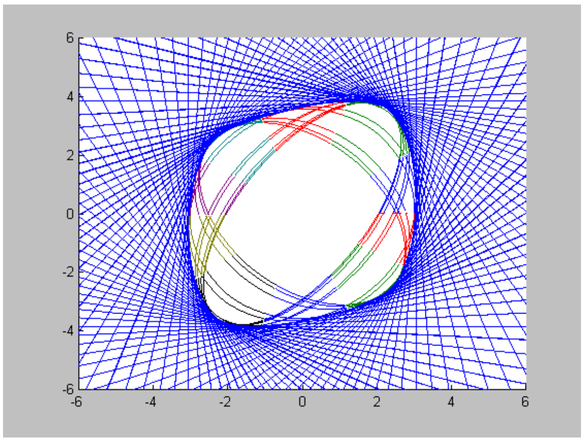
2.3.1 Множество достижимости

Рассматривается система (1.4), (2.1) при ограничениях (2.3), (2.4).

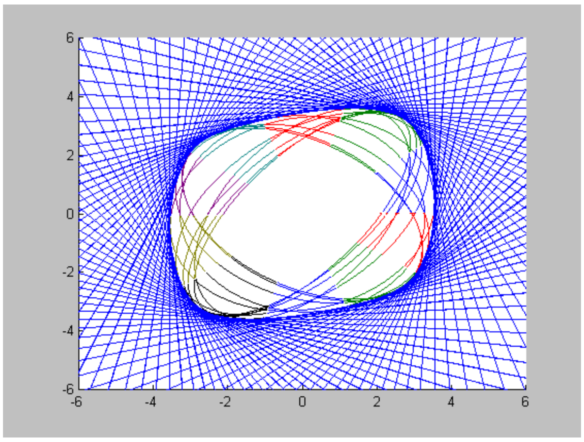
Определение 17. *Под решением (или состоянием)* $x_t(\cdot) = x_t(\cdot, t_0, x^0(\cdot), u(\cdot))$ *системы* (1.4), (2.1) *в функциональном смысле в точке* t *будем понимать*



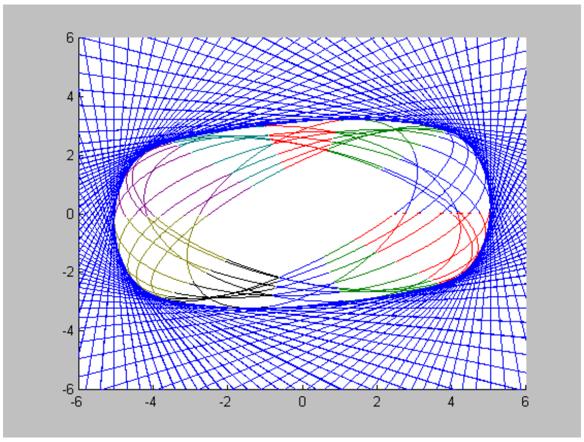
$h = 0$



$h = 0.01$



$h = 0.1$



$h = 0.3$

решение системы $x(\tau)$ *на отрезке* $[t-h,t]$ *при соответствующих начальном условии* $x^0(\cdot)$ *и управлении* $u(\cdot)$.

Замечание. *В дальнейшем, чтобы не усложнять запись, считаем, что* $t \geq t_0 + h$. *Случай* $t < t_0 + h$ *рассматривается по аналогичной схеме, разбивая отрезок* $[t-h,t]$ *на два:* $[t-h,t_0]$ *и* $[t_0,t]$, *с рассмотрением решения* $x_t(\cdot)$ *на каждом из них.*

Непосредственно из (2.2) и (1.10) следует выражение для функции $x_t(\cdot)$:

$$\begin{gathered} x_t(\cdot) = S_t(\cdot,t_0)x^0(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} S_t(\cdot,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} S_t(\cdot,\tau+h)A_1(\tau+h)x_0(\tau)d\tau, \end{gathered} \tag{2.18}$$

где

$$S_t(\cdot,\xi) = \{S(\tau,\xi), \tau \in [t-h,t]\}.$$

Определение 18. *Множеством достижимости* $X_t[\cdot] = X_t(\cdot,t_0,X^0(\cdot))$ *в функциональном смысле в момент* t *системы* (1.4), (2.1) *при ограничениях* (2.3), (2.4) *называется объединение*

$$X_t[\cdot] = X_t(\cdot,t_0,X^0(\cdot)) = \bigcup\{x_t(\cdot,t_0,x^0(\cdot),u(\cdot))\}$$

всевозможных состояний в функциональном смысле системы (1.4), (2.1) *в момент* t, *при ограничениях* (2.3), (2.4).

Непосредственно из этого определения следует следующее утверждение:

Теорема 19. *Множество достижимости удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$X_t(\cdot,t_0,X^0(\cdot)) = X_t(\cdot,\tau,X_\tau(\cdot,t_0,X^0(\cdot))), \quad t_0 \leq \tau \leq t.$$

В дальнейшем, ограничение (2.4) полагаем (2.5).

Непосредственно из (2.18) следует выражение для множества достижимости $X_t[\cdot]$:

Теорема 20. *Справедливо следующее выражение для множества достижимости:*

$$\begin{gathered} X[t] = x_t^*(\cdot) + S_t(\cdot, t_0)\mathcal{E}(0, X_0(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} S_t(\cdot, \tau)\mathcal{E}(0, Q(\tau))d\tau + \\ + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} S_t(\cdot, \tau + h)A_1(\tau + h)\mathcal{E}(0, X_0(\tau))d\tau, \end{gathered} \tag{2.19}$$

где

$$x_t^*(\cdot) = S_t(\cdot, t_0)x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} S_t(\cdot, \tau)q(\tau)d\tau + \int_{t_0-h}^{t_0} S_t(\cdot, \tau + h)A_1(\tau + h)x_0(\tau)d\tau. \tag{2.20}$$

Из этих соотношений и свойств решений дифференциальных включений ([48], с.62, [27], с.1398) вытекает следующая теорема:

Теорема 21. *Множество достижимости $X_t[\cdot]$ есть выпуклый компакт в пространстве H при $t > t_0 + h$.*

Применяя стандартные методы выпуклого анализа, можно получить выражение для опорной функции множества достижимости:

Теорема 22. *Опорная функция множества достижимости выражается следующим соотношением:*

$$\begin{gathered} \rho(l_t(\cdot)|X_t[\cdot]) = \langle l_t(\cdot), x_t^*(\cdot)\rangle_H^{1/2} + \langle LS_t'(\cdot, t_0)l_t(\cdot), X_0(t_0)LS_t'(\cdot, t_0)l_t(\cdot)\rangle^{1/2} + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \langle LS_t'(\cdot, \tau)l_t(\cdot), Q(\tau)L_tS_t'(\cdot, \tau)l_t(\cdot)\rangle^{1/2} d\tau + \\ + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} \langle LS_t'(\cdot, \tau + h)l_t(\cdot), A_1(\tau + h)X_0(\tau)A_1'(\tau + h)LS_t'(\cdot, \tau + h)l_t(\cdot)\rangle^{1/2} d\tau, \end{gathered}$$

где $x_t^*(\cdot)$ задается выражением (2.20), $l_t(\cdot) \in H$.

Рассмотрим функцию $l_t^*(\cdot)$, заданную следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} l_t^*(t) = S'(t_1,t)l_0, \\ l_t^*(\tau) = A_1'(\tau+h)S'(t_1,\tau+h)l_0, \quad \tau\in[t-h,t), \end{gathered} \tag{2.21}$$

где $l_0 \in \mathbb{R}^n$. В этом случае из (1.11) следует, что выражение $LS_t'(\cdot,\xi)l_t^*(\cdot)$ не зависит от t:

$$LS_t'(\cdot,\xi)l_t^*(\cdot) = S'(t,\xi)l_t^*(t) + \int\limits_{t-h}^{t} S'(\tau,\xi)l_t^*(\tau)d\tau = S'(t_1,\xi)l_0. \tag{2.22}$$

Следовательно,

$$\left\langle S_t'(\cdot,\xi)l_t^*(\cdot), a\right\rangle_H = \left\langle S'(t_1,\xi)l_0, a\right\rangle, \text{ для любого } a\in\mathbb{R}^n.$$

Поэтому, максимум в опорной функции достигается на некоторой траектории системы на отрезке $[t_0,t_1]$. То есть, для любого вектора $l_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют начальная функция $x^0(\cdot)$, удовлетворяющая (2.5), и управление $u(\cdot)$, удовлетворяющее (2.3), такие, что соответствующее решение $\tilde{x}_t(\cdot)$ в функциональном смысле системы (1.4), (2.1) на отрезке $[t_0,t_1]$ доставляет максимум в опорной функции в направлении $l_t^*(\cdot)$:

$$\rho(l_t^*(\cdot)|X_t[\cdot]) = \left\langle l_t^*(\cdot), \tilde{x}_t(\cdot)\right\rangle_H, \quad t\in[t_0,t_1].$$

2.3.2 Внутренние оценки

Внутренние оценки можно получить, используя инструмент внутреннего эллипсоидального оценивания для интегралов от эллипсоидов.

Определение 19. *Под множеством эллипсоидального типа* $E(q_t(\cdot),Q_t(\cdot))$, *где* $q_t(\cdot)\in H$, $Q_t(\cdot)\in H_{n\times n}$, $Q_t(\cdot) = Q_t'(\cdot) > 0$, *будем понимать выпуклое замкнутое множество в пространстве* H, *определяемое опорной функцией*

$$\rho(l(\cdot)|E(q_t(\cdot),Q_t(\cdot))) = \left\langle l(\cdot), q_t(\cdot)\right\rangle_H + \left\langle LQ_t^{\frac12}(\cdot)l(\cdot), LQ_t^{\frac12}(\cdot)l(\cdot)\right\rangle^{\frac12}, \ l(\cdot)\in H.$$

Перенесем технику эллипсоидального оценивания интегралов от эллипсоидов, используемую в ([57], с.204), на интегралы от множеств эллипсоидального типа.

Для этого оценим сумму двух множеств эллипсоидального типа $E(q^i(\cdot), Q^i(\cdot))$, $i = 1, 2$.

