Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факльтет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Мазуренко Станислав Сергеевич

Уравнение эволюции невыпуклых множеств в задаче достижимости и управление потоками

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель - доктор
физико-математических наук,
академик А. Б. Куржанский

Москва, 2012 г.

Содержание

Введение

Задачи управления и оптимизации ставились исследователями с давних пор, однако активное изучение этих задач началось в 30х - 40х годах прошлого столетия. Современная проблематика теории управления затрагивает многие научные области: разработка систем автоматизации и робототостроения, управления процессами в физике, биологии, моделирование экономических процессов и т.д.

Толчок к развитию математической теории процессов управления был получен благодаря результатам академика Л.С. Понтрягина и его сотрудников: В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, а следом за ними и других исследователей. В частности, были выведены необходимые условия оптимальности для функционалов различного вида, получившие название Принципа максимума Понтрягина [1]. Примерно в те же годы Р. Беллманом был создан метод динамического программирования для решения задач синтеза управления в терминах гамильтонова формализма, а также получены достаточные условия оптимальности [2].

С тех пор круг задач, к которым применимы результаты теории управления, ровно как и методы решения таких задач, стремительно расширялся. Н. Н. Красовский активно занимался решением задач синтеза управления для различных классов возмущений в динамических уравнениях. Им и его сотрудниками были исследованы основные свойства систем с неопределенностями и их разнообразные приложения [3],[4]. Р. Калман исследовал вопросы фильтрации и предсказания поведения динамических процессов в рамках вероятностных моделей, а также ввел понятия наблюдаемости и управляемости [5]. Широкий класс подобных задач решался при использовании понятий множества достижимости и разрешимости: соответственно куда и откуда может передвигаться объект, описываемый системой дифференциальных уравнений. Теория оптимального управления получила свое продолжение для уравнений в частных производных в работах Ж.-Л. Лиониса [6].

Среди других исследователей теории управления и её приложений отметим работы Ф.Л. Черноусько [7], Б.Н. Пшеничного [8], В.А. Троицкого [9], В.А. Якубовича [10], В.Ф. Кротова [11], Р. Габасова и Ф.М. Кирилловой [12], В.М. Кунцевича [13]. Наряду с ними серьезный вклад в эту теорию внесли G. Leitsmann, T.Basar и P. Bernhard [14], R. Brockett [45], P. Kokotovic [15], A. Isidori [16], A. Krener [17], Ch. Byrnes [18], P. Varaiya [19], J. Lygeros, C. Tomlin и S. Sastry [20], E.B. Lee и L. Markus [21].

В дальнейшие годы, математическая теория процессов управления достигла широкого распространения с различными приложениями. Активную роль в развитии этой теории сыграли сотрудники Н.Н. Красовского: А.Б. Куржанский, Ю.С. Осипов [22], А.И. Субботин [23] и другие. В том числе были продолжены исследования задач управления в условиях неопределенности [24], синтеза управления, оценки и нахождения множеств достижимости и разрешимости при различных типах ограничений на состояния и параметры системы [25]. Область научных интересов А.Б. Куржанского включает такие направления исследования, как задачи гарантированного оценивания, в которых не известны стохастические свойства ненаблюдаемых величин и неопределенностей, а есть лишь информация о возможных диапазонах их изменений; задачи, в которых ограничения, накладываемые на систему двойные: геометрические и интегральные ограничения, имеющие общий резерв [26]; задачи эллипсоидального исчисления и оценивания [43] и многие другие.

Помимо названных работ, отдельно отметим существенный вклад в современную теорию управления М.И. Гусева [28]-[29], В.Н. Ушакова [30], С.М. Асеева [31], Н.Л. Григоренко [32], М.С. Никольского [33], В.А.Комарова [34], Н.Н.Субботиной [35], А.Н. Дарьина [36], И.В. Рублева [37] и других.

Настоящая диссертация продолжает исследования А.Б. Куржанского и его сотрудников в области задач синтеза управлений по реально доступной информации в широком смысле этого слова [38]. Ими была развита теория множеств и трубок достижимости [39]. Эти результаты были также представлены в совместных работах с О.И. Никоновым [40] и Т.Ф. Филипповой [41]. В частности, был получен результат для нахождения множества достижимости дифференциального включения в терминах эволюционного уравнения в общем случае, а также, в терминах опорных функций в случае выпуклого решения задачи дифференциального включения.

Современное развитие технологий ставит перед исследователями все более нестандартные задачи, требующие выработки новых методов решения. Так, например, в билинейных по управлению и позиции системах наряду с выпуклыми задачами динамического программирования возникает необходимость перейти к невыпуклому случаю. Это может произойти, если имеется неопределенность в коэффициентах матрицы движения линейной системы. В результате этого, множества достижимости системы представляют собой звездную структуру даже при выпуклом начальном множестве. Разработанный к настоящему времени аппарат исследования таких задач при помощи выпуклого анализа и теории двойственности не может описать точное решение.

Альтернативный подход к задачам управления был предложен Р. Брокеттом [45], который вслед за К. Рейнольдсом [44] обратил свое внимание на необходимость изучения задач управления потоками с заданными начальными распределениями состояний системы, которые могут быть сосредоточены и на невыпуклых множествах. Р. Брокетт рассматривает динамическую задачу управления потоком не в терминах отдельных объектов - фазовых переменных пространства R^n и соответствующих траекторий движения, а в терминах эволюции всей плотности распределения состояний системы. Исследование динамики всего распределения проведено с использованием уравнения Лиувилля - уравнения в частных производных для функции плотности. Помимо абсолютно непрерывного случая, уравнение верно и для более широкого класса распределений из пространства обобщенных функций. В результате, с помощью методов динамического программирования стало возможным нахождение в явном виде оптимального управления системой, сосредоточенной, например, в конечном числе точек, или на границе эллипсоида.

Представленная работа дополняет исследования задач теории управления при помощи эволюционного уравнения [41] и задания динамики системы в терминах уравнения Лиувилля [45].

Целью данной работы была разработка механизма нахождения невыпуклых множеств достижимости эволюционных систем, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями в виде распределений, и оптимального управления такими системами, который бы позволил численно находить соответствующие множества и оптимальное управление.

В частности, в дополнение к результатам [45] была формализована постановка задачи управления системой в случае, когда состоянием системы являются не координаты в $n-$мерном пространстве, а распределение координат. Данная постановка уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана была проделана для случая функции цены, зависящей от обобщенной функции распределения [42].

Настоящая работа продолжила исследования [41] в области систем со звездной динамикой. В данной работе эволюционные уравнения для множества достижимости дифференциальных включений были преобразованы и записаны для функций Минковского, что позволило численно находить калибровочную функцию и восстанавливать по ней всю звездную трубку достижимости.

Наконец, в диссертации представлены новые результаты по нахождению связующей нити между функцией цены в задаче поиска множества достижимости и калибровочной функции Минковского.

Решение рассматриваемых в диссертации задач было получено в рамках упомянутых выше подходов, основанных на методах динамического программирования, а также на методах вариационного анализа и теоремах о дифференцировании условного максимума. Работа носит преимущественно теоретический характер. Полученные результаты могут служить основой для дальнейших исследований и позволят далее перейти к практически реализуемым численным алгоритмам, то есть к решению задачи до конца. В частных случаях (квадратичный интегральный функционал для систем с распределениями и двумерные линейные системы для задачи нахождения звездных множеств достижимости) были построены численные решения.

Диссертация состоит из трёх глав.

В **первой главе** рассматривается задача управления в случае, когда множество начальных состояний системы характеризуется функцией распределения. В первом разделе приведена общая постановка подобной задачи: рассматривается система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление из некоторого класса кусочно-непрерывных функций U, функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет стандартным свойствам для существования, единственности и продолжаемости решения на отрезок T. Начальное состояние системы задается функцией распределения $p(t_0, x)$ - в общем случае - обобщенным линейным функционалом над пространством непрерывных функций с компактным носителем. Такие распределения часто используются в физике, где, например, вещество или заряд могут быть сосредоточены на границе некоторого множества, или в конечном числе точек, для чего вводится понятие $\delta-$функции.

Помимо задания рассматриваемого класса обобщенных функций, в разделе приводится теорема Рисса-Радона, позволяющая отождествить функции распределения с мерами Радона. Поэтому такая постановка задачи может говорить о вероятностном распределении начальных состояний системы и/или о плотности потока в различных точках пространства в начальный момент времени. Под позицией системы в первой главе будем подразумевать пару $(t, p(t, \cdot))$.

В разделе 1.1 выводится уравнение Лиувилля, являющееся линейным по позиции и задающее закон её изменения:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) = -\langle \frac{\partial}{\partial x}, p(t, x) f(t, x, u) \rangle.$$

В разделе 1.2 показывается, как зная вид решения исходной системы можно получить решение уравнения Лиувилля: в случае, когда отображение φ каждому значению x_0 ставит в соответствие решение системы $x(t, t_0, x_0)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, плотность распределения x в момент времени t :

$$p(t, x) = \frac{p(t_0, \varphi_t^{-1}(x))}{|J_{\varphi_t}(x)|},$$

где J_φ – Якобиан преобразования φ.

Далее ставится задача оптимизации:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u)p(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t_1,x)dx \longrightarrow \inf_{u\in U},$$

в которой обе функции $L(t,x,u)$ и $\psi(x)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных. Далее оптимальное решение ищется при помощи метода динамического программирования: определение функции цены распространяется на случай, когда фазовая переменная - не вектор в R^n, а обобщенная функция (мера):

$$V(t_0,p_0) = \inf_{u\in U}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u)p(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t_1,x)dx \,\middle|\, p(t_0,\cdot) = p_0(\cdot) \in \tilde{\mathcal{F}}\right\},$$

где множество $\tilde{\mathcal{F}}$ задает меры, для которых сходятся несобственные интегралы в целевом функционале.

При таком задании функции цены выполняется полугрупповое свойство, из которого в представленной работе выводится принцип оптимальности и соответствующий ему аналог системы Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}V(t,p(t,\cdot)) + \inf\limits_{u\in U}\left\{-V_p'\langle\frac{\partial}{\partial x}, p(t,x)f(t,x,u)\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u)p(t,x)dx\right\} = 0 \\ V(t_1,p(t_1,\cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t_1,\cdot), \end{cases}$$

которая рассматривается в области $T\times\tilde{\mathcal{F}}$.

Также, доказывается теорема, согласно которой достаточно найти частное решение полученной системы Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое будет оценкой снизу функции цены, а при дополнительных условиях совпадет с её точным значением.

В разделе 1.4 для начального условия с распределением ставится задача нахождения оптимального управления линейной системой с линейно-квадратичным интегралом, зависящим от определенной выше позиции системы. Для такой задачи находится решение в замкнутом виде с использованием уравнений Риккати. Также в этом разделе рассматриваются частные примеры начальных условий с многомерным нормальным распределением, равномерным распределением на параллелепипеде и эллипсоиде, а также с равномерным распределением на границе эллипсоида.

Последний раздел Главы 1 описывает модификацию исходной задачи оптимизации, в которой целевой функционал зависит от распределения уже нелинейно:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, u, p(t, \cdot))dt + \psi(t_1, p(t_1, \cdot)) \longrightarrow \inf_{u \in U}.$$

Для такого функционала выводится соответствующий аналог принципа оптимальности и уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Также решение задачи управления линейной системой с функционалом, квадратичным по распределению, приводится к замкнутому виду.

Тем не менее, несмотря на универсальность подхода динамического программирования, применимого для задача с распределениями на невыпуклых множествах, нахождение функции цены представляется весьма трудоемкой, а иногда и трудно разрешимой задачей. В частности, если управление заложено в саму матрицу динамики линейной системы, то аналогичное уравнению с аддитивным управлением решение в замкнутом виде построить не удается.

Поэтому в дальнейшем в работе акцентируется внимание на задаче нахождения множества достижимости, которое в общем случае также можно искать как линии уровня функции цены специального вида [24]. Здесь уже известны методы, затрачивающие намного меньшее количество вычислительных мощностей, чем прямое интегрирование уравнений ГЯБ [41]. Например, в выпуклом случае возможно выразить динамику множеств достижимости при помощи опорных функций. Однако как показывает практика, даже в системах с изначальной линейной структурой по фазовой переменной множества достижимости могут оказаться невыпуклыми. В начале **второй главы** диссертации рассматривается система, билинейная по (x, u), в которой управление (или неопределенность) заложено в саму матрицу движения. В разделе 2.1.3 в явном виде ищется частное решение простейшей двумерной линейной системы и на примере показано, что множество достижимости для системы не выпуклое, а звездное.

Далее рассматривается общая постановка задачи управления:

$$\dot{x} \in F(t,x),\ t \in [t_0, t_1],\ x_0 \in X_0,$$

для которой выполнены стандартные условия существования, единственности и продолжаемости решения ([48]), а также предположение о звездной структуре динамики и начального множества.

Тогда, из [41] известно, что многозначная функция $X[t]$ - множество достижимости системы - является единственным решением следующего эволюционного уравнения:

$$\lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} h \left(X[t+\sigma], \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t,x)\} \right) = 0,\ \ t \in T,$$

$$X[t_0] = X_0,$$

где $h(A,B)$ - метрика Хаусдорфа.

В выпуклом случае для дифференциального включения при выполнении некоторых дополнительных ограничений ([41]) это уравнение можно записать в терминах опорных функций. Целью настоящей главы было выйти за рамки выпуклых множеств и вывести дифференциальное уравнение для калибровочной функции Минковского:

$$r(l|Z) = \max\{\lambda \in R | \lambda l \in Z\},\ r(0|Z) = +\infty,$$

которая, как и опорная функция, позволяет однозначно восстановить само множество.

Раздел 2.3 приводит необходимые для данной работы свойства калибровочной функции, а также в этом разделе доказывается результат касательно непрерывной дифференцируемости функции $r(l|Z(\sigma))$ по параметру σ, который сформулирован в виде Теоремы 2.1. В результате, в разделе 2.4 выводится дифференциальное уравнение для калибровочной функции Минковского:

$$\frac{\partial^+ r(l,t)}{\partial t} = \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t,z;a) \right\rangle,$$

где $z = r(l,t)l$. Решение этого уравнения можно искать в классическом виде. Однако как правило, для уравнений типа Гамильтона-Якоби-Беллмана рассматриваются вязкостные решения, условия существования которых для разных типов подобных уравнений можно найти, например в [6].

В следующем разделе на систему дополнительно накладываются фазовые ограничения в виде выпуклого компактно-значного непрерывного по Хаусдорфу отображения $Y(t)$. Показывается, что дифференциальное уравнение изменяется соответствующим образом.

Напомним, что определение звезды подразумевает наличие некоторого множества, называемого центральным, для каждой точки которого отрезок, соединяющий эту точку и произвольную точку множества, лежит внутри этого множества. Раздел 2.6 исследует вопрос, как изменится дифференциальное уравнение для калибровочной функции, если центральное множество звезды будет сосредоточено не вокруг начала координат, а вокруг некоторой заранее известной движущейся точки $q(t) : \dot{q}(t) = Q(q, t)$.

Третья глава диссертации посвящена сравнению двух подходов к задаче поиска множества достижимости: подходу с использованием линий уровня функции цены и подходу с использованием калибровочных функций. В первом подходе множество достижимости системы может быть найдено как линии уровня функции цены для попятной системы:

$$X[t] = \{x \in R^n : V(t, x) \leq 0\}.$$

Аппарат Гамильтонова формализма позволяет, таким образом, находить множества достижимости и для невыпуклых задач, однако он имеет ряд вычислительных трудностей.

В данной работе рассматривается метрика $d(s, S)$, которая сама зависит от калибровочной функции:

$$d(s, S) = g(1 - r(s|S)),$$

где функция $g(x) = 0$ для значений $x \leq 0$, и $g(x)$ возрастает при $x > 0$, то показывается, что функция $V(t, x) = g(1 - r(x, t))$ является решением некоторой системы Гамильтона-Якоби-Беллмана для любой непрерывно дифференцируемой функции

$g(x)$.

Т.е, например, для однородной правой части вида $f(t,x,a) = Ax, A \in \mathcal{A}$ функция

$$V(t,x) = g(1 - r(x,t))$$

является решением системы Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \max\limits_{A \in \mathcal{A}} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, Ax \right\rangle \right\} = 0, \\ V(t_0, x) = g(1 - r(x,t_0)). \end{cases}$$

В разделе 3.3 рассмотрены частные примеры двумерных линейных систем, даны иллюстрации множеств достижимости, а также трубок достижимости, проиллюстрирована функция цены в фиксированные моменты времени.

Основные результаты работы следующие:

1. Разработан метод поиска решения задачи оптимального управления потоками с позиции распределения при помощи модифицированных уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Решена задача оптимального управления потоками, задаваемыми линейной системой с линейно-квадратичным интегралом, зависящим от позиции $(t, p(t,x))$. Построены графические иллюстрации динамики распределения в частных случаях;

2. Выведено дифференциальное уравнение для калибровочной функции Минковского множества достижимости дифференциального включения, позволяющее строить трубки достижимости систем со звездной динамикой. Получена модификация этого уравнения при наличии фазовых ограничений;

3. Теоретически обоснована взаимосвязь предложенных методов с подходами к решению задач управления в рамках гамильтонова формализма. Указаны уравнение и решение для функции цены задачи поиска множеств достижимости. Построены графические иллюстрации трубок достижимости и функций цены для задач с неопределенностью в матрице динамики линейной системы.

1 Динамическое программирование в линейных системах с состояниями в виде распределений

В данной секции рассматривается задача оптимального управления системой, заданной на фиксированном отрезке времени, с начальным состоянием в виде известной функции распределения. Для ее решения применяется подход, в котором за состояние системы принимается распределения координат в каждый момент времени. Посредством этого метода выводятся аналоги уравнений гамильтонова формализма для задачи минимизации интегрального функционала.

В первой части этой секции приводятся факты касательно уравнения Лиувилля, которое определяет динамику распределения системы. Затем рассматривается задача оптимального управления динамической системы с интегральным функционалом, линейным по распределению, в рамках гамильтонова формализма. Далее, с помощью уравнений типа Гамильтона-Якоби-Беллмана, приводится решение в замкнутом виде задачи оптимального управления для линейной системы с квадратичным функционалом. В целях создания более общей картины, в последней части рассматривается общая постановка задачи, в случае, когда целевой функционал зависит от распределения нелинейно, что дает результаты, близкие к тем, что были получены в первых частях этой секции.

1.1 Постановка задачи в общем случае

Рассмотрим следующую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление из некоторого класса кусочно-непрерывных функций U, функция $f(t, x, u)$ такая, что $f(t, x, u)$ и $f'_x(t, x, u)$ непрерывны на $T \times \mathbb{R}^n \times U$ и решение задачи Коши продолжаемо на весь отрезок T для любого начального условия

$x(t_0) = x_0$. Пусть также задано начальное распределение $p(0, x) = p_0(x)$, такое что

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \;\; p_0(x) \geq 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} p_0(x)dx = 1.$$

Тогда под функцией $p(t, x)$ будем понимать плотность распределения $x(t)$, т.е. вероятность нахождения точки системы в области $A \subseteq \mathbb{R}^n$ в момент времени t

$$\mathbb{P}(x(t) \in A) = \int\limits_A p(t, x)dx.$$

Известно, что динамика функции $p(t, x)$ описывается уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t, x) = -\langle \frac{\partial}{\partial x}, p(t, x)f(t, x, u)\rangle.^1 \tag{1.2}$$

Для начала выведем это уравнение для случая, когда функция $p(t, x)$ непрерывно дифференцируема. Рассмотрим произвольную ограниченную область $V \subset \mathbb{R}^n$, граница которой является объединением кусочно-гладких гиперповерхностей, ориентированных при помощи внешней нормали ν. Тогда

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(x(t) \in V) = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}p(t, x)dx.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(x(t) \in V) = -\int\limits_{\partial V} \langle \dot{x}, \nu\rangle p(t, x)dx = -\int\limits_{\partial V} \langle f(t, x, u), \nu\rangle p(t, x)dx.$$

Применив теорему Остроградского — Гаусса к последнему интегралу, получаем равенство

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}p(t, x)dx = -\int\limits_V \langle \frac{\partial}{\partial x}, p(t, x)f(t, x, u)\rangle dx$$

которое ввиду произвольности выбора области V даёт уравнение (1.2).

---

[1]

$$\langle \frac{\partial}{\partial x}, g(x)\rangle = divg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}g(x)$$

Однако уравнение Лиувилля может быть получено и для более широкого класса распределений: обобщённых функций ([47],[46]).

Пусть $\mathcal{D} = C_c^0(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных функций с компактным носителем, т.е. таких функций $\psi \in C^0(\mathbb{R}^n)$, что существует компакт $K : \psi|_{\mathbb{R}^n \setminus K} = 0$. Обозначим за $\mathcal{D}'$ пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}$, которое в дальнейшем будем называть пространством обобщённых функций. В пространстве $\mathcal{D}'$ можно ввести слабую топологию, которая определяется полунормами

$$p_\psi(f) = |(f, \psi)|, \ \ f \in \mathcal{D}', \ \ \psi \in \mathcal{D}.$$

В частности, сходимость $f_k \to f$ в этой топологии означает, что

$$(f_k, \psi) \to (f, \psi), \ \ \forall \psi \in \mathcal{D}.$$

Обобщённой производной будем называть линейный непрерывный функционал $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ над множеством непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем, действующий по правилу

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f, \psi \right) = - \left(f, \frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right), \ \forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R}^n).$$

Обобщённая функция f называется *регулярной*, если она представима в виде

$$(f, \psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dx,$$

где функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в каждой конечной области $\mathbb{R}^n$. В противном случае, функционал f называется *сингулярным*. В дальнейшем, даже в случае сингулярной функции f, вместо записи (f, ψ) будем использовать формальную запись

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) f(x) dx. \tag{1.3}$$

Покажем, что она действительно имеет место, т.е. $f(x)dx$ определяет меру.

Определение. *Мерой Радона* μ на топологическом пространстве X называется внешняя мера со следующими свойствами:

1) μ регулярна относительно семейства открытых множеств, т.е.

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : \ A \text{ открыто}, E \subset A\},$$

2) $\mu(K) < \infty$ для любого компактного множества K,

3) $\mu(A) = \sup\{\mu(K), \ K \text{ компактно}, K \subset A\}$, для любого открытого множества A.