Теорема 23. *Пусть даны множества эллипсоидального типа $E(q^i(\cdot), Q^i(\cdot))$, $i = 1, 2$. Тогда их сумму можно представить в виде объединения множеств эллипсоидального типа по всевозможным T_1, T_2:*

$$E(q^1(\cdot), Q^1(\cdot)) + E(q^2(\cdot), Q^2(\cdot)) = \bigcup\{E(q^-(\cdot), Q^-(\cdot))|T_1,\ T_2\}.$$

Где

$$Q^-(\cdot) = Q^*(\cdot)'Q^*(\cdot),$$

$$Q^*_t(\cdot) = T_1 Q^1(\cdot)^{\frac{1}{2}} + T_2 Q^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.23}$$

T_1, T_2 - произвольные ортогональные матрицы в $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$T_i' T_i = I,\ i = 1, 2.$$

Центр $q^-(\cdot)$ совпадает с суммой центров $q^1(\cdot)$, $q^2(\cdot)$ исходных множеств эллипсоидального типа:

$$q^-(\cdot) = q^1(\cdot) + q^2(\cdot).$$

Доказательство. В силу того, что центры множеств входят в опорную функцию линейным образом, достаточно доказать теорему при нулевых центрах $q^1(\cdot)$, $q^2(\cdot)$:

$$q^1(\cdot) = q^2(\cdot) = 0.$$

Вычислим квадрат опорной функции множества $E(q^-(\cdot), Q^-(\cdot))$.

$$\rho\left(l(\cdot)|\, E(q^-(\cdot), Q^-(\cdot))\right)^2 = \langle LQ^*(\cdot)l(\cdot), LQ^*(\cdot)l(\cdot)\rangle =$$
$$= \left\langle T_1Q^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot) + T_2Q^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), T_1Q^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot) + T_2Q^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle =$$
$$\left\langle LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle + \left\langle LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle +$$
$$+2\left\langle T_1LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), T_2LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle \leq$$
$$\leq \{\text{применяем неравенство Коши-Буняковского}\} \leq$$
$$\leq \left\langle LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle + \left\langle LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle +$$
$$+2\left\langle LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left(\left\langle LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle^{\frac{1}{2}} + \left\langle LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot)\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$$
$$= \left(\rho\left(l(\cdot)|\, E(q^1(\cdot), Q^1(\cdot))\right) + \rho\left(l(\cdot)|\, E(q^2(\cdot), Q^2(\cdot))\right)\right)^2$$

Причем для любого $l(\cdot)$ существуют T_1, T_2 такие, что неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство. Это выполнено если T_1, T_2 удовлетворяют соотношению

$$T_1LQ^1(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot) = \lambda T_2LQ^2(\cdot)^{\frac{1}{2}}l(\cdot), \text{ где } \lambda > 0.$$

Таким образом, перебирая всевозможные направления $l(\cdot) \in H$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Аналогичным образом доказывается теорема для суммы любого конечного числа множеств эллипсоидального типа:

Теорема 24. *Пусть задана совокупность множеств эллипсоидального типа* $E(q^i(\cdot), Q^i(\cdot))$, $i = 1, ..., k$. *Тогда их сумму можно представить в виде объединения множеств эллипсоидального типа по всевозможным* $T_i(\cdot)$*:*

$$\sum_{i=1}^{k} E(q^i(\cdot), Q^i(\cdot)) = \bigcup \{E(q^-(\cdot), Q^-(\cdot))|T_i,\ i = 1, ..., k\}.$$

Где

$$Q^{-}(\cdot) = Q^{*}(\cdot)' Q^{*}(\cdot),$$
$$Q_t^{*}(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} T_i Q^{i}(\cdot)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.24}$$

T_i *- произвольные ортогональные матрицы в* $\mathbb{R}^{n\times n}$*:*

$$T_i' T_i = I.$$

Центр $q^{-}(\cdot)$ *совпадает с суммой центров* $q^{i}(\cdot)$ *исходных множеств эллипсоидального типа:*

$$q^{-}(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} q^{i}(\cdot).$$

Переходя от оценок интегральных сумм к оценкам интегралов, получаем следующую теорему.

Теорема 25. *Пусть задана совокупность множеств эллипсоидального типа* $E(q^0(\cdot), Q^0(\cdot))$*,* $E(q_\tau(\cdot), Q_\tau(\cdot))$*. Тогда сумму интеграла от* $E(q_\tau(\cdot), Q_\tau(\cdot))$ *и множества* $E(q^0(\cdot), Q^0(\cdot))$ *можно представить в виде объединения множеств эллипсоидального типа по всевозможным* T_0*,* $T(\tau)$*,* $\tau \in [t_0, t]$*:*

$$E(q^0(\cdot), Q^0(\cdot)) + \int_{t_0}^{t} E(q_\tau(\cdot), Q_\tau(\cdot)) d\tau = \bigcup \{E(q_t^{-}(\cdot), Q_t^{-}(\cdot)) | T_0,\ T(\tau),\ \tau \in [t_0, t]\}.$$

Где

$$Q^{-}(\cdot) = Q^{*}(\cdot)' Q^{*}(\cdot),$$
$$Q_t^{*}(\cdot) = T_0 Q^0(\cdot)^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^{t} T(\tau) Q_\tau(\cdot)^{\frac{1}{2}} d\tau \tag{2.25}$$

T_0*,* $T(\tau)$*, - произвольные ортогональные матрицы в* $\mathbb{R}^{n\times n}$*:+*

$$T_0' T_0 = T(\tau)' T(\tau) = I.$$

Центр $q^{-}(\cdot)$ совпадает с суммой центра $q^0(\cdot)$ и интеграла от $q_\tau(\cdot)$:

$$q_t^{-}(\cdot) = q^0(\cdot) + \int\limits_{t_0}^{t} q_\tau(\cdot) d\tau.$$

Из (2.19) видно, что множество достижимости есть интеграл от множеств эллипсоидального типа. Поэтому, справедлива следующая теорема:

Теорема 26. *Множество достижимости $X_t[\cdot]$ есть объединение множеств эллипсоидального типа по всевозможным $T(\cdot)$, $T_0(\cdot)$:*

$$X_t[\cdot] = \bigcup \{E(x_t^{-}(\cdot), X_t^{-}(\cdot)) | T(\cdot), T_0(\cdot)\}.$$

Где

$$\begin{gathered} X_t^{-}(\cdot) = Q_t^*(\cdot)' Q_t^*(\cdot), \\ Q_t^*(\cdot) = \int\limits_{t_0-h}^{t_0} T_0(\tau) X_0^{1/2}(\tau) A_1'(\tau+h) S_t'(\cdot, \tau+h) d\tau + \\ + T_0(t_0) X_0^{1/2}(t_0) S_t'(\cdot, t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} T(\tau) Q^{1/2}(\tau) B'(\tau) S_t'(\cdot, \tau) d\tau, \end{gathered} \tag{2.26}$$

$T_0(\cdot)$, $T(\cdot)$ - произвольные измеримые по Лебегу функции, значениями которых являются ортогональные матрицы в $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$T_0'(\tau) T_0(\tau) = I, \ \tau \in [t_0 - h, t_0], \ T'(\tau) T(\tau) = I, \ \tau \in [t_0, t].$$

Центр $x_t^{-}(\cdot)$ совпадает с функцией $x_t^*(\cdot)$ из соотношения (2.20)*, то есть является решением в функциональном смысле системы* (2.10)*,* (2.11)*.*

Из (2.26) следует, что матричная функция $Q_t^*(\cdot)$ является решением в функциональном смысле системы (2.12), (2.13). Соответственно, величина $X_t^{-}(\cdot)$ является решением в функциональном смысле системы (2.14), (2.15).

Каждое из уравнений (2.10), (2.12), (2.14) можно записать в эквивалентном функциональном виде (1.12) с соответствующим оператором A ([19], с.162).

Выбором матриц $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ можно добиться совпадения опорных функций множества достижимости и внутренней оценки для любого заранее фиксированного элемента $l_t(\cdot)$ из H:

Теорема 27. *Для любого $l_t(\cdot) \in H$ существуют $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ такие, что*

$$\rho(l_t(\cdot)|X_t[\cdot]) = \rho(l_t(\cdot)|E(x_t^-(\cdot), X_t^-(\cdot))). \tag{2.27}$$

Искомые $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ находятся, исходя из следующих уравнений:

$$\begin{gathered} T_0(t_0)X_0^{1/2}(t_0)L_tS_t'(\cdot,t_0)l_t(\cdot) = \lambda(\xi)T_0(\xi)X_0^{1/2}(\xi)A_1'(\xi+h)L_tS_t'(\cdot,\xi+h)l_t(\cdot) = \\ = \lambda(\tau)T(\tau)Q^{1/2}(\tau)B'(\tau)L_tS_t'(\cdot,\tau)l_t(\cdot), \\ \lambda(\tau) > 0,\ \lambda(\xi) > 0,\ \xi \in [t_0-h,t_0), \tau \in [t_0,t]. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Таким образом, каждому элементу $l_t(\cdot)$ из пространства H соответствуют значения $T_0(l_t(\cdot),\cdot)$, $T(l_t(\cdot),\cdot)$ и $X_t^-(l_t(\cdot),\cdot)$, при которых выполняется (2.27).

Теорема 28. *Множество достижимости есть объединение множеств эллипсоидального типа по всевозможным элементам $l_t(\cdot)$ из единичной сферы:*

$$X_t[\cdot] = \bigcup\{E(x_t^-(\cdot), X_t^-(l_t(\cdot),\cdot))|l_t(\cdot) \in H : \|l_t(\cdot)\| = 1\}.$$

Поскольку величины $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ в общем случае зависят от t, для вычисления внутренних оценок в другой момент времени, требуется заново решать систему (2.12)-(2.13).

Однако, если в качестве элемента $l_t(\cdot)$ взять $l_t^*(\cdot)$, определяемого соотношениями (2.21), то соотношения (2.28) на $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ примут следующий вид:

$$\begin{gathered} T_0(t_0)X_0^{1/2}(t_0)S'(t_1,t_0)l_0 = \lambda(\xi)T_0(\xi)X_0^{1/2}(\xi)A_1'(\xi+h)S'(t_1,\xi+h)l_0 = \\ = \lambda(\tau)T(\tau)Q^{1/2}(\tau)B'(\tau)S'(t_1,\tau)l_0, \\ \lambda(\tau) > 0,\ \lambda(\xi) > 0,\ \xi \in [t_0-h,t_0), \tau \in [t_0,t], \end{gathered}$$

что следует из выражения (2.22). Таким образом, величины $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ не зависят от t.

Значит, на отрезке времени $t \in [t_0, t_1]$ внутренние оценки, отвечающие соответствующим кривым $l_t^*(\cdot)$ (для которых выполняется (2.27)), можно вычислять рекуррентно, не пересчитывая заново решение дифференциального уравнения (2.12)-(2.13).

2.4 Внешние оценки.

Зафиксируем некоторый момент $t > t_0$.