Согласно теореме Рисса–Радона для локально компактного пространства X, можно отождествить меры Радона с непрерывными линейными функционалами на $C_c^0(X)$ в том смысле, что любой линейный непрерывный функционал f представим в виде

$$(f, \psi) = \int\limits_X \psi d\mu_f \ \ \forall \psi \in C_c^0(X), \tag{1.4}$$

где μ_f – мера Радона и, обратно, каждая мера Радона μ_f определяет по формуле (1.4) линейный непрерывный функционал на $C_c^0(X)$. Полная вариация μ_f определяется как норма f, т.е.

$$\|\mu_f\| = \sup\{|(f, \psi)| : \ \ \psi \in C_c^0(X), |\psi(x)| \leq 1 \text{ для всех } x \in X\}.$$

Т.к. пространство $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией является локально компактным, запись (1.3) является корректной.

Далее будем считать, что $p(t, \cdot) \in \mathcal{D}'$ – обобщённая функция, зависящая от параметра t. Обозначим за $\mathcal{F}(t)$ пространство функционалов $p(t, \cdot) \in \mathcal{D}'$, для которых выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(t, x) dx = 1$$

и $p(t, x)dx$ определяет неотрицательную меру Радона. Очевидно, что все неотрицательные регулярные обобщённые функции $f(x)$, для которых выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1,$$

принадлежат пространству $\mathcal{F}$. Однако это более широкое пространство, т.к. ему принадлежит, в частности, δ-функция Дирака.

Теперь рассмотрим динамику изменения среднего значения пробной функции $\psi(x) \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ в соответствии с (1.29) в предположении, что функция $p(t,\cdot)$ дифференцируема по параметру[2] и для любого измеримого по Борелю множества A определяет $\mathbb{P}(x(t) \in A)$. С одной стороны,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\partial}{\partial t}p(t,x)dx.$$

Однако для функции $\psi(x)$ верно равенство

$$\frac{d}{dt}\psi(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x}\psi(x), f(t,x,u)\rangle,$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle \frac{\partial}{\partial x}\psi(x), f(t,x,u)\rangle p(t,x)dx.$$

Воспользовавшись определением производной обобщённой функции в последнем интеграле, получаем, что для любой функции $\psi(x) \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\partial}{\partial t}p(t,x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle \frac{\partial}{\partial x}, f(t,x,u)p(t,x)\rangle \psi(x)dx$$

или, другими словами, обобщённая функция $p(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x) = -\langle \frac{\partial}{\partial x}, p(t,x)f(t,x,u)\rangle.$$

[2]Т.е. существует предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{p(t+\Delta t,x)-p(t,x)}{\Delta t}$ как предел обобщённых функций.

1.2 Преобразование плотности

Пусть pdx задаёт неотрицательную меру на множестве $\mathbb{R}^n$ и задано отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое является взаимно однозначным и непрерывно дифференцируемым. В этом случае плотность распределения $p(x)$ под действием этого отображения преобразуется по следующему правилу

$$p(\cdot) \to \frac{p(\varphi^{-1}(\cdot))}{|J_\varphi(\cdot)|}, \tag{1.5}$$

где J_φ – Якобиан преобразования φ. В случае, когда отображение φ каждому значению x_0 ставит в соответствие решение системы (1.29) $x(t, t_0, x_0)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, преобразование (1.5) описывает эволюцию плотности, т.е. плотность распределения x в момент времени t

$$p(t, x) = \frac{p(t_0, \varphi_t^{-1}(x))}{|J_{\varphi_t}(x)|} \tag{1.6}$$

Таким образом может быть получено решение уравнения Лиувилля (1.2). Для этого покажем, что обобщённая функция $p(t, x)$ дифференцируема по t :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t, x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{p(t_0, \varphi_t^{-1}(x))}{|J_{\varphi_t}(x)|}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\varphi_t(x))p(t_0, x)dx. \tag{1.7}$$

Т.к. $\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = f(t, x, u)$, то для дифференцируемой функции $\psi(x)$ с компактным носителем правая часть (1.7) дифференцируема, т.е. все числовые функции $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t, x)dx$ дифференцируемы по t, что влечёт за собой дифференцируемость по t обобщённой функции $p(t, x)$.

1.3 Принцип оптимальности. Уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана

Наряду с системой (1.29), рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u)p(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t_1,x)dx \longrightarrow \inf_{u\in U}, \tag{1.8}$$

в которой обе функции $L(t,x,u)$ и $\psi(x)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных. Обозначим за $\tilde{\mathcal{F}}$ множество таких начальных распределений p_0 из $\mathcal{F}$, для которых выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u)p(t,x)dx < \infty, \ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t_1,x)dx < \infty$$

для любого момента времени $t \in [t_0, t_1]$ и фиксированного управления u.

Замечание. С помощью представления (1.6) можно получить необходимое и достаточное условие корректного задания интеграла вида $\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x)p(t,x)dx$, где функция L вообще говоря не является функцией с компактным носителем.

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x)p(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} L(t,x)\frac{p(t_0,\varphi_t^{-1}(x))}{|J_{\varphi_t}(x)|}dx = \{y = \varphi_t^{-1}(x)\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} L(t,\varphi_t(y))p_0(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} L(t,x(t,t_0,y))p_0(y)dy.$$

Поэтому, зная общий вид $x(t,t_0,x_0)$, можно напрямую проверить сходимость последнего несобственного интеграла для заданного класса обобщённых функций $p_0 \in \mathcal{F}$.

Определение. *Функцией цены* будем называть следующее отображение

$$V(t_0,p_0) = \inf_{u\in U}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u)p(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)p(t_1,x)dx \,\middle|\, p(t_0,\cdot) = p_0(\cdot) \in \tilde{\mathcal{F}}\right\},$$

Тогда для любого управления $\tilde{u} \in U$:

$$V(t_0,p_0) \le \int_{t_0}^{t_0+\sigma}\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x,\tilde{u})p(t,x)dxdt + \int_{t_0+\sigma}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x,\tilde{u}(t))p(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)p(t_1,x)dx. \tag{1.9}$$

Пусть на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ управление $\tilde{u}$ переводит начальное распределение p_0 в распределение $\tilde{p} = p(t_0+\sigma, x)$. Тогда выполнено

$$V(t_0, p_0) \leq \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, \tilde{u}) p(t, x) dx dt + V(t_0+\sigma, \tilde{p}).$$

С другой стороны, из определения инфимума для любого $\varepsilon > 0$ существует управление $\bar{u}$, переводящее начальное распределение p_0 в распределение $\bar{p} = p(t_0+\sigma, x)$, такое что

$$V(t_0, p_0)+\varepsilon \geq \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, \bar{u}) p(t, x) dx dt + \int\limits_{t_0+\sigma}^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, \bar{u}) p(t, x) dx dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_1, x) dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, \bar{u}) p(t, x) dx dt + V(t_0+\sigma, \bar{p}). \tag{1.10}$$

Таким образом, получаем **принцип оптимальности**

$$V(t_0, p_0) = \inf_{u \in U} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u) p(t, x) dx dt + V(t_0+\sigma, p(t_0+\sigma, \cdot)) \right\}, \tag{1.11}$$

который можно записать следующим образом:

$$V\left(t_0, p_0 \middle| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_1, x) dx \right) = V\left(t_0, p_0 \middle| V\left(t_0+\sigma, p(t_0+\sigma, \cdot) \middle| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_1, x) dx \right)\right).$$

Теперь, заменив t_0 на произвольный момент времени из полуинтервала $[t_0, t_1)$ и разделив обе части на малое σ, получаем следующее уравнение:

$$\inf_{u \in U} \left\{ \frac{V(t+\sigma, p(t_0+\sigma, \cdot)) - V(t, p(t, \cdot))}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{t}^{t+\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(\tau, x, u) p(\tau, x) dx d\tau \right\} = 0. \tag{1.12}$$

Предполагая существование полной производной от функции цены по t и формально перейдя к пределу при σ, стремящемся к нулю, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \inf\limits_{u \in U} \left\{ \frac{d}{dt} V(t, p(t, \cdot)) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u) p(t, x) dx \right\} = 0 \\ V(t_1, p(t_1, \cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_1, x) dx. \end{cases}$$

Замечание. Если в (1.9) перенести $V(t_0, p_0)$ в правую часть, разделить обе части на σ и перейти к пределу, получим, что для любого управления u

$$\frac{d}{dt}V(t, p(t, \cdot)) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u)p(t, x)dx \geq 0.$$

Проведя аналогичные действия в (1.9) получим по определению инфимума

$$\inf_{u \in U}\left\{\frac{d}{dt}V(t, p(t, \cdot)) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u)p(t, x)dx\right\} = 0.$$

Таким образом, переход к пределу при σ, стремящемся к нулю, под знаком инфимума в (1.12) правомерен.

Далее применяем теорему о дифференцировании композиции функционалов:

$$\frac{d}{dt}V(t, p(t, \cdot)) = \frac{\partial}{\partial t}V(t, p(t, \cdot)) + V_p' \frac{\partial}{\partial t}p(t, \cdot),$$

где V_p' - производная по Фреше. Тогда используя (1.2), получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}V(t, p(t, \cdot)) + \inf\limits_{u \in U}\left\{-V_p'\langle\frac{\partial}{\partial x}, p(t, x)f(t, x, u)\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u)p(t, x)dx\right\} = 0 \\ V(t_1, p(t_1, \cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t_1, \cdot), \end{cases} \quad (1.13)$$

которая рассматривается в области $T \times \tilde{\mathcal{F}}$.

Замечание. Можно попробовать найти решение в виде $V(t, p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(t, x)p(t, x)dx$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \dot{w}(t, x)p(t, x)dx + \inf_{u \in U}\left\{-\int\limits_{\mathbb{R}^n} w(t, x)\langle\frac{\partial}{\partial x}, p(t, x)f(t, x, u)\rangle dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u)p(t, x)dx\right\} = 0$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} w(t, x)\langle\frac{\partial}{\partial x}, p(t, x)f(t, x, u)\rangle dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla p, wf\rangle dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} pw div f dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} p \cdot div(wf)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} pw \cdot div f dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p\langle\nabla w, f\rangle dx$$

Тогда

$$\begin{cases} \inf\limits_{u \in U}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\dot{w}(t, x) + \langle\nabla w(t, x), f(t, x, u)\rangle + L(t, x, u))p(t, x)dx\right\} = 0 \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(t_1, x)p(t_1, x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t_1, x)dx \end{cases}, \quad (1.14)$$

причём стоит отметить, что если управление ищется в виде $u = u(t,x)$, тогда инфимум можно внести под знак интеграла и ввиду произвольности выбора p, получаем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, однако для программного управления такой переход невозможен. Более того, подставив вместо $p(t,x) = \delta(x-y)$ - дельта функцию Дирака, можно получить систему уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{cases} \inf\limits_{u \in U} \{\dot{w}(t,y) + \langle \nabla w(t,y), f(t,y,u) \rangle + L(t,y,u)\} = 0 \\ w(t_1, y) = \psi(y). \end{cases}$$

Т.е. в случае, когда носитель распределения сосредоточен в одной точке, полученный результат полностью вписывается в стандартные рамки гамильтонова формализма. В общем случае, как будет показано ниже, даже в линейных системах зависимость функции цены от p получается более сложная, нежели линейная.

Следующая теорема дает связь между решением системы (1.13) и функцией цены для исходной задачи.

Теорема 1.1. *Если функция $W(t,p)$ дифференцируема по t и по p (в смысле производной по Фреше), и $W(t,p)$ удовлетворяет системе (1.13) в некоторой области $G \subseteq T \times \tilde{\mathcal{F}}$, то в этой области*

$$V(t,p) \geq W(t,p),$$

причём если существует такое управление u^*, что для соответствующего ему распределения $p^*(t,x)$ выполнено

$$-W'_p \langle \frac{\partial}{\partial x}, p^*(t,x) f(t,x,u^*) \rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u^*) p^*(t,x) dx =$$

$$= \min_{u \in U} \left\{ -W'_p \langle \frac{\partial}{\partial x}, p(t,x) f(t,x,u) \rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u) p(t,x) dx \right\},$$

то $V(t,p) = W(t,p)$.