Из (2.6) ([57]) следует что множество достижимости $X[t]$ можно представить как пересечение эллипсоидов.

$$X[t] = \bigcap(\mathcal{E}(x_+, X_+(t))|p(\cdot), p_0(\cdot))$$

$X_+(t)$ находится по формуле:

$$X_+(t) = (\int\limits_{t_0-h}^{t_0} p_0(\tau)d\tau + p_0(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau)\times$$
$$\times(\int\limits_{t_0-h}^{t_0} p_0^{-1}(\tau)S(t,\tau+h)A_1(\tau+h)X_0(\tau)A_1(\tau+h)S'(t,\tau+h)d\tau+$$
$$+p_0^{-1}(t_0)S(t,t_0)X_0(t_0)S'(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} p^{-1}(\tau)S(t,\tau)Q(\tau)S'(t,\tau)d\tau)$$

$x_+(t)$ находится по формуле:

$$x_+(t) = S(t,t_0)x_0(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} S(t,\tau)q(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} S(t,\tau+h)A_1(\tau+h)x_0(\tau)d\tau$$

То есть является решением системы

$$\dot{x}_+(\tau) = A_0(\tau)x_+(\tau) + A_1(\tau)x_+(\tau-h) + q(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1], \tag{2.29}$$

$$x_+(t_0) = x_0(t_0), \quad x_+(\tau) = x_0(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0). \tag{2.30}$$

Введем обозначения $Q(t_1, t_2)$ и $\Pi(t)$:

$$Q(t_1, t_2) =$$
$$= (\int\limits_{t_0-h}^{t_0} p_0^{-1}(\tau) S(t_1, \tau + h) A_1(\tau + h) X_0(\tau) A_1'(\tau + h) S'(t_2, \tau + h) d\tau +$$
$$+ p_0^{-1}(t_0) S(t_1, t_0) X_0(t_0) S'(t_2, t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} p^{-1}(\tau) S(t_1, \tau) Q(\tau) S'(t_2, \tau) d\tau),$$

$$\Pi(t) = \int\limits_{t_0-h}^{t_0} p_0(\tau) d\tau + p_0(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau, \text{ при } t \geq t_0.$$

Отсюда $X_+(t)$ можно представить в следующем виде:

$$X_+(t) = \Pi(t) Q(t, t).$$

Дифференциальное уравнение для $X_+(t)$ примет вид:

$$\begin{gathered} \dot{X}_+(t) = A_0(t) X_+(t) + X_+(t) A_0'(t) + \\ + \Pi(t)(A_1(t) Q(t-h, t) + Q'(t-h, t) A_1'(t)) + \pi^{-1}(t) Q(t) + \pi(t) X_+(t) \end{gathered} \tag{2.31}$$

где

$$\pi(t) = p(t)/\Pi(t) \tag{2.32}$$

при ограничениях

$$X_+(t_0) = X_0(t_0) \tag{2.33}$$

$$X_+(\tau) = X_0(\tau), \ \tau \in [t_0 - h, t_0) \tag{2.34}$$

Тогда $Q(t_1, t_2)$ можно вычислить с помощью дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial Q(t, \tau)}{\partial t} = A_0(t) Q(t, \tau) + A_1(t) Q(t - h, \tau) + p^{-1}(t) Q(t) S'(\tau, t) \tag{2.35}$$

при ограничениях:

$$Q(t_0, \tau) = p_0^{-1}(t_0) X_0(t_0) S'(\tau, t_0) \tag{2.36}$$

$$Q(\xi, \tau) = p_0^{-1}(\xi) X_0(\xi) A_1'(\xi + h) S'(\tau, \xi + h), \ \xi \in [t_0 - h, t_0) \tag{2.37}$$

Наложим условия касания внешней оценки и множества достижимости в некотором направлении l из $\mathbb{R}^n$. Для равенства опорных функции

$$\rho(l|X[t]) = \rho(l|\mathcal{E}(x_+, X_+(t))) \tag{2.38}$$

нужно ([57]) чтобы выполнялись следующие условия:

$$p(\tau) = \langle l, S(t,\tau) Q(\tau) S'(t,\tau) l \rangle^{1/2}, \ \tau \in (t_0, t]$$
$$p_0(\tau) = \langle l, S(t, \tau + h) A_1(\tau + h) X_0(\tau) A_1'(\tau + h) S'(t, \tau + h) l \rangle^{1/2}, \ \tau \in [t_0 - h, t_0)$$
$$p_0(t_0) = \langle l, S(t, t_0) X_0(t_0) S'(t, t_0) l \rangle^{1/2}$$

Таким образом, каждому вектору l из $\mathbb{R}^n$ соответствуют значения $p(l, \cdot)$, $p_0(l, \cdot)$, $p_0(l, t_0)$ и $X_+(l, t)$, при которых выполняется (2.38).

Теорема 29. *Множество достижимости есть пересечение эллипсоидов по всевозможным векторам l из единичной сферы:*

$$X[t] = \bigcap \{\mathcal{E}(x_+(t), X_+(l, t)) | l \in \mathbb{R}^n \ : \ \|l\| = 1\}.$$

Поскольку величины $p(l, \cdot)$, $p_0(l, \cdot)$, $p_0(l, t_0)$ в общем случае зависят от t, для вычисления внешних оценок в другой момент времени, требуется заново решать систему (2.31)-(2.34).

2.5 Пример.

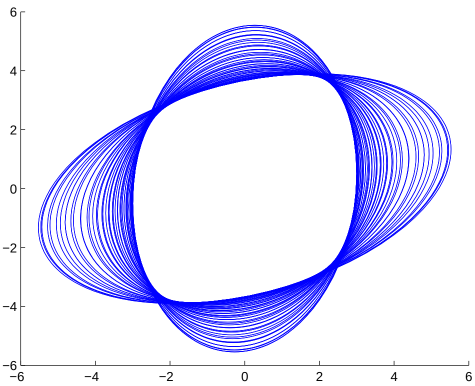
Проиллюстрируем графически формулы для оценки множества достижимости. Рассмотрим пример, введенный выше для иллюстрации внутренних оценок:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

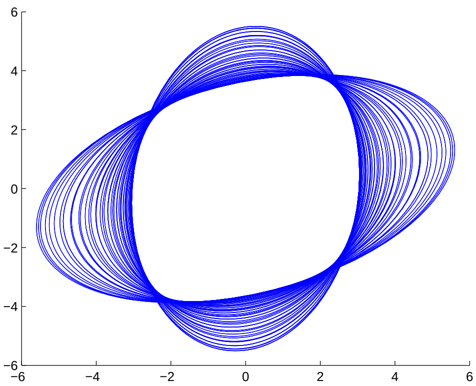
$$X_0(\tau) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \tau \in [t_0 - h, t_0], \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad n = 2.$$

И четыре случая, отличающиеся друг от друга величиной запаздывания h: h=0, h=0.01, h=0.1, h=0.3.

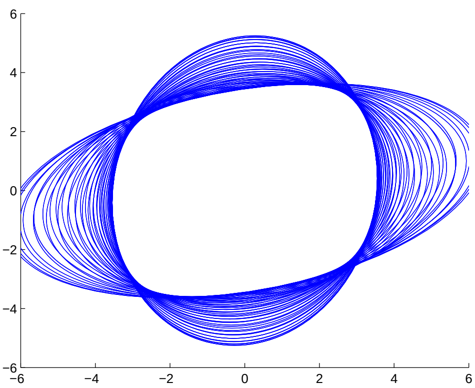
Рисунки демонстрируют внешние эллипсоидальные оценки множества достижимости в момент $t = t_1$. Пересечение эллипсоидов образует точное множество.



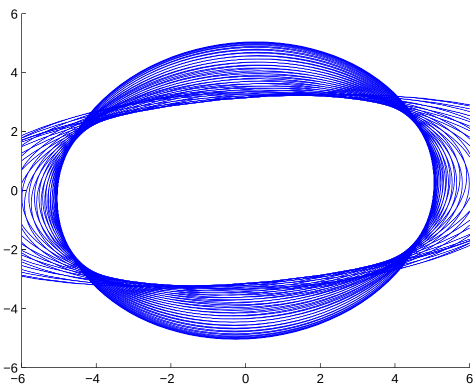
$h = 0$



$h = 0.01$



$h = 0.1$



$h = 0.3$

Глава 3

Аппроксимация системы с запаздыванием

В данной главе рассматриваются аппроксимации исходной системы с запаздыванием с помощью системы уравнений нейтрального типа и системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.1 Аппроксимация исходной системы уравнением нейтрального типа

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим систему нейтрального типа [5]:

$$\dot{x}(\tau) - \varepsilon\dot{x}(\tau - h) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1], \tag{3.1}$$

Данное уравнение разрешимо как в прямом времени с ограничением в начальный момент:

$$x_{t_0}(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0], \tag{3.2}$$

так и в обратном времени, с ограничением в конечный момент:

$$x_{t_1}(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0], \tag{3.3}$$

где $x^*(\tau)$ - абсолютно непрерывная функция на отрезке $[-h, 0]$.

Решение $x(t)$ данной системы выписывается последовательно на каждом промежутке длины h.

В прямом времени:

$$\begin{gathered} x(t) = S(t,t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} S(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_{t_0-h}^{t-h} S(t,\tau+h)A_1(\tau+h)x^0(\tau)d\tau + \\ +\varepsilon\left(x(t-h) - S(t,t_0)x(t_0-h) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial S(t,\tau)}{\partial\tau} x(\tau-h)d\tau\right), \\ t \in [t_0, t_0+h]. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $S(\cdot,\cdot)$ - решение сопряженной системы с опережением:

$$\frac{\partial S(t,\tau)}{\partial \tau} = -S(t,\tau)A_0(\tau) - S(t,\tau+h)A_1(\tau+h), \tag{3.5}$$

$$S(\tau,\tau) = I, \quad S(t,\tau) = 0, \text{ при } \; t < \tau. \tag{3.6}$$

В обратном времени:

$$\begin{gathered} x(t) = S(t_1-h,t)x(t_1-h) - \\ -\varepsilon^{-1} \int\limits_{t-h}^{t_1-h} S(\tau,t)B(\tau+h)u(\tau+h)d\tau - \\ -\varepsilon^{-1} \int\limits_{t+h}^{t_1} S(\tau-h,t)A_0(\tau-h)x(\tau)d\tau + \\ +\varepsilon^{-1}\left(x(t+h) - S(t_1-h,t)x(t_1) - \int\limits_{t}^{t_1-h} \frac{\partial S(\tau,t)}{\partial\tau} x(\tau+h)d\tau\right), \\ t \in [t_1-2h, t_1-h]. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Здесь $S(\cdot,\cdot)$ - решение сопряженной системы с запаздыванием:

$$\varepsilon \frac{\partial S(t,\tau)}{\partial t} = S(t,\tau)A_0(t) + S(t-h,\tau)A_1(t), \tag{3.8}$$

$$S(\tau,\tau) = I, \quad S(t,\tau) = 0, \text{ при } \ t < \tau. \tag{3.9}$$

В случае ограниченного начального множества $X_0(\cdot)$ непосредственно из выражения (3.4) следует, что решения этого уравнения равномерно сходятся к решениям системы (1.4), (1.6) на множестве $X_0(\cdot)$ при стремлении ε к нулю.

3.2 Аппроксимация исходной системы методом прямых

В данной главе рассмотрена аппроксимация системы с помощью метода прямых. Обобщен результат [25] на случай системы с управлением.

Рассмотрим линейную управляемую систему с запаздыванием (1.4)-(2.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ с ограниченным начальным условием

$$\|x_0(\cdot)\| \leq K_1. \tag{3.10}$$

Управление будем считать равномерно ограниченным для $\tau \in [t_0, t_1]$:

$$\|u(\tau)\| \leq K_2, \text{ если } u(\tau) \in P(\tau), \ \tau \in [t_0, t_1] \tag{3.11}$$

где $P(\tau)$ – непрерывная по метрике Хаусдорфа функция, значениями которой являются выпуклые компакты в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Известно [25], что систему (1.4)-(2.1) можно аппроксимировать системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{y}_0(t) = A_0(t)y_0(t) + A_1(t)y_m(t) + B(t)u(t), \\ \dot{y}_1(t) = \tfrac{m}{h}(y_0(t) - y_1(t)), \\ \ldots \\ \dot{y}_m(t) = \tfrac{m}{h}(y_{m-1}(t) - y_m(t)), \end{gathered} \tag{3.12}$$

где $y_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $i = 0,\ 1,\ ..., m$.

Начальные условия примут следующий вид:

$$y_0(t_0) = x_0(0), \quad y_i(t_0) = \frac{m}{h} \int\limits_{-ih/m}^{(-i+1)h/m} x_0(\tau)d\tau,\ i = 1,\ 2, ..., m. \tag{3.13}$$

Введем обозначение $y(t) \in \mathbb{R}^{nm}$:

$$y(t) = (y_0(t), y_1(t), ..., y_m(t)) \tag{3.14}$$

Справедлива следующая теорема (для системы без управления) [25] :

Теорема 30. *Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует число $M(\varepsilon, \delta)$ такое, что для любого $m > M(\varepsilon, \delta)$ равномерно по всем начальным функциям $x_0(\cdot)$, удовлетворяющим соответственно* (3.10), (3.11) *будет выполняться соотношение*

$$\|x(t - ih/m) - y_i(t)\|_{C[t_0+h+\delta, t_1]} < \varepsilon, i = 0,\ 1,\ ...,\ m. \tag{3.15}$$

Доказательство.

Докажем сначала, что если $y_0(\cdot)$ равномерно сходится к $x(\cdot)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, то есть для любых $\varepsilon > 0$, существует число $M(\varepsilon)$ такое, что для любого $m > M(\varepsilon)$ равномерно по всем начальным функциям $x_0(\cdot)$, удовлетворяющим соответственно (3.10), (3.11) будет выполняться соотношение

$$\|x(t) - y_0(t)\|_{C[t_0, t_1]} < \varepsilon \tag{3.16}$$

то для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует число $M(\varepsilon, \delta)$ такое, что для любого $m > M(\varepsilon, \delta)$ равномерно по всем начальным функциям $x_0(\cdot)$, удовлетворяющим соответственно (3.10), (3.11) будет выполняться соотношение

$$\|x(t - ih/m) - y_i(t)\|_{C[t_0+h+\delta, t_1]} < \varepsilon, i = 0,\ 1,\ ...,\ m. \tag{3.17}$$

Для упрощения выкладок положим $t_0 = 0$. Путем интегрирования системы (3.12) получаем в явном виде (по формуле Коши для линейной системы с постоянными коэффициентами) выражения для $y_i(\cdot)$ для $i = 1, ..., m$ через зависящие от функции $y_0(\cdot)$.

$$\begin{gathered} y_i(t) = \frac{m^i}{h^i(i-1)!} \int\limits_0^t y_0(\tau)(t-\tau)^{i-1} e^{-\frac{m}{h}(t-\tau)} d\tau + \\ + \textstyle\sum_{k=1}^{i} y_k(0) \frac{(\frac{m}{h}t)^{i-k}}{(i-k)!} e^{-\frac{m}{h}t} = I_i^1(t) + I_i^2(t). \end{gathered} \tag{3.18}$$

Зафиксируем произвольное $\delta_0 > 0$ и будем рассматривать $t > \delta_0$.

Рассмотрим следующие величины, присутствующие во втором слагаемом:

$$\frac{(\frac{m}{h}t)^{i-k}}{(i-k)!},\ k = 1, ..., i.$$

Заметим, что максимум по k этих величин в случае, когда $\frac{m}{h}t \geq i$ (или, что то же самое, $t \geq \frac{i}{m}h$) достигается при $k = 1$ и может быть ограничен сверху величиной при $k = 0$. Действительно, при $k \geq 1$ справедливо

$$\frac{(\frac{m}{h}t)^{i-k+1}}{(i-k+1)!} = \frac{(\frac{m}{h}t)^{i-k}}{(i-k)!} \times \frac{(\frac{m}{h}t)}{(i-k+1)} \geq \frac{(\frac{m}{h}t)^{i-k}}{(i-k)!}.$$

Таким образом, получаем следующую оценку

$$\begin{gathered} \|I_i^2(t)\| = \left\| \sum_{k=1}^{i} y_k(0) \frac{(\frac{m}{h}t)^{i-k}}{(i-k)!} e^{-\frac{m}{h}t} \right\| \leq \\ \leq \left(\sum_{k=1}^{i} \|y_k(0)\| \right) \frac{(\frac{m}{h}t)^i}{(i)!} e^{-\frac{m}{h}t} = \frac{m}{h} \int\limits_{-ih/m}^{0} \|x_0(\tau)\| d\tau \frac{(\frac{m}{h}t)^i}{(i)!} e^{-\frac{m}{h}t} \end{gathered}$$

Пусть норма начальных $x_0(\cdot)$ ограничена некоторой константой K

$$\int\limits_{-h}^{0} \|x_0(\tau)\| d\tau + \|x_0(0)\| \leq K. \tag{3.19}$$

Тогда продолжая цепочку неравенств получаем

$$\frac{m}{h}\int\limits_{-ih/m}^{0} \|x_0(\tau)\| d\tau \frac{(\frac{m}{h}t)^i}{(i)!} e^{-\frac{m}{h}t} \leq K\frac{m}{h}\frac{(\frac{m}{h}t)^i}{(i)!} e^{-\frac{m}{h}t}$$

Зафиксируем $\alpha \in (0,1]$. Пусть $t = \alpha h + \delta$, где $\delta \geq \delta_0$. И рассмотрим при фиксированном m такие i, что $i/m \leq \alpha$. В этом случае выполнено $t \geq \frac{i}{m}h$. При этом для всех таких i справедлива оценка

$$K\frac{m}{h}\frac{(\frac{m}{h}t)^i}{(i)!} e^{-\frac{m}{h}t} \leq K\frac{m}{h}\frac{(\frac{m}{h}t)^{[\alpha m]}}{[\alpha m]!} e^{-\frac{m}{h}t}$$

И так как $[\alpha m]$ стремится к бесконечности при стремлении m к бесконечности, то для выражения факториала можно применить формулу Стирлинга.

Получаем

$$K\frac{m}{h}\frac{(\frac{m}{h}t)^{[\alpha m]}}{[\alpha m]!} e^{-\frac{m}{h}t} = K\frac{m}{h}\frac{(\frac{m}{h}t)^{[\alpha m]}}{[\alpha m]^{[\alpha m]}\sqrt{2\pi[\alpha m]}e^{-[\alpha m]+\theta_{[\alpha m]}}} e^{-\frac{m}{h}t} = \{t = \alpha h + \delta\} =$$

$$= \frac{Km}{h\sqrt{2\pi([\alpha m]}e^{\theta_{[\alpha m]}}} \times \frac{(\frac{m}{h}(\alpha h + \delta))^{[\alpha m])} e^{-\frac{m}{h}(\alpha h+\delta)}}{([\alpha m]^{[\alpha m]}e^{-[\alpha m]})} \leq$$

$$\leq \frac{Km}{h\sqrt{2\pi(\alpha m - 1)}e^{\theta_{[\alpha m]}}} \times \frac{(\frac{m}{h}(\alpha h + \delta))^{(\alpha m+1)} e^{-\frac{m}{h}(\alpha h+\delta)}}{(\alpha m - 1)^{(\alpha m-1)}e^{-(\alpha m+1)}} =$$

$$= \frac{Kme^1\left(\alpha + \frac{\delta}{h}\right)(\alpha m - 1)^2}{h\sqrt{2\pi(\alpha m - 1)}} \times \frac{(\alpha - \frac{1}{m})}{\left(1 - \frac{1}{\alpha m}\right)^{\alpha m} e^{\theta_{[\alpha m]}}} \times \left(\frac{\left(1 + \frac{\delta}{\alpha h}\right)^{\alpha}}{e^{\frac{\delta}{h}}}\right)^m$$

Так как уравнение рассматривается на конечном интервале времени, то δ можно ограничить сверху величиной t_1.

Первый множитель в полученном выражении имеет порядок роста при m стремящемся к бесконечности равным $m^{2,5}$ равномерно по всем $\delta \in [\delta_0, t_1]$.

Второй множитель стремится к числу αe. Третий сомножитель можно ограничить сверху равномерно по всем $\delta \in [\delta_0, t_1]$ показательной функций с показателем меньше единицы. Действительно,

$$\left(\frac{\left(1+\frac{\delta}{\alpha h}\right)^{\alpha}}{e^{\frac{\delta}{h}}}\right) \le \left(\frac{\left(1+\frac{\delta_0}{\alpha h}\right)^{\alpha}}{e^{\frac{\delta_0}{h}}}\right) < 1$$

В чем несложно убедиться посчитав производную левой части по δ,

$$\left(\frac{\left(1+\frac{\delta}{\alpha h}\right)^{\alpha}}{e^{\frac{\delta}{h}}}\right)'_{\delta} = \frac{e^{\frac{\delta}{h}}(1+\frac{\delta}{\alpha h})^{\alpha-1}(1-1-\frac{\delta}{\alpha h})}{he^{2\frac{\delta}{h}}} = \frac{e^{\frac{\delta}{h}}(1+\frac{\delta}{\alpha h})^{\alpha-1}(-\frac{\delta}{\alpha h})}{he^{2\frac{\delta}{h}}} \tag{3.20}$$

которая будет отрицательной при $\delta > 0$:

Соответственно произведение всех трех сомножителей будет стремиться к нулю при m стремящейся к бесконечности равномерно по $\delta \in [\delta_0, t_1]$.