Доказательство.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_1, x) dx = W(t_1, p(t_1, \cdot)) = W(t, p(t, \cdot)) + \int\limits_t^{t_1} \frac{d}{d\tau} W(\tau, p(\tau, \cdot)) d\tau =$$

$$
= W(t, p(t,\cdot)) + \int\limits_{t}^{t_1} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} W(\tau, p(\tau,\cdot)) - W_p' \langle \frac{\partial}{\partial x}, p(\tau,x) f(\tau,x,u(\tau)) \rangle \right) d\tau \geq
$$

$$
\geq W(t, p(t,\cdot)) - \int\limits_{t}^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(\tau,x,u) p(\tau,x) dx d\tau \Rightarrow V(t,p) \geq W(t,p).
$$

Однако для u^* неравенства переходят в равенства, т.е.

$$
V(t,p) = W(t,p)
$$

$\square$

Аналогичным образом можно получить уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана для случая системы с обратным временем, т.е. задано условие в конечный момент времени $p(t_1,x) = p_1(x)$ и требуется минимизировать функционал

$$
\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u) p(t,x) dx dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_0,x) dx \longrightarrow \inf_{u \in U}
$$

В этом случае пространство $\tilde{\mathcal{F}}$ определяется соответствующим образом, функция цены

$$
V(t_1,p_1) = \inf_{u \in U} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u) p(t,x) dx dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_0,x) dx \,\middle|\, p(t_1,\cdot) = p_1(\cdot) \in \tilde{\mathcal{F}} \right\},
$$

и принцип оптимальности перепишется в виде

$$
V(t_1,p_1) = \inf_{u \in U} \left\{ \int\limits_{t_1-\sigma}^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u) p(t,x) dx dt + V(t_1-\sigma, p(t_1-\sigma,\cdot)) \right\}.
$$

Тогда система (1.13) запишется следующим образом:

$$
\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(t,p(t,\cdot)) - \inf\limits_{u \in U} \left\{ V_p' < \frac{\partial}{\partial x}, p(t,x) f(t,x,u) > + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u) p(t,x) dx \right\} = 0 \\ V(t_0, p(t_0,\cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_0,x) dx. \end{cases} \tag{1.15}
$$

1.4 Линейный случай

В этом разделе будут рассмотрены основные результаты для линейных систем, разрешена система (1.13) для квадратичных функционалов, а также проиллюстрированы частные случаи начальных распределений и их динамика в соответствии с минимизацией функционала.

Итак, рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \ \ t \in [t_0, t_1], \tag{1.16}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, матрицы $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ непрерывны по t и ограничены. В начальный момент времени задано распределение

$$p(t_0, x) = p_0(x).$$

В линейном случае отображение φ записывается в виде

$$\varphi_t(x) = X(t, t_0)x + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{1.17}$$

где $X(t, t_0)$ – фундаментальная матрица системы (1.33):

$$\frac{\partial}{\partial t}X(t, \tau) = A(t)X(t, \tau), \quad X(\tau, \tau) = I.$$

Тогда если $p(t_0, x) = p_0(x)$, то

$$p(t, x) = \frac{1}{|X(t, t_0)|}p_0\left(X(t_0, t)x - \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right). \tag{1.18}$$

1.4.1 Квадратичный функционал для линейных систем

Пусть теперь с учётом системы (1.16) необходимо минимизировать функционал

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\langle x, M(t)x\rangle + \langle u, N(t)u\rangle)p(t, x)dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\langle x, Tx\rangle p(t_1, x)dx \longrightarrow \inf_{u\in U}, \tag{1.19}$$

где матрицы $M'(t) = M(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $T' = T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – неотрицательно определенные, а $N'(t) = N(t) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – положительно определённая. Используя замечание в главе 1.2, получаем достаточное условие на функции $p_0(x)$:

Лемма 1.2. *Пусть*

$$p_0 \in \mathcal{F}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x, x \rangle p_0(x) dx < \infty.$$

Тогда несобственные интегралы в (1.19) сходятся для каждого фиксированного кусочно-непрерывного управления u, *т.е.* $p_0 \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Доказательство. Покажем, что для любой матрицы $H \geq 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x(t, t_0, y), Hx(t, t_0, y) \rangle p_0(y) dy < \infty$$

Т.к. $x(t, t_0, y) = X(t, t_0)y + a(t)$, где $a(t) = \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$, то необходимо показать

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle y, X'HXy \rangle p_0(y) dy < \infty, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle y, X'Ha \rangle p_0(y) dy < \infty,$$

где за X обозначена матрица $X(t, t_0)$. Это следует из следующих цепочек неравенств:

$$0 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle y, X'HXy \rangle p_0(y) dy \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|y\| \|X'HXy\| p_0(y) dy \leq \|X'HX\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|y\|^2 p_0(y) dy < \infty,$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle y, X'Ha \rangle p_0(y) dy \right| \leq \|X'Ha\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|y\| p_0(y) dy =$$

$$= \|X'Ha\| \left(\int\limits_{\|y\|>1} \|y\| p_0(y) dy + \int\limits_{\|y\|\leq 1} \|y\| p_0(y) dy \right) \leq$$

$$\leq \|X'Ha\| \left(\int\limits_{\|y\|>1} \|y\|^2 p_0(y) dy + \int\limits_{\|y\|\leq 1} p_0(y) dy \right) \leq$$

$$\leq \|X'Ha\| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|y\|^2 p_0(y) dy + 1 \right) < \infty$$

□

Выпишем уравнение для функции цены (1.13)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}V(t,p(t,\cdot)) + \inf\limits_{u\in U}\left\{-V_p' < \frac{\partial}{\partial x}, p(t,x)f(t,x,u) > + \int\limits_{\mathbb{R}^n} L(t,x,u)p(t,x)dx\right\} = 0 \\ V(t_1,p(t_1,\cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)p(t_1,x)dx \end{cases}$$

Для квадратичного функционала будем искать функцию цены в виде

$$V(t,p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(t,x)p(t,x)dx + \langle \bar{x}, K(t)\bar{x}\rangle, \quad \bar{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} xp(t,x)dx, \quad K' = K,$$

тогда

$$V_p' = w(t,x) + \langle x, K\bar{x}\rangle + \langle \bar{x}, Kx\rangle = w(t,x) + 2\langle K\bar{x}, x\rangle.$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_j\langle \frac{\partial}{\partial x}, p(t,x)f(t,x,u)\rangle dx = \iint\limits_{\mathbb{R}^n} (x_j\langle \nabla p(t,x), f(t,x,u)\rangle + x_jp(t,x)divf)dx =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^n} (-p(t,x)div(x_jf(t,x,u)) + x_jp(t,x)divf)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j(t,x,u)p(t,x)dx.$$

В таком случае,

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \dot{w}(t,x)p(t,x)dx + \langle \bar{x}, \dot{K}(t)\bar{x}\rangle + \\ + \inf\limits_{u\in U}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\langle \nabla w(t,x), f(t,x,u)\rangle + 2\langle K\bar{x}, f\rangle + L(t,x,u)\right)p(t,x)dx\right\} = 0 \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(t_1,x)p(t_1,x)dx + \langle \bar{x}, K(t_1)\bar{x}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle p(t_1,x)dx. \end{cases}$$

Будем искать функцию $w(t,x)$ в виде

$$w(t,x) = \langle x, P(t)x\rangle, \quad P' = P.$$

$$\begin{cases} \inf\limits_{u}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\langle x, \dot{P}x\rangle + \langle \bar{x}, \dot{K}\bar{x}\rangle + 2\langle Px + K\bar{x}, Ax + Bu\rangle + \langle x, Mx\rangle + \langle u, Nu\rangle\Big) p(t,x)dx\right\} = 0 \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x, P(t_1)x\rangle p(t_1,x)dx + \langle \bar{x}, K(t_1)\bar{x}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle p(t_1,x)dx. \end{cases} \tag{1.20}$$

Решим вспомогательную задачу:

$$\tilde{J}[u] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(2\langle Px + K\bar{x}, Bu\rangle + \langle u, Nu\rangle\right)p(t,x)dx \to \inf\limits_{u}$$

$$\tilde{J}'_u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2B'(Px + K\bar{x}) + 2Nu)p(t,x)dx = 0$$

$$u^*(t) = -N^{-1}(t)B'(t)(P(t) + K(t))\bar{x}(t). \tag{1.21}$$

$$\tilde{J}[u^*] = -\langle \bar{x}, (P+K)BN^{-1}B'(P+K)\bar{x}\rangle. \tag{1.22}$$

Тогда система (1.20) с учётом (1.22) перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\langle x, \dot{P}x\rangle + 2\langle Px, Ax\rangle + \langle x, Mx\rangle)p(t,x)dx + \\ +\langle \bar{x}, \dot{K}\bar{x}\rangle + 2\langle K\bar{x}, A\bar{x}\rangle - \langle \bar{x}, (P+K)BN^{-1}B'(P+K)\bar{x}\rangle = 0 \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x, P(t_1)x\rangle p(t_1,x)dx + \langle \bar{x}, K(t_1)\bar{x}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle p(t_1,x)dx. \end{cases} \tag{1.23}$$

Т.к. эта система выполняется для любой функции $p(t,x)$, то для

$$p(t,x) = \frac{1}{2}\delta(x-y) + \frac{1}{2}\delta(x+y) \Rightarrow \begin{cases} \langle y, \dot{P}y\rangle + 2\langle Py, Ay\rangle + \langle y, My\rangle = 0 \\ \langle y, P(t_1)y\rangle = \langle y, Ty\rangle \end{cases}$$

выполнено для любого $y \in \mathbb{R}^n$. В таком случае, получаем систему для нахождения $P(t)$:

$$\begin{cases} \dot{P} + A'P + PA + M = 0 \\ P(t_1) = T. \end{cases} \tag{1.24}$$

Тогда система (1.23) перейдёт в систему

$$\begin{cases} \langle \bar{x}, \dot{K}\bar{x}\rangle + 2\langle K\bar{x}, A\bar{x}\rangle - \langle \bar{x}, (P+K)BN^{-1}B'(P+K)\bar{x}\rangle = 0 \\ \langle \bar{x}, K(t_1)\bar{x}\rangle = 0. \end{cases}$$

Взяв $p(t,x) = \delta(x-y)$, получаем

$$\begin{cases} \langle y, \dot{K}y\rangle + 2\langle Ky, Ay\rangle - \langle y, (P+K)BN^{-1}B'(P+K)y\rangle = 0 \\ \langle y, K(t_1)y\rangle = 0 \end{cases}$$

выполнено для любого $y \in \mathbb{R}^n$, поэтому система для нахождения матрицы K

$$\begin{cases} \dot{K} + A'K + KA - (P+K)BN^{-1}B'(P+K) = 0 \\ K(t_1) = 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Кроме того, заметим, что для среднего значения $\bar{x}$ верна следующая система:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\bar{x}} = (A - BN^{-1}B'(P + K))\bar{x}. \tag{1.26}$$

Таким образом, для нахождения функции цены необходимо:

1) решить системы (1.24) и (1.25),

2) с полученным $P(t)$ и $K(t)$ решить систему (1.26) и найти таким образом оптимальное управление u из (1.21),

3) зная $\bar{x}(t)$, найти $p(t, x)$:

$$p(t,x) = \frac{1}{|X(t,t_0)|} p_0 \left(X(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0,\tau) BN^{-1}B'(P+K) \int\limits_{\mathbb{R}^n} xp(\tau,x)dxd\tau \right).$$

В результате получаем

$$\inf_{u(t)} J[u] = V(t_0, p_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x, P(t_0)x \rangle p_0(x)dx + \langle \bar{x}(t_0), K(t_0)\bar{x}(t_0) \rangle, \tag{1.27}$$

причём оптимальная стратегия

$$u^*(t) = -N^{-1}(t)B'(t)(P(t) + K(t))\bar{x}(t).$$

Далее будут рассмотрены частные примеры начальных распределений для линейной задачи с квадратичным функционалом.

1.4.2 Примеры

Во всех примерах оптимальное управление и значения минимума функционалов определяются по следующим формулам:

$$u^*(t) = -N^{-1}(t)B'(t)(P(t)+K(t))\bar{x}(t).$$

$$\inf_{u(t)} J[u] = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, P(t_0)x\rangle p_0(x)dx + \langle \bar{x}(t_0), K(t_0)\bar{x}(t_0)\rangle,$$

$$\begin{cases} \dot{P} + A'P + PA + M = 0 \\ P(t_1) = T. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{K} + A'K + KA - (P+K)BN^{-1}B'(P+K) = 0 \\ K(t_1) = 0. \end{cases}$$

Пример 1.1. *Пусть начальное распределение нормальное многомерное, т.е.*

$$p_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|R_0|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m_0)'R_0^{-1}(x-m_0)},$$

где $m_0 \in R^n$, и положительно определенная симметричная матрица $R_0 \in R^{n\times n}$. Тогда из уравнения (1.18) получаем, что распределение останется многомерным нормальным в любой момент времени $t > t_0$:

$$p(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|R(t)|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x}(t))'R^{-1}(t)(x-\bar{x}(t))},$$

где

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= (A - BN^{-1}B'(P+K))\bar{x} \\ \bar{x}(t_0) &= m_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{R} &= AR + RA' \\ R(t_0) &= R_0. \end{cases}$$

Ниже представлены линии уровня нормального распределения состояний системы для случая

$$N = M = T = B = I,\ A = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix},$$

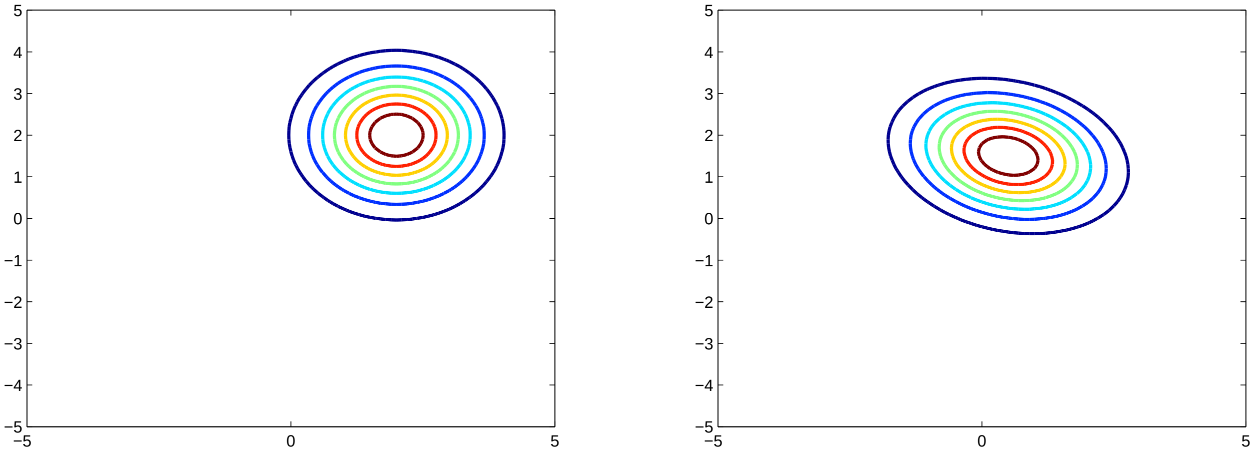

Рис. 1: Линии уровня функции распределения для $t = 0$, $t = 1$

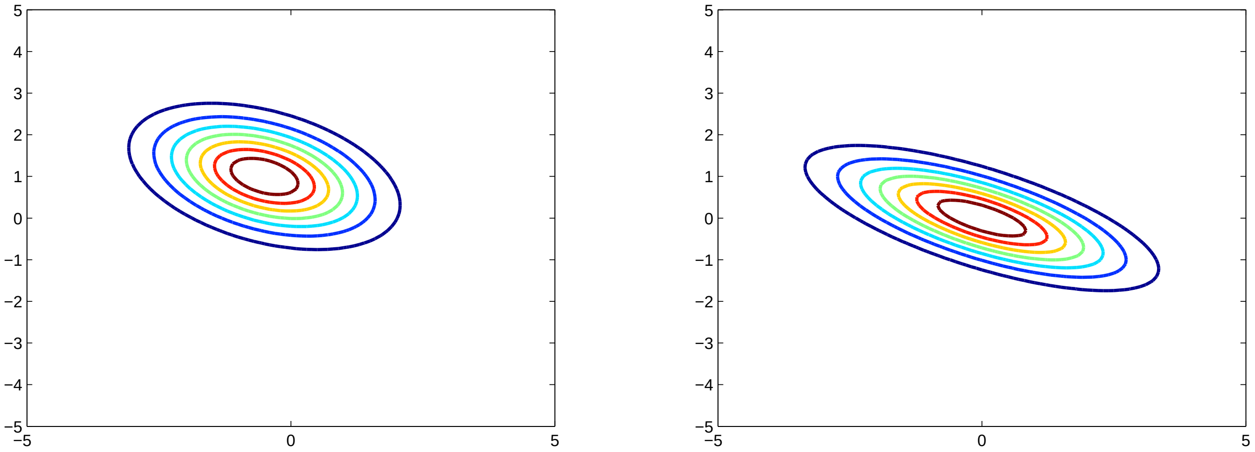

Рис. 2: Линии уровня функции распределения для $t = 2$, $t = 4$

Пример 1.2. *Рассмотрим случай равномерного распределения на n-мерном параллелепипеде $F_0 = \{x \in R^n : a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, \dots, n\}$, т.е.*

$$p_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)} & , x \in F_0 \\ 0 & , x \notin F_0 \end{cases}$$

Тогда в соответствии с (1.18)

$$p(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{|X(t,t_0)| \prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)} & , x \in F(t) \\ 0 & , x \notin F(t) \end{cases}$$

где

$$F(t) = X(t, t_0)F_0 - \int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)N^{-1}(\tau)B'(\tau)(P(\tau) + K(\tau))\bar{x}(\tau)d\tau,$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} & = (A - BN^{-1}B'(P + K))\bar{x} \\ \bar{x}(t_0) & = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right)^T. \end{cases}$$

Пример 1.3. *Если рассмотреть начальное распределение равномерное на эллипсоиде $\mathcal{E}(q_0, Q_0)$,*[3] *тогда эволюция эллипсоида $\mathcal{E}(q, Q)$ - носителя распределения - будет иметь вид:*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (A - BN^{-1}B'(P + K))q, \quad q(t_0) = q_0 \\ \dot{Q} &= AQ + QA', \quad Q(t_0) = Q_0. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Замечание. Из системы (1.28) видно, что эволюция матрицы эллипсоида Q не зависит от управления, т.е. в случае линейных систем с полностью программным управлением невозможно управлять дисперсией распределения.

Ниже представлен носитель равномерного распределения состояний системы для случая

$$N = M = T = B = I,\ A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix},$$

[3] $\mathcal{E}(q, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle l, x \rangle \le \langle l, q \rangle + \langle l, Ql \rangle^{1/2},\ \forall l \in \mathbb{R}^n\}$

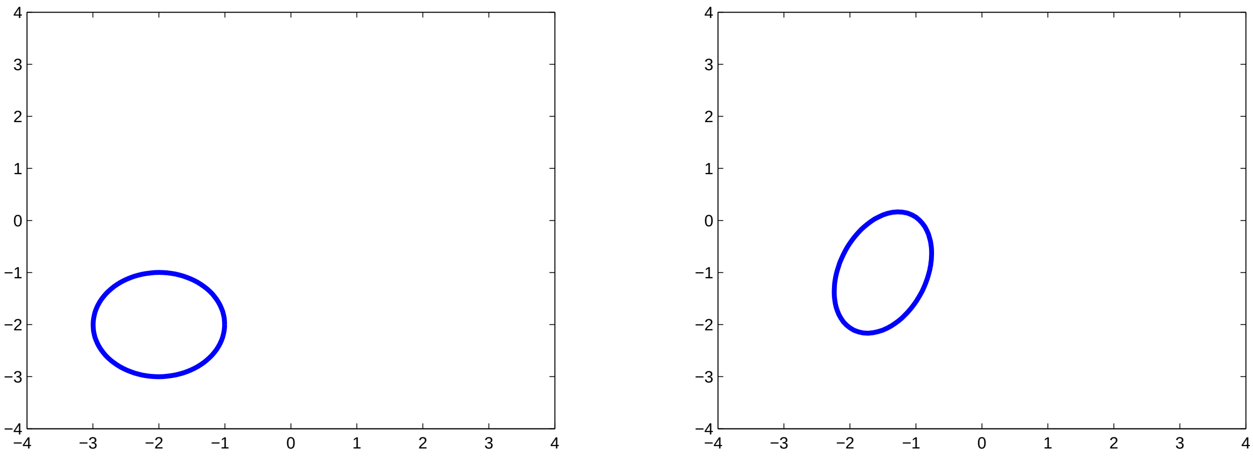

Рис. 3: Носитель распределения, $t = 0$, $t = 1$

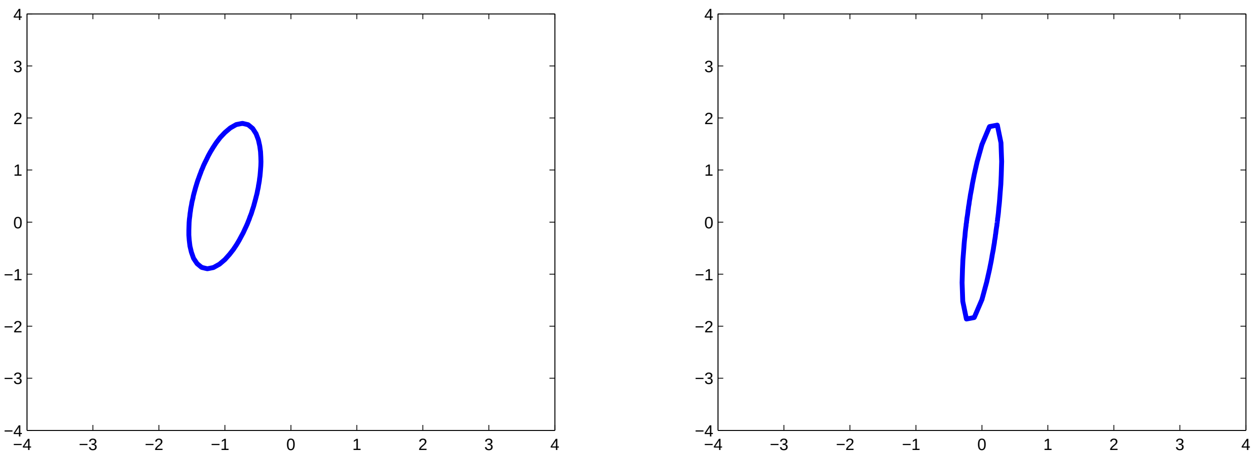

Рис. 4: Носитель распределения $t = 2$, $t = 4$

Пример 1.4. *Пусть* $p_0(x) = \frac{1}{L}\delta_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)}(x)$, *т.е. для любой непрерывно дифференцируемой функции* $\eta(x)$

$$\int\limits_{R^3} \delta_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)}(x)\eta(x)ds = \int\limits_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)} \eta(x)dl, \qquad L = \int\limits_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)} dl$$