Таким образом, для любых положительных чисел $\varepsilon > 0$, $\delta_0 > 0$, $\alpha > 0$ существует число $M(\varepsilon, \delta_0, \alpha)$ такое, что для любого $t \in (\alpha h + \delta_0, t_1]$, для любых $m > M(\varepsilon, \delta_0, \alpha)$ для любых натуральных i, таких, что $i \le \alpha m$ следует, что $\|I_i^2(t)\| < \varepsilon$ равномерно по всем начальным распределениям удовлетворяющим (3.19).

Рассмотрим первое слагаемое в (3.18).

$$I_i^1(t) = \frac{m^i}{h^i(i-1)!}\int\limits_0^t y_0(\tau)(t-\tau)^{i-1}e^{-\frac{m}{h}(t-\tau)}d\tau = \int\limits_0^t y_0(\tau)\tilde{I}_i^1(\tau)d\tau$$

Зафиксируем $\alpha_0 \in (0,1]$. Пусть $t = \alpha_1 h + \delta$, где $1 \ge \alpha_1 \ge \alpha_0$, $\delta \ge \delta_0$.

И рассмотрим при фиксированном m такие i, что $\alpha_0 \le i/m \le \alpha_1$. Заметим во-первых, что любой индекс i можно представить в виде $i = [\alpha m]$, где $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. При этом $\alpha m = [\alpha m] - \varkappa_m$, где $\varkappa_m \in [0,1)$.

Рассмотрим функцию стоящую под интегралом

$$\tilde{I}_i^1(\tau) = \frac{m^{(\alpha m-\varkappa_m)}}{h^{(\alpha m-\varkappa_m)}(\alpha m-\varkappa_m-1)!}(\alpha_1 h+\delta-\tau)^{(\alpha m-\varkappa_m-1)}e^{-\frac{m}{h}(\alpha_1 h+\delta-\tau)} = \tag{3.21}$$

$$= \{\text{применяем формулу Стирлинга}\} =$$

$$= \frac{m^{\alpha m}}{h^{\alpha m}} \frac{h^{\varkappa_m}}{m^{\varkappa_m}} \times$$

$$\times \frac{(\alpha m - \varkappa_m) e^{(\alpha m - \varkappa_m - \theta_{[\alpha m]})}}{(\alpha m - \varkappa_m)^{(\alpha m - \varkappa_m)} \sqrt{2\pi(\alpha m - \varkappa_m)}} (\alpha_1 h + \delta - \tau)^{(\alpha m - \varkappa_m - 1)} e^{-\frac{m}{h}(\alpha_1 h + \delta - \tau)} =$$

$$= \left(\frac{m^{\alpha m} (\alpha m) e^{\alpha m}}{h^{\alpha m} (\alpha m)^{(\alpha m)} \sqrt{2\pi \alpha m}} (\alpha_1 h + \delta - \tau)^{(\alpha m)} e^{-\frac{m}{h}(\alpha_1 h + \delta - \tau)} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{h^{\varkappa_m}}{m^{\varkappa_m}} \frac{(\alpha m - \varkappa_m) \sqrt{\alpha m} e^{-\varkappa_m - \theta_{\alpha m}} (\alpha m)^{(\alpha m)}}{(\alpha m) \sqrt{2\pi(\alpha m - \varkappa_m)} (\alpha m - \varkappa_m)^{(\alpha m - \varkappa_m)}} (\alpha_1 h + \delta - \tau)^{(-\varkappa_m - 1)} \right) =$$

$$\sqrt{\frac{\alpha m}{2\pi}} \left(\frac{\left(1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha)h + \delta - \tau}{\alpha h}\right)^{\alpha}}{e^{\frac{(\alpha_1 - \alpha)h + \delta - \tau}{h}}} \right)^m \times$$

$$\times \frac{h^{\varkappa_m}}{m^{\varkappa_m}} \frac{(\alpha m - \varkappa_m)\sqrt{\alpha m}}{(\alpha m)\sqrt{\alpha m - \varkappa_m}} e^{-\varkappa_m - \theta_{\alpha m}} \left(1 + \frac{\varkappa_m}{\alpha m - \varkappa_m}\right)^{\alpha m - \varkappa_m} (\alpha m)^{\varkappa_m} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha)h + \delta - \tau}{\alpha h}\right)^{(-\varkappa_m - 1)} (\alpha h)^{(-\varkappa_m - 1)} =$$

$$= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m}{2\pi\alpha}} \left(\frac{\left(1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha)h + \delta - \tau}{\alpha h}\right)^{\alpha}}{e^{\frac{(\alpha_1 - \alpha)h + \delta - \tau}{h}}} \right)^m \times$$

$$\times \frac{(\alpha m - \varkappa_m)\sqrt{\alpha m}}{(\alpha m)\sqrt{\alpha m - \varkappa_m}} e^{-\varkappa_m - \theta_{\alpha m}} \left(1 + \frac{\varkappa_m}{\alpha m - \varkappa_m}\right)^{\alpha m - \varkappa_m} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha)h + \delta - \tau}{\alpha h}\right)^{(-\varkappa_m - 1)}$$

Зафиксируем некоторое положительное число δ_1 такое, что $min\{\delta_0, \alpha_0 h\} > \delta_1 > 0$. Тогда интеграл можно разбить на три интеграла.

$$\int\limits_0^{\alpha_1 h + \delta} = \int\limits_0^{\alpha_1 h + \delta - \alpha h - \delta_1} + \int\limits_{\alpha_1 h + \delta - \alpha h - \delta_1}^{\alpha_1 h + \delta - \alpha h + \delta_1} + \int\limits_{\alpha_1 h + \delta - \alpha h + \delta_1}^{\alpha_1 h + \delta}$$

Оценим по модулю первый и третий интегралы. Так как $y_0(\tau)$ равномерно ограничена при всех $\tau \in [0, t_1]$ и m некоторой константой K_0, то подынтегральная функция равномерно при всех $\delta > \delta_0$ и при всех $\alpha \in [\alpha_0 \alpha_1]$ может быть оценена в каждом из двух случаев произведением показательной функцией с основанием меньше единицы (оцениваем скобку в первом сомножителе согласно (3.20)) и полинома. Следовательно, эти два интеграла равномерно сходятся к нулю.

Второй же интеграл можно с любой точностью равномерно приблизить к величине $y_0(\alpha_1 h + \delta - \alpha h)$. Действительно, разложив по формуле Тейлора в точке $\alpha_1 h + \delta - \alpha h$ выражение, стоящее в первом множителе получаем

$$\left(\frac{\left(1-\frac{\tau}{\alpha h}\right)^{\alpha}}{e^{-\frac{\tau}{h}}}\right)^m = \left(1 - \frac{\tau^2}{h^2 2\alpha} + o(\tau^2)\right)^m = \left(e^{-\frac{\tau^2}{h^2 2\alpha}} + o(\tau^2)\right)^m$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ_1, что для любого $\tau \in [-\delta_1, \delta_1]$ функцию в скобке можно равномерно оценить сверху и снизу:

$$e^{-\frac{\tau^2}{(1-\varepsilon)^2 h^2 2\alpha}} \le \left(\frac{\left(1-\frac{\tau}{\alpha h}\right)^{\alpha}}{e^{-\frac{\tau}{h}}}\right) \le e^{-\frac{\tau^2}{(1+\varepsilon)^2 h^2 2\alpha}} \tag{3.22}$$

Таким образом, предел второго интеграла будет лежать в диапазоне $[(1-\varepsilon)y_0(\xi), (1+\varepsilon)y_0(\xi)]$, где точка ξ лежит в δ_1-окрестности точки $\alpha_1 h + \delta - \alpha h$.

Осталось рассмотреть $i \in [1, [\alpha_0 m]]$. Применяя теорему о среднем получаем, и интегрируя выражение для вычисления y_i через y_{i-1} получаем, что нормы соседних функций отличаются на величину не превосходящую $Ke^{-\frac{m}{h}\delta_0}$. Таким образом, чтобы обеспечить для всех y_i чтобы они отстояли друг от друга на величину ε нужно потребовать, чтобы

$$\alpha_0 m K e^{-\frac{m}{h}\delta_0} < \varepsilon$$

что достигается при достаточно больших m.

Таким образом сначала фиксируем M_0 при которой y_0^m с точностью до ε приближается к y_0. После фиксируется α_0 $y_0(x_1)-y_0(x_2)<\varepsilon$ при $\|x_1-x_2|<\alpha_0 h$ После этого фиксируем $\delta_1 : min\{\delta_0, \alpha_0 h\} > \delta_1 > 0$ для которого справедлива оценка (3.22). Также δ_1 берется таким, чтобы сомножители не входящие в предел по m были близки к 1 с точностью до ε. После определяются все M и берется максимальное значения чтобы все интегралы сходились с требуемой точностью.

Рассмотрим интегральные уравнения для системы с запаздыванием и аппроксимирующей ее системы.

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t A_0(\tau)x(\tau)d\tau + \int\limits_0^t A_1(\tau)x(\tau-h)d\tau + \int\limits_0^t B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$y_0(t) = y_0(0) + \int\limits_0^t A_0(\tau)y_0(\tau)d\tau + \int\limits_0^t A_1(\tau)y_m(\tau)d\tau + \int\limits_0^t B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Пусть $t > h$. Тогда в первом уравнении второй интеграл в правой части можно выразить следующим образом

$$\int\limits_0^t A_1(\tau)x(\tau-h)d\tau = \int\limits_0^h A_1(\tau)x_0(\tau-h)d\tau + \int\limits_h^t A_1(\tau)x(\tau-h)d\tau.$$

Соответствующий интеграл в аппроксимирующем уравнении:

$$\int\limits_0^t A_1(\tau)y_m(\tau)d\tau = \int\limits_0^h A_1(\tau)y_m(\tau)d\tau + \int\limits_h^t A_1(\tau)y_m(\tau)d\tau$$

Заметим, что так как функции $y_m(t)$ будут равномерно ограничены при всех $t \in [0, t_1]$ и m, то функции $y_0(t)$ будут равномерно ограничены и равномерно липшицевы при всех m на множестве $t \in [0t_1]$. Поэтому для любых

$\varepsilon > 0,\ \delta > 0$ при $t > h + \delta$ следует

$$y_m(t) = y_0(t-h) + o_1(t),\ \text{где } \|o_1(t)\| < \varepsilon.$$

Рассмотрим выражение для $y_m(t)$.