(множитель L *введён для нормировки плотности). Тогда из (1.18) получим*

$$p(t,x) = \frac{1}{L|X(t,t_0)|}\delta_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)}\left(X(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right),$$

или

$$p(t,x) = \frac{1}{L|J_{\varphi_t}|}\delta_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)}\left(\varphi_t^{-1}(x)\right).$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L|J_{\varphi_t}|}\delta_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)}\left(\varphi_t^{-1}(x)\right)\eta(x)ds_x = \{x = \varphi(z)\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L}\delta_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)}(z)\eta(\varphi_t(z))ds_z =$$

$$= \frac{1}{L}\int\limits_{\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0)} \eta(\varphi_t(z))dl_z = \frac{1}{L|J_{\varphi_t}|}\int\limits_{\varphi_t(\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0))} \eta(x)dl_x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L|J_{\varphi_t}|}\delta_{\varphi_t(\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0))}(x)\eta(x)ds_x,$$

т.е.

$$p(t,x) = \frac{1}{L|J_{\varphi_t}|}\delta_{\varphi_t(\partial\mathcal{E}(q_0,Q_0))}(x),$$

или

$$p(t,x) = \frac{1}{L|X(t,t_0)|}\delta_{\partial\mathcal{E}(q,Q)}(x),$$

где q *и* Q *находятся из системы (1.28).*

Ниже представлен носитель распределения состояний системы для случая

$$N = M = T = B = I,\ A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 \end{pmatrix},$$

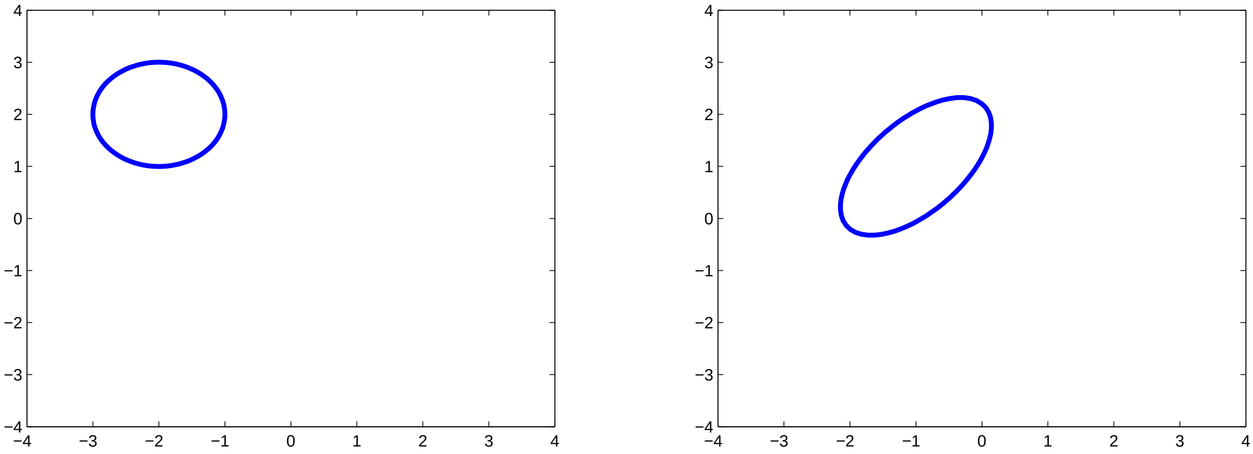

Рис. 5: Носитель распределения, $t = 0$, $t = 1$

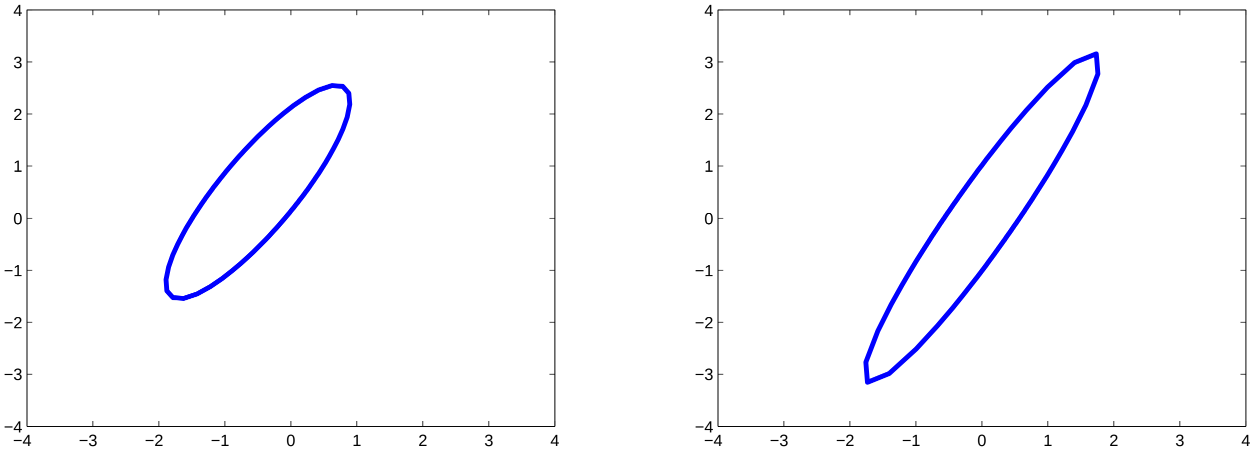

Рис. 6: Носитель распределения $t = 2$, $t = 3$

1.5 Общий случай интегрального функционала

Как было показано выше в примере с линейным целевым функционалом, даже при "линейности" постановки задачи в ходе решения функция цены зависит от распределения вообще говоря нелинейно. Поэтому, идея отказа от линейности, например, в задаче с квадратичным примером не сильно усложняет решение, как будет показано ниже.

Итак, в данном разделе будет рассмотрена более общая задача: теперь функционал в задаче минимизации в общем случае нелинейно зависит от распределения. Для начала вернемся к общей постановке задачи для динамической системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1.29}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} F(t, u, p(t, \cdot))dt + \psi(t_1, p(t_1, \cdot)) \longrightarrow \inf_{u \in U}. \tag{1.30}$$

Здесь функционал $F(t, u, p(t, \cdot))$ непрерывен по параметрам t, u и по аргументу p. Аналогично задаче с линейным функционалом, определим множество $\tilde{\mathcal{F}}(t)$ как пространство функционалов $p(t, \cdot)$, для которых выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(t, x)dx = 1,$$

$p(t, x)dx$ определяет неотрицательную меру, и функционал F определен и удовлетворяет вышеперечисленным свойствам. *Функцией цены* будем называть следующее отображение:

$$V(t_0, p_0) = \inf_{u \in U} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t, u, p(t, \cdot))dt + \psi(t_1, p(t_1, \cdot)) \middle| p(t_0, \cdot) = p_0(\cdot) \in \tilde{\mathcal{F}} \right\}.$$

Если внимательнее присмотреться к выводу принципа оптимальности в начале этой секции, можно заметить, что существенным был лишь факт непрерывной зависимости подынтегральных выражений от параметра t, тогда как линейность по p нигде не использовалась. Поэтому шаги вывода принципа оптимальности и аналога уравнения

Гамильтона-Якоби-Беллмана претерпевают лишь “косметические” преобразования. В результате **принцип оптимальности** можно записать следующим образом:

$$V(t_0,p_0)=\inf_{u\in U}\left\{\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma}F(t,u,p(t,\cdot))dt+V(t_0+\sigma,p(t_0+\sigma,\cdot))\right\}, \tag{1.31}$$

а уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}V(t,p(t,\cdot))+\inf\limits_{u\in U}\left\{-V'_p\langle\frac{\partial}{\partial x},p(t,x)f(t,x,u)\rangle+F(t,u,p(t,\cdot))\right\}=0\\ V(t_1,p(t_1,\cdot))=\psi(t_1,p(t_1,\cdot)). \end{cases} \tag{1.32}$$

Теорема 1.3. *Если функция $W(t,p)$ дифференцируема по t и по p (в смысле производной по Фреше), и $W(t,p)$ удовлетворяет (1.32) в некоторой области $G\subseteq T\times\tilde{\mathcal{F}}$, то в этой области*

$$V(t,p)\geq W(t,p),$$

причём если существует такое управление u^*, что для соответствующего ему распределения $p^*(t,x)$ выполнено

$$-W'_p\langle\frac{\partial}{\partial x},p^*(t,x)f(t,x,u^*)\rangle+F(t,u^*,p^*)=$$

$$=\min_{u\in U}\left\{-W'_p\langle\frac{\partial}{\partial x},p(t,x)f(t,x,u)\rangle+F(t,u,p)\right\},$$

то $V(t,p)=W(t,p)$.

В случае линейной системы также можно свести задачу (1.32) к замкнутой системе уравнений. Пусть

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\ \ t\in[t_0,t_1], \tag{1.33}$$

и требуется разрешить задачу минимизации

$$J[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\langle\bar{x}(t),S(t)\bar{x}(t)\rangle+\langle u,N(t)u\rangle+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\langle x,M(t)x\rangle p(t,x)dx\right)dt+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\langle x,T_1x\rangle p(t_1,x)dx+\langle\bar{x}(t_1),T_2\bar{x}(t_1)\rangle\longrightarrow\inf_{u\in U}.$$

Здесь слагаемые $\langle\bar{x}(t), S(t)\bar{x}(t)\rangle$ и $\langle\bar{x}(t_1), T_2\bar{x}(t_1)\rangle$ уже нелинейно зависят от распределения $p(t,x)$. Для этого случая уравнения Риккати (1.24) и (1.25) записываются соответственно

$$\begin{cases} \dot{P} + A'P + PA + M = 0 \\ P(t_1) = T_1. \end{cases} \tag{1.34}$$

$$\begin{cases} \dot{K} + S + A'K + KA - (P+K)BN^{-1}B'(P+K) = 0 \\ K(t_1) = T_2. \end{cases} \tag{1.35}$$

причем остальные шаги решения аналогичны случаю с линейным функционалом.

1.6 Применимость метода

Таким образом, в данной секции был проведён анализ систем с состояниями в виде распределений при помощи методов динамического программирования с использованием уравнения Лиувилля, были выведены уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана для задач с распределениями, исследовано поведение линейных систем с квадратичными функционалами, для которых были разрешены уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана и построены графические иллюстрации динамики распределений при различных заданных начальных распределениях.

Метод решения задач оптимального управления при помощи уравнения Лиувилля и функции плотности позволяет рассматривать эволюцию всего пучка траекторий сразу, однако имеет свои ограничения: в частности, этот метод значительно усложняет структуру уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Теперь функция цены определена не в привычном $n + 1$ мерном пространстве, а пространстве линейных непрерывных функционалов, что в настоящий момент ставит трудные для исследования задачи существования и единственности решения.