$$\begin{gathered} y_m(t) = \frac{m^m}{h^m(m-1)!}\int\limits_0^t y_0(\tau)(t-\tau)^{m-1}e^{-\frac{m}{h}(t-\tau)}d\tau + \\ + \sum_{k=1}^m y_k(0)\frac{(\frac{m}{h}t)^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\frac{m}{h}t} = I_m^1(t) + I_m^2(t). \end{gathered} \tag{3.23}$$

Рассмотрим первый интеграл

$$\begin{gathered} I_m^1(t) = \{\text{формула Стирлинга}\} = \\ = \frac{m}{\sqrt{2\pi m}he^{\theta_m}}\int\limits_0^t y_0(\tau)\left(\frac{t-\tau}{h}e^{1-\frac{t-\tau}{h}}\right)^{m-1}e^{1-\frac{t-\tau}{h}}d\tau \end{gathered}$$

При $t < h - \delta$ выражение стоящее в скобках под интегралом можно оценить сверху величиной строго меньше единицы:

$$\left(\frac{t-\tau}{h}e^{1-\frac{t-\tau}{h}}\right) < 1$$

Поэтому все выражение равномерно сходится к нулю. При $t \in [h-\delta, h+\delta]$ данное выражение равномерно ограничено. Выбирая изначально δ достаточно малым можно сделать вывод, что

$$\int\limits_0^h A_1(\tau)y_m(\tau)d\tau = \int\limits_0^h A_1(\tau)I_m^2(\tau)d\tau + o_2,\ \|o_2\| < \varepsilon$$

Учитывая условия (3.13), получаем

$$\int\limits_0^h A_1(t)I_m^2(t)dt = \int\limits_0^h A_1(t)\int\limits_{-h}^0 x_0(\tau)c(t,\tau)d\tau dt$$

Где

$$c(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{m}{h}\dfrac{(\frac{m}{h}t)^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\frac{m}{h}t}, \tau \in [-\dfrac{kh}{m}, -\dfrac{(k-1)h}{m}], \\ 0, \text{ при остальных } \tau \end{cases}$$

Меняем местами порядок интегрирования, получаем:

$$\int\limits_{-h}^{0} x_0(\tau) \int\limits_{-h}^{0} A_1(t)x_0(\tau)c(t,\tau)dtd\tau$$

Оценивая внутренний интеграл, аналогично (3.21) получаем:

$$\int\limits_{-h}^{0} A_1(t)x_0(\tau)c(t,\tau)dt = A_1(\tau+h)x(\tau) + o_1(\tau)$$

В случае если $t < h$, вместо интеграла от 0 до h появится интеграл от 0 до t. Все остальные рассуждения аналогичны.

Таким образом, имеем для аппроксимирующей функции интегральное уравнение.

$$y_0(t) = y_0(0) + \int\limits_0^t A_0(\tau)y_0(\tau)d\tau + \int\limits_0^t A_1(\tau)(y_0(\tau-h) + o_1(\tau))d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t B(\tau)u(\tau)d\tau + o(t,\delta)$$

Где

$$y_0(\tau-h) = x_0(\tau-h), \text{ при } t \in (0,h)$$

Которое отличается от исходного уравнения на величину не превосходящую любую наперед заданную при стремлении m к бесконечности. Из чего можно сделать вывод, (например используя лемму Гроноулла-Беллмана) что $y_0(t)$ равномерно сходится к $x(t)$.

3.3 Аппроксимация исходной системы методом прямых для случая постоянных коэффициентов

Рассмотрим линейную управляемую систему с запаздыванием.

$$\dot{x}(t) = Ax(t-h) + Bu(t), t \in [0, t_1] \tag{3.24}$$

$$x(0) = x_0,\ x(\tau) = x_0(\tau),\ \tau \in [-h, 0). \tag{3.25}$$

Рассмотрим ее аппроксимацию:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= Ay_m(t) + Bu(t), \\ \dot{y}_1(t) &= \tfrac{m}{h}(y_0(t) - y_1(t)), \\ &\dots \\ \dot{y}_m(t) &= \tfrac{m}{h}(y_{m-1}(t) - y_m(t)), \end{aligned} \tag{3.26}$$

где $y_i(t) \in \mathbb{R}^n,\ i = 0,\ 1,\ ..., m$.

С начальными условиями:

$$y_0(0) = y_0^0 = x_0, \quad y_i(t_0) = y_i^0 = \frac{m}{h} \int\limits_{-ih/m}^{(-i+1)h/m} x_0(\tau)d\tau,\ i = 1,\ 2, ..., m. \tag{3.27}$$

Обозначим за $X(p),\ Y_0(p),\ Y_1(p),...,\ Y_m(p),\ U(p)$ изображения преобразования Лапласа от соответствующих функций $x(t),\ y_0(t),\ y_1(t),...,\ y_m(t),$

$u(t)$:

$$\begin{aligned} X(p) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} x(\tau) d\tau, \\ Y_0(p) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} y_0(\tau) d\tau, \\ Y_1(p) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} y_1(\tau) d\tau, \\ &\dots \\ Y_m(p) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} y_m(\tau) d\tau, \\ U(p) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} u(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Заметим, что решения систем (3.24), (3.25) и (3.26), (3.27) растут не быстрее экспоненты. Следовательно, существует такое положительное число P_0, что при $p > P_0$ справедливы следующие выражения

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to\infty} e^{-p\tau} x(\tau) &= 0, \\ \lim_{\tau\to\infty} e^{-p\tau} y_0(\tau) &= 0, \\ \lim_{\tau\to\infty} e^{-p\tau} y_1(\tau) &= 0, \\ &\dots \\ \lim_{\tau\to\infty} e^{-p\tau} y_m(\tau) &= 0 \\ \lim_{\tau\to\infty} e^{-p\tau} u(\tau) &= 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Применим преобразование Лапласа к обеим системам (учитывая (3.29)).

$$pX(p) = x_0 + e^{-ph} A \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} x_0(\tau - h) d\tau e^{-ph} A + U(p). \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} pY_0(p) &= AY_m(p) + BU(p), \\ pY_1(p) &= y_1^0 + \tfrac{m}{h}(Y_0(p) - Y_1(p)), \\ &\dots \\ pY_m(p) &= y_m^0 + \tfrac{m}{h}(Y_{m-1}(p) - Y_m(p)), \end{aligned} \tag{3.31}$$

Проведя элементарные преобразования, получаем следующие выражения:

$$X(p) = (pI - e^{-ph}A)^{-1}(x_0 + \int\limits_{-h}^{0} e^{-p(\tau+h)}Ax_0(\tau)d\tau + U(p)). \tag{3.32}$$

$$Y_0(p) =$$
$$= \left(pI - \frac{\left(\frac{m}{h}\right)^m}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^m}A\right)^{-1} \left(y_0^0 + A\left(\frac{y_m^0}{p+\frac{m}{h}} + \frac{y_{m-1}^0\frac{m}{h}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^2} + \ldots\frac{y_1^0\left(\frac{m}{h}\right)^{m-1}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^m}\right) + U(p)\right). \tag{3.33}$$

$$Y_1(p) = \frac{y_1^0}{p+\frac{m}{h}} + \frac{Y_0(p)\frac{m}{h}}{p+\frac{m}{h}}$$
$$Y_2(p) = \frac{y_2^0}{p+\frac{m}{h}} + \frac{y_1^0\frac{m}{h}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^2} + \frac{Y_0(p)\left(\frac{m}{h}\right)^2}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^2} \tag{3.34}$$
$$Y_m(p) = \frac{y_m^0}{p+\frac{m}{h}} + \frac{y_{m-1}^0\frac{m}{h}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^2} + \ldots\frac{y_1^0\left(\frac{m}{h}\right)^{m-1}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^m} + \frac{Y_0(p)\left(\frac{m}{h}\right)^m}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^m}$$

Заметим, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{h}\right)^m}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^m} = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{ph}{ph+m}\right)^m = e^{-ph}. \tag{3.35}$$

$$\left(\frac{y_m^0}{p+\frac{m}{h}} + \frac{y_{m-1}^0\frac{m}{h}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^2} + \ldots\frac{y_1^0\left(\frac{m}{h}\right)^{m-1}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^m}\right) =$$
$$\frac{\frac{m}{h}}{p+\frac{m}{h}}\left(\frac{h}{m}\right)\left(y_m^0 + y_{m-1}^0\frac{\frac{m}{h}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)} + \ldots y_1^0\frac{\left(\frac{m}{h}\right)^{m-1}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^{m-1}}\right) \tag{3.36}$$

В силу (3.27), (3.35) можно утверждать о следующей сходимости:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{m}{h}}{p+\frac{m}{h}}\left(\frac{h}{m}\right)\left(y_m^0 + y_{m-1}^0\frac{\frac{m}{h}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)} + \ldots y_1^0\frac{\left(\frac{m}{h}\right)^{m-1}}{\left(p+\frac{m}{h}\right)^{m-1}}\right) =$$
$$= \int\limits_{-h}^{0} e^{-p(\tau+h)}x_0(\tau)d\tau \tag{3.37}$$

Соответственно сходятся друг к другу выражения (3.32), (3.33) изображений $X(p)$ и $Y_0(p)$

3.4 Регуляризация задачи синтеза

Рассмотрим линейную управляемую систему с запаздыванием (1.4)-(2.1) на отрезке $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0 + h$. Зафиксируем целевое ограниченное множество $\mathcal{M}(\cdot)$ из пространства $C[-h, 0]$. Не ограничивая общности, считаем, что $0_C \in int\ \mathcal{M}(\cdot)$. Зафиксируем равномерно ограниченное множество управлений вида (1.5). Не ограничивая общности, считаем, что $0 \in int\ P(\tau)$.

Фиксируем ε - требуемую точность попадания на целевое множество. Фиксируем параметр регуляризации K_1- максимально допустимую норму начальной функции.

Согласно теореме 30 существует число m, обеспечивающее точность аппроксимации $\varepsilon/2$. Для этого m строим систему (3.12) с ограничением на правом конце:

$$y(t_1) \in \mathcal{M}_m. \tag{3.38}$$

Множество $\mathcal{M}_m$ строится по множеству $\mathcal{M}(\cdot)$ таким образом, что для любого вектора $y \in \mathcal{M}_m$, построенная из него ломаная $\tilde{y}(\cdot) \in C[-h, 0]$ будет лежать на расстоянии от множества $\mathcal{M}(\cdot)$ в пространстве $C[-h, 0]$ не более чем $\varepsilon/2$:

$$d(\tilde{y}(\cdot), \mathcal{M}(\cdot)) \leq \varepsilon/2. \tag{3.39}$$

После этого строим множество разрешимости $W_m[t]$ системы. Пропорционально уменьшая целевое множество $\mathcal{M}_m$ и множество управлений, в силу ограниченности множества разрешимости линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно добиться условия $W_m[t_0] \leq K_1$. Вместо этого можно взять в качестве искомого множеста пересечение множества разрешимости с шаром радиуса K_1, тем самым гарантируя выполнения ограничения на максимальную норму начальной функции.

Таким образом, если двигаться из такого множества разрешимости в силу системы (3.12) при любом управлении, удовлетворяющем ограничению, то в момент t_1 соответствующая ломаная $\tilde{y}$ будет аппроксимировать реальное решение системы (1.4) с любым начальным условием, удовлетворяющим (3.13)) с точностью $\varepsilon/2$. А построенный синтез для обыкновенной системы на множество $\mathcal{M}_m$ будет обеспечивать попадание на множество $\mathcal{M}(\cdot)$ решения системы (1.4) с точностью до ε.

Глава 4

Управление аппроксимирующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

В данной главе рассмотрены методы управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей систему с запаздыванием. Основные методы и выражения, используемые в данной главе, опубликованы в работе [62].

4.1 Метод динамического программирования

Определив порядок m для аппроксимации системы с запаздыванием системой обыкновенных дифференциальных уравнений методом прямых получаем следующую систему.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_0(t)u(t) \tag{4.1}$$

Где матрицы $A(t) \in \mathbb{R}^{(m+1)n\times(m+1)n}$, а $B(t) \in \mathbb{R}^{(m+1)n\times n}$ определяются следующим образом

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_0(t) & \Theta & \Theta & ... & \Theta & A_1(t) \\ \frac{m}{h}I & -\frac{m}{h}I & \Theta & ... & \Theta & \Theta \\ \Theta & \frac{m}{h}I & -\frac{m}{h}I & ... & \Theta & \Theta \\ . & . & . & ... & . & . \\ \Theta & \Theta & \Theta & ... & \frac{m}{h}I & -\frac{m}{h}I, \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$B_0(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ \Theta \\ ... \\ \Theta \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где Θ и I - соответственно нулевая и единичная квадратные матрицы размерности $n \times n$.

Ограничение на управление остаются преждними (3.11).

Целевое множество $\mathcal{M}$ строится согласно (3.39).

Для решения задачи управления можно воспользоваться методом динамического программирования.

Для этого вводится функция цены

$$V(t,x) = \min_{u} d^2(x(t_1), \mathcal{M}). \tag{4.4}$$

Которую можно аналитически выписать используя аппарат выпуклого анализа [56]

$$\begin{aligned} V(t,x) = \max_{l}\{\langle X(t_1,t)x, l\rangle - \int\limits_{t}^{t_1} \rho\,(-B_0'(\tau)X'(t_1,\tau)l|\,P(\tau))\,d\tau - \\ -\rho\,(l|\,\mathcal{M}) - 1/4\,\langle l,l\rangle\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Данная функция цены удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \min_{u\in P(t)} \left\langle \frac{\partial V(t,x}{\partial x}, A(t)x + B_0(t)u \right\rangle \tag{4.6}$$

$$V(t_1,x)t = d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \tag{4.7}$$

Требуемый синтез управления здесь состоит из минимизаторов u в (4.6)

$$U(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in P(t)} \left\langle B_0'(t)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, u \right\rangle.$$

Для упрощения вычислений заметим, что функция цены может быть выражена через множество разрешимости $W[t]$. Применяя методы выпуклого анализа, получаем [56]:

$$V(t,x) = d^2(X(t_1,t)x, X(t_1,t)W[t]). \tag{4.8}$$

Где $X(t_1,t)$ фундаментальная матрица системы (4.1):

$$\frac{\partial X(t,\tau)}{\partial t} = A(t)X(t,\tau),$$

$$X(\tau,\tau) = I.$$

$$\begin{aligned} V(t,x) = \max_{l}\{\langle X'(t_1,t)l, x\rangle - \rho\,(X'(t_1,t)l|\,W[t]) - \frac{1}{4}\,\langle l,l\rangle\} = \\ = \max_{l}\{\langle l,x\rangle - \rho\,(l|\,W[t]) - \frac{1}{4}\,\langle X'(t,t_1)l, X'(t,t_1)l\rangle\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

В силу сильной выпуклости максимизатор единственный, поэтому можно выразить полную производную функции цены, используя теорему о дифференцировании функции максимума [9]. Пусть l^0 единственный максимизатор в выражении (4.9), тогда производная

$$\frac{dV(t,x(t))}{dt} = \left\langle l^0, A(t)x(t) + B_0(t)u(t)\right\rangle - \frac{d}{dt}\rho\left(l^0 \middle| W[t]\right) - \\ -\frac{d}{dt}\frac{1}{4}\left\langle X(t,t_1)'l^0, X(t,t_1)l^0\right\rangle .$$

Поэтому

$$U(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in P(t)} \left\langle B_0'(t)l^0, u\right\rangle . \tag{4.10}$$

Заметим, что стратегия управления $U(t,x)$ является многозначным отображением, поэтому, уравнение (4.1) превращается в дифференциальное включение

$$\dot{x}(\tau) \in A(\tau)x(\tau) + B_0(\tau)U(t,x(\tau)), \quad \tau \in [t_0,t_1], \tag{4.11}$$

Но поскольку размерность системы велика, данные выражения, несмотря на свой явный вид, обладают большой вычислительной сложностью. Но если заменить точное множество $W[t]$ на его внутреннюю эллипсоидальную оценку $W_[t]$ то выражения существенно упростятся.

Вывод уравнений эллипсоидальной аппроксимации [56, 57], основан на *эволюционном уравнении* для множества разрешимости и его аппроксимаций:

$$\lim_{\sigma\to 0+} \sigma^{-1} h_+(W[t-\sigma], (I-\sigma A)W[t] - \sigma B(t)P(t)) = 0, \tag{4.12}$$

с конечным условием $W[t_1] = \mathcal{M}$. Здесь $h_+(X,Y) = \min\{r > 0 | X \subseteq Y + B_r(0)\}$ — полуметрика Хаусдорфа в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^{(m+1)n}$. Наибольшее по включению решение (4.12) совпадает со множеством разрешимости $W[t]$.

Для целей синтеза управлений важно следующее свойство решений эволюционного уравнения [56]:

Теорема 31. *Пусть* $Z[t]$ *— такое решение эволюционного уравнения* (4.12)*, что функция* $\rho\,(l|\,Z[t])$ *дифференцируема по* t *для любого* $l \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$. *Тогда функция*

$$Z(t,x) = d^2(X(t_1,t)x, X(t_1,t)Z[t])$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\min_{u\in P(t)} \frac{dZ(t,x(t))}{dt} = Z_t + \min_{u\in P(t)} \langle Z_x, A(t)x+u\rangle \leq 0. \tag{4.13}$$

Как следствие (4.13) выполняется следующее свойство позиционного управления, определённого как множество минимизаторов в (4.13):

$$U_Z(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in P(t)} \langle Z_x, B(t)u\rangle. \tag{4.14}$$

Если начальная точка $x(t_0)$ траектории дифференциального включения (4.11) находится внутри $Z[t_0]$, то остальная часть траектории также лежит в трубке. $Z[t_0]$. Последнее верно, поскольку расстояние от $x(t)$ до $Z[t]$ является невозрастающей функцией.

Следовательно, если внутренняя аппроксимация множества разрешимости является решением эволюционного уравнения, то позиционная стратегия (4.14) решает задачу целевого управления на множество $\mathcal{M}$ для всех начальных состояний из $Z[t_0]$. При этом управление может быть вычислено по формулам (4.9)–(4.10) с заменой $W[t]$ на $Z[t]$. Такую стратегию управления можно интерпретировать как "прицеливание" на трубку $Z[t]$.

4.2 Эллипсоидальный синтез

Наложим на множество управления и целевое множество эллипсоидальные ограничения.

$$u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)) \tag{4.15}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}(x_1, X_1). \tag{4.16}$$

В этом случае множество разрешимости представимо в виде [57]

$$W[t] = \bigcup_{\|l_0\|=1} \{\mathcal{E}(x_-(t), X_-(t))\} \tag{4.17}$$

$$\begin{gathered} \dot{x}_-(t) = A(t)x_-(t) + B_0(t)p(t), \\ x_-(t_1) = x_1; \end{gathered} \tag{4.18}$$

$$\begin{gathered} X_-(t) = Q^*(t)'Q^*(t), \\ \dot{Q}^*(t) = Q(t)A(t) - S(t)[B_0(t)P(t)B_0'(t)]^{1/2}, \\ Q^*(t_1) = X_1^{1/2} \end{gathered} \tag{4.19}$$

$$S(t)(B_0(t)P(t)B_0'(t))^{1/2}l^*(t) = \lambda(t)X_-^{1/2}l^*(t), \quad S^T(t)S(t) = I.$$

Дифференциальное уравнение для функции $X_-(t)$ примет вид

$$\begin{gathered} \dot{X}_-(t) = AX_-(t) + X_-(t)A^T + \\ +X_-^{1/2}(t)S(t)(B_0(t)P(t)B_0'(t))^{1/2} + (B_0(t)P(t)B_0'(t))^{1/2}S'(t)X_-^{1/2}(t), \\ X_-(t_1) = 0. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Полученная таким образом эллипсоидальная аппроксимация касается множества разрешимости вдоль "хороших" направлений $l^*(t) = X'(t_0, t)l_0$:

$$\rho\left(l^*(t)\middle|\, \mathcal{E}(x_-(t), X_-(t))\right) = \rho\left(l^*(t)\middle|\, W[t]\right). \tag{4.21}$$

При этом управление может быть вычислено по формулам (4.9)–(4.10) с заменой $W[t]$ на $\mathcal{E}(x_-(t), X_-(t))$. .

Заметим, что при каждом фиксированном l_0 происходит касание точного множества $W[t]$ и внутренней эллипсоидальной оценки вдоль "хороших" направлений $l^*(t) = X'(t_0, t)l_0$.

$$\tilde{V}_{\mathcal{E}}(t, x) = \max_l \{\langle l, x\rangle - \rho\left(l\middle|\, \mathcal{E}(x_-(t), X_-(t))\right) - \frac{1}{4}\langle l, l\rangle\} \tag{4.22}$$

в качестве начального x взять точку касания точного множества и внутреннего эллипсоида.