Выше было найдено решение для линейной системы с квадратичным функционалом, однако, если, например, расширить множество линейных систем путем добавления неопределенности в саму матрицу движения линейной системы (другими словами, перейти к билинейному случаю), функция цены от распределения в случае, если она вообще существует, вообще говоря не обязана иметь квадратичную форму.

Тем не менее, задачи с неопределенностью в самой матрице движения имеют важное практическое применение, и они будут рассмотрены в следующих частях этой работы наряду с исследованием задач построения множеств достижимости для невыпуклых систем.

2 Звездные множества достижимости. Дифференциальное уравнение для калибровочной функции

Исследование методов нахождения множеств достижимости различных систем является одним из актуальных направлений современной теории оптимального управления. К настоящему времени, особое развитие получили методы, применимые к системам с выпуклыми множествами достижимости, во многом благодаря примечательному аппарату опорных функций. Данный подход позволил записать эволюционные уравнения системы в терминах уравнений в частных производных. Например, в работе [41] выводится уравнение для дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x_0 \in X_0,\ t \in [t_0, t_1]$$

в терминах расстояния по Хаусдорфу между двумя множествами $h(A,B)$. Обозначим множество достижимости дифференциального включения в момент времени t за $X[t]$. В своей работе А.Б. Куржанский и Т.Ф. Филиппова доказали, что при наложении некоторых условий множество достижимости подчиняется следующему эволюционному уравнению:

$$\lim_{\sigma \Rightarrow +0} \sigma^{-1} h\left(X[t+\sigma], \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t,x)\}\right) = 0.$$

В выпуклом случае, это уравнение можно записать в терминах опорных функций. Обозначим за

$$\rho(l,t) = \sup_{x \in X[t]} \langle x, l \rangle.$$

Тогда выпуклое множество достижимости можно восстановить как

$$X[t] = \{x \in R^n : \langle x, l \rangle \le \rho(l,t)\}.$$

Более того, эволюционное уравнение переписывается как

$$\frac{\partial^+ \rho(l,t)}{\partial t} = \max_{x \in \partial X[t]} \rho(l, F(t,x)),$$

где

$$\partial X[t] = \{x \in X[t] : \langle x, l \rangle = \rho(l, t)\}.$$

К сожалению, несмотря на удобство использования, метод опорных функций имеет ряд ограничений, наиболее существенное из которых - выпуклость исходной задачи.

В данной секции рассматривается альтернативный способ задания множества достижимости: при помощи калибровочных функций Минковского:

$$r(l, t) = \max\{\lambda \in R : \lambda l \in X[t]\}.$$

Этот метод позволяет выделить звездные множества, т.е. такие множества

$$Z \subseteq R^n : \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda Z \subseteq Z.$$

В секции выводится аналог эволюционного уравнения в терминах калибровочных функции, а также рассматривается, как изменится результат в случае, если есть фазовые ограничения на состояния системы, или в случае движущегося центра звезды.

2.1 Линейные системы. Выпуклый и звездный случаи

2.1.1 Выпуклый случай

В продолжение предыдущей части работы рассмотрим n - мерную линейную систему с аддитивной функцией управления:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

с непрерывными матричными коэффициентами $A(t)$ и $B(t)$. Пусть управление $u(t)$ представляет собой измеримую функцию с геометрическими ограничениями:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow u(t) \in U(t),$$

где $U(t)$ - выпуклое компактно-значное отображение, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. В таком случае при выпуклом начальном множестве $X[t_0] = X_0$, свойство выпуклости множества достижимости $X[t]$ будет сохраняться. Действительно, для двух произвольных т $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из множества $X[t]$ в силу выпуклости начального множества существуют константа $\lambda \in [0,1]$:

$$\bar{x}_0 = \lambda x_1(t_0) + (1-\lambda)x_2(t_0) \in X[t_0].$$

Далее, для любого момента времени $t \in [t_0, t_1]$

$$\dot{\bar{x}} = \frac{d(\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t))}{dt} = \lambda\dot{x}_1(t)+(1-\lambda)\dot{x}_2(t) = \lambda(A(t)x_1+B(t)u_1)+(1-\lambda)(A(t)x_2+B(t)u_2) =$$

$$= A(t)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + B(t)(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) = A(t)\bar{x} + B(t)\bar{u},$$

где $\bar{u} \in U(t)$ в силу выпуклости множества $U(t)$. Таким образом получили, что $\bar{x} \in X[t]$, что и требовалось показать.

Для выпуклого случая уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана записывается в терминах опорных функций:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \max_{U \in U(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, Ax + Bu \right\rangle \right\} = 0$$

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, Ax \right\rangle + \rho\left(B'\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \middle| U(t) \right) = 0.$$

В частности, как показано в [43] с использованием элементов теории выпуклого анализа и теории двойственности, множество достижимости можно искать как линии уровня функции цены

$$X[t] = \{x \in R^n | V(t,x) \leq 0\},$$

где

$$V(t,x) = \max_{l \in R^n} \Phi(t,x,l).$$

Функция $\Phi(t,x,l)$ в свою очередь может быть найдена как

$$\Phi[t,x,l] = s(t,t_0,l)x - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(s(\tau,t_0,l)B(\tau)|U(\tau))d\tau - \frac{1}{4}\langle l,l\rangle - \rho(l|X_0),$$

где $s(t,t_0,l)$ - решение смежного уравнения

$$\dot{s} = -sA(t), \;\; s(t_0) = l'.$$

Более того, как было показано в первой части работы, в случае с выпуклым минимизационным функционалом функция цены также будет выпуклой. Для этого достаточно, например, положить $p(t_0,x) = \delta(x-x_0)$ в задаче 1.19 и получить квадратичную функцию цены. Таким образом, аддитивное управление в линейной системе сохраняет свойство выпуклости и позволяет использовать аппарат теории выпуклого анализа для разрешения проблем оптимизации и нахождения множества достижимости динамических систем.

2.1.2 Звездный случай

Теперь рассмотрим другую постановку задачи:

$$\dot{x} = A(t)x, \; A(t) \in \mathcal{A}(t),$$

где отображение $\mathcal{A}(t)$ - непрерывное по Хаусдорфу, компактно-значное и в каждый момент $t \in [t_0,t_1]$ задает геометрические ограничения на коэффициенты матрицы A.

В этом случае, даже при выпуклой структуре множества $\mathcal{A}(t)$ нетрудно показать, что результирующие множества достижимости уже не будут выпуклыми.

Действительно, рассмотрим простейшую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = ux, \;\; u \in [0,1], \\ x(t_0) \in [-1,1], \;\; y(t_0) = 0 \end{cases}$$

на отрезке времени $[0,1]$.

Несложно получить решение этой системы. Действительно, для начального значения $(x_0, 0)$ возможные концы траекторий в момент времени $t = 1$ задаются как

$$X[t=1] = \bigcup_{x_0 \in [-1,1]} \left(x_0, x_0 \int\limits_0^1 u(t)dt \right) = \bigcup_{x_0 \in [-1,1]} \left(\{x_0\} \times (x_0 * [0,1]) \right).$$

Теперь несложно видеть, что множество достижимости не будет выпукло. В самом деле, возьмем два противоположных конца:

$$x_0^1 = -1, \; u^1(t) \equiv 0; \;\; x_0^2 = 1, u^2(t) \equiv 1.$$

Соответствующие точки $P_1 = (-1,0)$, $P_2 = (1,1)$ принадлежат множеству достижимости по определению. Однако $\forall \lambda \in [0,1]$

$$\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 = (1-2\lambda, 1-\lambda) \notin X[t=1].$$

Множество достижимости для разных моментов времени изображено далее:

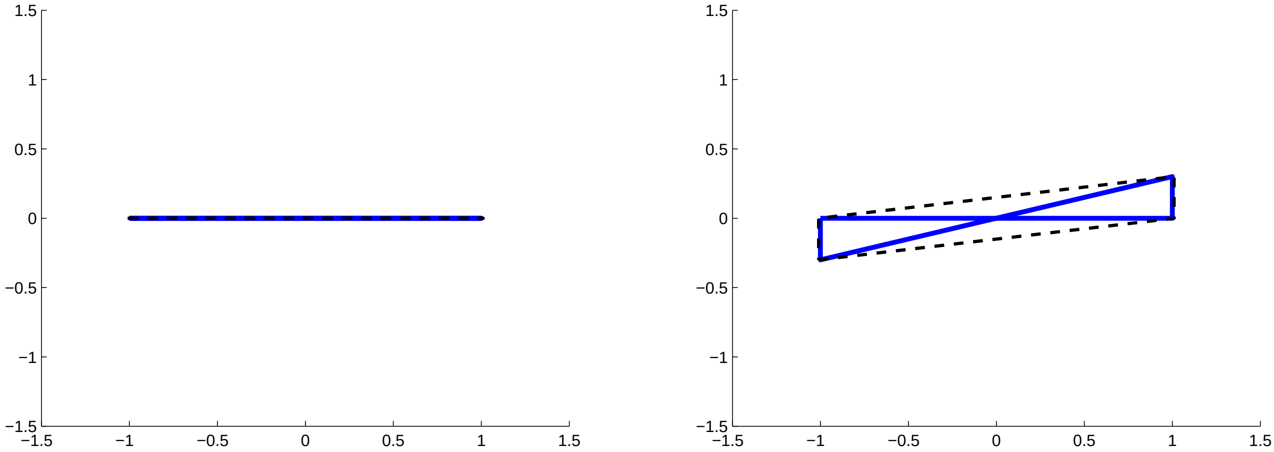

Рис. 7: Множества достижимости $X[t=0]$, $X[t=0.3]$ и их выпуклые оболочки

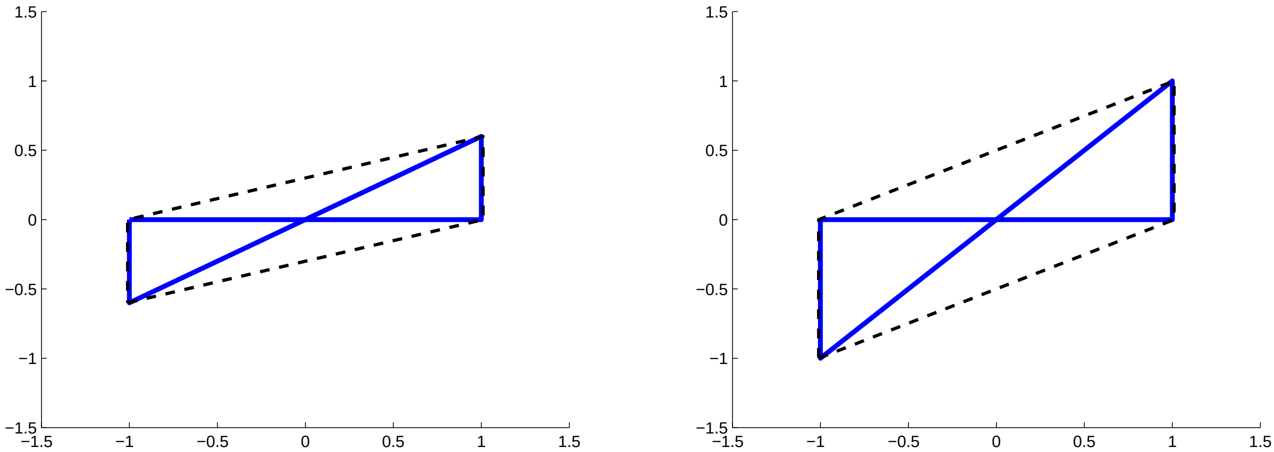

Рис. 8: Множества достижимости $X[t=0.6]$, $X[t=1]$ и их выпуклые оболочки

Легко видеть, что несмотря на невыпуклую структуру, множество достижимости звездное: $\forall x \in X[t], \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x \in X[t]$. К сожалению, к звездной структуре уже неприменим метод опорных функций, т.к. он заведомо не различает само множество от его выпуклой оболочки. Тем не менее, задача, в которой неопределенность заложена в самой матрице движения (и возможно, в качестве аддитивной компоненты, что не повлияет на звездную структуру), представляет собой особую практическую ценность хотя бы потому, что в реальности все измерения, в том числе и коэффициентов матрицы, производятся с ошибками. Т.е. вместо уравнения детерминированного движения

$$\dot{x} = Ax + f(t)$$

получаем уравнение

$$\dot{x} = (A + \varepsilon V)x + f(t) + \mu,$$

где скаляр ε и вектор μ принимают произвольные значения из некоторых выпуклых компактов.