В случае эллипсоидальной аппроксимации максимизатор l^0 в формуле (4.9), необходимый для вычисления управления, может быть найден как

$$\begin{gathered} l^0 = 2\lambda(X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t)), \\ F(t) = X'(t, t_1)X(t, t_1), \end{gathered} \tag{4.23}$$

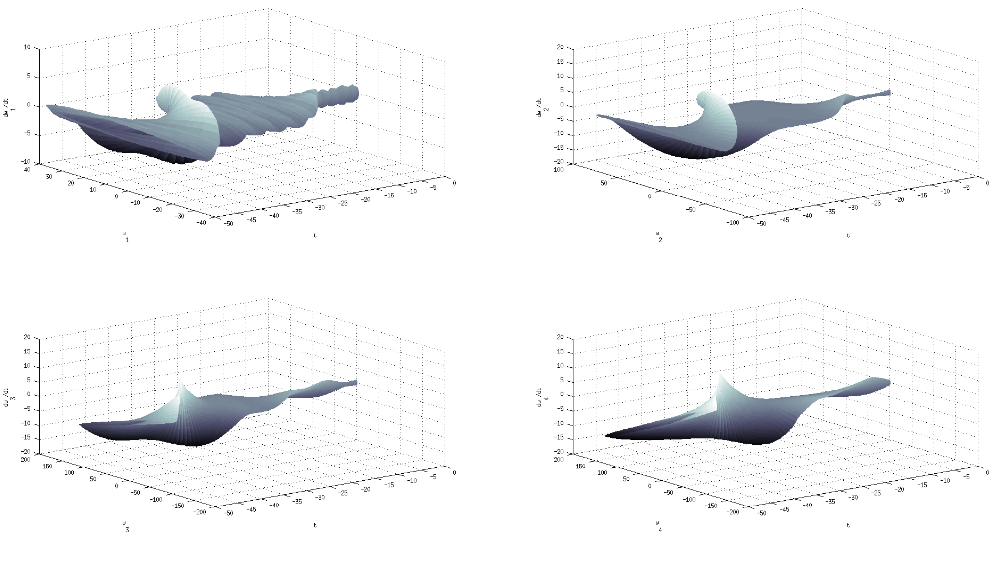
где λ — единственный неотрицательный корень уравнения

$$\langle X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t)), X_-(t)(X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t))\rangle = 1, \tag{4.24}$$

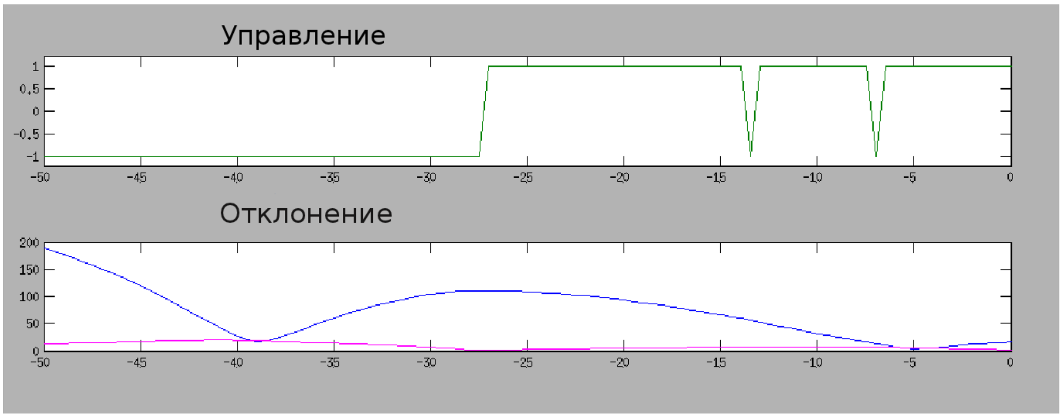
или $l^0 = 0$, если (4.24) не имеет неотрицательных решений.

Ниже приведены графические иллюстрации.

Эллипсоидальные оценки множества разрешимости:



Управление и отклонение нормы решения от начала координат:


Управление
Отклонение

Заключение

Сформулируем кратко основные результаты работы:

1. Получен явный вид для различных функционалов цены, используемых при нахождении множеств достижимости и разрешимости для линейной управляемой системы с запаздыванием.

2. Выведены уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана для систем с запаздыванием и доказано, что функционалы цены им удовлетворяют.

3. Получены исчерпывающие внутренние эллипсоидальные оценки для множеств достижимости для систем с запаздыванием в конечномерном и функциональном пространствах, внешние оценки в конечномерном пространстве.

4. Проведена регуляризация задачи синтеза для систем с запаздыванием. С помощью аппроксимации исходной системы методом прямых получена схема построения эллипсоидального синтеза в режиме реального времени.

Полученные результаты позволяют строить синтез управлений в режиме реального времени для различных систем с запаздыванием, а также оценки множеств достижимости и разрешимости. Полученные схемы могут быть доведены до алгоритмов для расчета на ЭВМ. Причем, в схемах оценивания множеств достижимости и разрешимости каждая оценка считается независимо от других. Таким образом, алгоритмы могут быть распараллелены, тем самым позволяя осуществлять вычисления гораздо быстрее, и могут быть рекомендованы для расчета на суперкомпьютерах.

Дальнейшее развитие темы может включать в себя расширение круга рассматриваемых задач. Добавление измерений, ошибок и запаздывания в измерения. Добавление неопределенности в динамику системы. Рассмотрение группового управления для систем с запаздыванием. Все это носит весьма актуальный характер и предоставляет широкое поле для дальнейших исследований.

Автор благодарит своего научного руководителя академика Александра Борисовича Куржанского за постановку задачи, постоянное внимание к работе, ценные замечания и безграничное терпение.

Автор благодарит коллектив кафедры системного анализа, на которой он обучался и продолжает работать.

Работа выполнена при поддержке гранта государственной программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации № НШ-2692.2014.1, гранта РФФИ № 15-01-05950-а.

Литература

1. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Функционально- дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. №5 С. 771-797.

2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

3. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.

4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

5. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

6. Борисович Ю.Г, Гельман Б.Д, Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.

7. Брыкалов С. А. Задачи для функционально-дифференциальных уравнений с монотонными краевыми условиями // Дифференц. уравн. 1996. **32**. № 6. С. 731–738.

8. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.

9. Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Издательство ЛГУ, 1974.

10. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005.

11. Зверкин А.М. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // Пятая летняя математическая школа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. С. 307-399.

12. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Математический сборник. 1963. Т. 61. № 2. С. 211-223.

13. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

14. Каменский Г.А., Скубачевский А.Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: МАИ, 1992.

15. Ким А.В. i-Гладкий анализ и функционалъно-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1996.

16. Колмановский В.Б., Королева Н.И. О синтезе билинейных систем с запаздыванием в управлении / / Прикладная математика и механика, 1989. Т.53. Вып.2. С. 238-243.

17. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

18. Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени / / Прикладная математика и механика, 1956. Т.20. Вып.3. С. 315-327.

19. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

20. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

21. Красовский Н.Н., Куржанский А.Б. К вопросу о наблюдаемости систем с запаздыванием / / Дифференц. уравнения, 1966. Т.2. С. 298-308.

22. Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикладная математика и механика, 1996. Т.60. Вып.6. С. 885-900.

23. Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Уравнения типа Гамильтона-Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2000. Т.6. №1. С. 110-130.

24. Красовский Н. Н., Осипов Ю. С. Линейные дифференциально-разностные игры // ДАН СССР. 1971. **197**. № 4. С. 777–780.

25. Куржанский А. Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. // Дифференц. уравн. 1967. **3**. № 12. С. 2094–2107.

26. Куржанский А. Б. О существовании решений уравнений с последействием // Дифференц. уравн. 1970. **6**. № 10. С. 1800–1809.

27. Куржанский А.Б. Дифференциальные игры сближения в системах с запаздыванием // Дифференц. уравн. 1971. **VII**. № 8. С. 1398–1409.

28. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

29. Куржанский А.Б., Никонов О.И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления / / Доклады РАН, 1993. Т.333. №4 С. 578-581

30. Куржанский А.Б., Сивергина И.Ф. Метод динамического программирования в обратных задачах оценивания для распределенных систем / / Доклады РАН, 1998. Т.369. №2. С. 161-166.

31. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Доклады АН СССР, 1986. Т.289. №1. С. 38-41.

32. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир. 1970.

33. Лукоянов Н.Ю. Минимаксное решение уравнений Гамильтона-Якоби для наследственных систем // Доклады РАН, 2000. Т.371. №2. С. 163-166.

34. Лукоянов Н.Ю. Об уравнении типа Гамильтона-Якоби в задачах управления с наследственной информацией // Прикладная математика и механика, 2000. Т.64. Вып.2. С. 252-263.

35. Лукоянов Н. Ю. О вязкостном решении функциональных уравнений типа Гамильтона–Якоби для наследственных систем // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2007. **13**. № 2. С. 135–144.

36. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Гостехиздат, 1951.

37. Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / / Успехи матем. наук, 1977. Т.32. №2. С. 174-202.

38. Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / / Успехи матем. наук, 1967. Т.22. №2. С. 21-57.

39. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздывания / / Доклады АН СССР, 1971. Т.197. №5. С.1018-1021.

40. Осипов Ю.С. Стабилизация управляемых систем с запаздыванием / / Дифференц. уравнения, 1965. Т.1. №5. С. 463-473.

41. Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием / / Доклады АН СССР, 1971. Т.196. №4. С. 779-782.

42. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальных игр / / Тр. МИАН им. В.А.Стеклова, 1985. Т.169. С. 119-157.

43. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г, Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

44. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

45. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, No 4. С. 500-512.

46. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991.

47. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501-504.

48. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.:, Наука, 1985.

49. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

50. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.

51. Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием. ДУ, 1965, Т1, №1, С. 102-116.

52. Эльсгольц Л.Э. Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

53. Bellman R., Cooke K.L. Differential-Difference Equations. New York: Academic Press, 1963.

54. Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New-York: Springer-Verlag, 1977.

55. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P., Ellipsoidal Toolbox, 2006, http://code.google.com/p/ellipsoids

56. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhauser, 1997.

57. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis: internal approximation // System and Control Letters, 2000, V.41, P. 201-211.

58. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I:External Approximations // Optimization methods and software, 2002, V. 17, No. 2, P. 177-206.

59. Rockafellar R. T. Integral functionals, normal integrands and measurable selections // Nonlinear Operators and the Calculus of Variations. Lecture Notes in Mathematics. **543**. Berlin: Springer, 1976. P. 157–207.

60. Rockafellar R. T., Wets R. J-B Variational Analysis. Berlin: Springer, 1997.

Публикации по теме диссертации

61. Востриков И. В. Внутреннее эллипсоидальное оценивание множеств достижимости для линейных управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравн. 2003. **39**. № 8. С. 1030–1037.

62. Востриков И.В., Дарьин А.Н., Куржанский А.Б. Успокоение многозвенной колебательной системы в условиях неопределенных возмущений // Дифференц. уравн. 2006. **42**, № 11, С. 1452-1463.

63. Востриков И. В. О методе динамического программирования для линейных управляемых систем с запаздыванием // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2012, № 2, С. 15-21.