Таким образом, далее будет рассмотрен аппарат, позволяющий находить множества достижимости, решая дифференциальное уравнение для аналога опорной функции в данном случае - калибровочной функции Минковского.

2.2 Звездные множества. Эволюционное уравнение

Примем следующие обозначения: $comp(R^n)$ - множество компактных подмножеств R^n, $conv(R^n)$ - множество выпуклых компактов, $St(C, R^n)$ - множество компактных звездных подмножеств R^n, относительно C, т.е. таких компактных множеств Z, что $\forall\lambda \in [0,1] \Rightarrow (1-\lambda)C + \lambda Z \subseteq Z$. Пусть также $St(R^n) = St(0, R^n)$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x) = \bigcup_{a \in A(t)} f(t,x;a), t \in T = [t_0, t_1], x(t_0) = x_0 \in X_0, \tag{2.1}$$

где $X_0 \in comp(R^n)$, $f(t,x;a)$ и $f_x(t,x;a)$ непрерывны по совокупности переменных и $A(t)$ - непрерывное по Хаусдорфу компактнозначное отображение в R^m. Обозначим за $x[t] = x(t, t_0, x_0)$ решение дифференциального включения (2.1) (т.е. абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую начальному условию и дифференциальному включению почти всюду [48]). Областью достижимости назовём множество

$$X[t] = X(t, t_0, X_0) = \{x[t] : x[t_0] \in X_0\}.$$

Обозначим за $graph_t F = \{(x,y) \in R^{2n} | y \in F(t,x)\}$ график многозначного отображения $F(t,x)$, и пусть $B_{0,1}$ - шар единичного радиуса в R^n с центром в начале координат. Сделаем следующее предположение:

Предположение 1. *Существует малое $\varepsilon > 0$, такое, что система (2.1) удовлетворяет свойствам:*

1. *Начальное множество $X_0 \in St(R^n)$,*

2. *График системы (2.1) $graph_t F \in St(R^{2n})$ для любого момента времени $t \in T$,*

3. *Окрестность нуля $\varepsilon B_{0,1} \subseteq X[t]$ для любого момента времени $t \in T$.*

Третье требование легко проверяется по виду $graph_t F \in St(R^{2n})$. Например, достаточным условием будет являться

$$\varepsilon B_{0,1} \subseteq X_0,\ \forall t \in T (0, \varepsilon B_{0,1}) \subseteq graph_t F.$$

Тогда из [41] известно, что при выполнении Предположения 1 множество достижимости будет сохранять звездную структуру для каждого фиксированного момента времени: $X[t] \in St(R^n)$.

Действительно, рассмотрим произвольный $x \in X[t]$. По определению, существует $x_0 \in X_0 : x(t, t_0, x_0) = x$. Рассмотрим динамику $\lambda x[t]$ для произвольного $\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda x_0 \in X_0 \text{ по первому предположению,}$$

$$\lambda \dot{x} \in \lambda F(t, x) \subseteq F(t, \lambda x) \text{ по второму предположению,}$$

т.е.

$$\forall t \in T \Rightarrow \lambda x[t] \in X[t] \Rightarrow \lambda x \in X[t] \Rightarrow X[t] \in St(R^n).$$

Более того, третье условие обеспечивает выполнение включения $0 \in intX[t]$, и при таких условиях многозначная функция $X[t]$ является единственным решением следующего эволюционного уравнения ([41]):

$$\lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} h(X[t + \sigma], \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\}) = 0, \;\; t \in T, \tag{2.2}$$

$$X[t_0] = X_0,$$

где $h(A, B)$ - метрика Хаусдорфа. Нас будет интересовать дифференциальный аналог этого эволюционного уравнения в терминах калибровочной функции.

2.3 Калибровочные функции

Для элементов $Z \in St(R^n)$ и ненулевых векторов $l \in R^n$ введем понятие калибровочной функции (аналог функционала Минковского [50]):

$$r(l|Z) = \max\{\lambda \in R | \lambda l \in Z\},\ r(0|Z) = +\infty.$$

Калибровочная функция звездного множества обладает целым рядом примечательных свойств:

1. Зная калибровочную функцию звездного множества, можно однозначно восстановить само множество:
$$Z\{l \in R^n : r(l|Z) \geq 1\},$$

2. Для любой положительной константы C :
$$r(Ck|Z) = \frac{1}{C} r(k|Z).$$

3. Любой вектор z звездного множества Z может быть параметризован ненулевым направлением $k \in R^n$ и числом $\nu \in [0, 1]$:
$$z = \nu r(k|Z)k,$$
причем такое представление не единственно, т.к. для любой положительной константы C :
$$z = \nu r(Ck|Z)Ck,$$

4. Калибровочная объединения двух множеств:
$$r\left(k|Z_1 \bigcup Z_2\right) = \max\{r(k|Z_1), r(k|Z_2)\},$$

5. Калибровочная пересечения двух множеств:
$$r\left(k|Z_1 \bigcap Z_2\right) = \min\{r(k|Z_1), r(k|Z_2)\}.$$

Обозначим за $r(l|Z) = r(l)$, тогда верен следующий технический результат, который будет затем использован в доказательстве основного утверждения секции:

Теорема 2.1. *Пусть множество $Z \in St(R^n)$, в некоторой окрестности ненулевого вектора l существует $\delta > 0 : r(l) > \delta$ и функция $r(l)$ дифференцируема по l. Пусть также для непрерывно дифференцируемой функции $f(z)$ на множестве Z, константы $\sigma \geq 0$ и непрерывно дифференцируемой векторной функции $c(l, \sigma)$:*

$$\forall \sigma < \bar{\sigma} \Rightarrow \{\lambda \in R : \exists z \in Z, g(\lambda, l, z) = \lambda l - z + \sigma f(z) + c(l, \sigma) = 0\} \neq \emptyset, \tag{2.3}$$

$$\exists C > 0 : \lim_{\sigma \to +0} c(l, \sigma) = Cl. \tag{2.4}$$

Тогда существует малое $\hat{\sigma} < \bar{\sigma}$, такое, что $\forall \sigma < \hat{\sigma}$ решение $\lambda^*(\sigma, l)$ задачи максимизации

$$\begin{gathered} \lambda \to \max_{\lambda \in R, k \in R^n, \nu \in [0,1]} \\ s.t.\ g(\lambda, l, \nu r(k) k) = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

будет непрерывно дифференцируемо по (l, σ) :

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial l} = \left\langle \lambda^* + \frac{\partial c}{\partial l}, \mu(l, \sigma) \right\rangle,$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} = \left\langle f(z^*) + \frac{\partial c}{\partial \sigma}, \mu(l, \sigma) \right\rangle,$$

где $z^* = \nu^* r(k^*) k^*$ - соответствующий вектор множества Z, на котором достигается максимум, а $\mu = \mu(l, \sigma)$ - непрерывные по σ множители Лагранжа ограничения $g(\lambda, l, \nu r(k) k) = 0$.

Фактически, теорема утверждает о непрерывной дифференцируемости функции $r(l, \sigma) = r(l|Z(\sigma))$. Первые два требования (про непустоту специального множества и предел функции $c(l, \sigma)$) накладываются с целью обеспечить существование предела $r(l, \sigma)$ при $\sigma \to +0$.

Доказательство. Для начала заметим, что в силу того, что множество

$$\bigcup_{z \in Z} \{z - \sigma f(z) - c(l, \sigma)\}$$

ограничено, задача (2.5) представляет собой максимизацию непрерывной функции $F(\lambda, z) = \lambda$ на компактном множестве $\Lambda \times Z$ для некоторого достаточно широкого отрезка Λ, причем это компактное множество не пусто в силу ограничения (2.3); поэтому задача максимизации имеет решение и утверждение теоремы корректно.

Множетели Лагранжа по определению представляют собой вектор $\mu \in R^n$:

$$\begin{cases} \langle \mu, l \rangle = -1 \\ \left\langle \mu, (I - \sigma B) \frac{\partial(\nu r(k) k)}{\partial k_i} \right\rangle = 0, i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{2.6}$$

где I - единичная матрица, а $B = f'(z)$. Здесь мы не учитываем условия, связанные с ν, т.к. за счет выбора множителей Лагранжа для ограничения $\nu \in [0, 1]$ всегда можно добиться выполнения этих условий.

Доказательство существования множителей Лагранжа будет разбито на три этапа. В начале будет показано, что уравнения

$$\left\langle \mu, (I - \sigma B) \frac{\partial \nu r(k) k}{\partial k_i} \right\rangle = 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

имеют ненулевое решение μ для максимизаторов основной задачи k, ν. Затем, будет показано, что это решение не ортогонально вектору l для любого $\sigma \leq \hat{\sigma}$, и как следствие, не ортогонально любому вектору из малой окрестности вектора l. Поэтому в силу однородности уравнения (2.7) можно всегда нормировать множители так, что выполнено

$$\langle \mu, l \rangle = -1.$$

Наконец, после применения теоремы о дифференцировании условного максимума [52] будет получено утверждение теоремы, т.к.

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial l} = \left\langle \left. \frac{\partial g(\lambda, l, z)}{\partial l} \right|_{z=z^*}, \mu \right\rangle = \left\langle \lambda^* + \frac{\partial c}{\partial l}, \mu \right\rangle,$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} = \left\langle \left. \frac{\partial g(\lambda, l, z)}{\partial \sigma} \right|_{z=z^*}, \mu \right\rangle = \left\langle f(z^*) + \frac{\partial c}{\partial \sigma}, \mu \right\rangle.$$

Итак, обозначим за $W(k) = \left\{ \frac{\partial r(k) k}{\partial k_i} \right\}_{i=1,\ldots,n}$.

Лемма 2.2. *Задача нахождения μ, при котором выполнено (2.7), имеет ненулевое решение $\mu = \mu(l, \sigma)$.*

Доказательство. Нас интересует нетривиальный случай $\nu \neq 0$. Запишем систему (2.7) в матричном виде:

$$W(k)^T (I - \sigma B)^T \mu = 0.$$

Существование ненулевого решения эквивалентно тому, что строки матрицы $W^T(I - \sigma B)^T$ линейно зависимы, или определитель $|W^T(I - \sigma B)^T| = 0$.

Ввиду того, что

$$\frac{\partial r(k)k}{\partial k_i} = \frac{\partial r(k)}{\partial k_i} k + r(k)e_i,$$

для любого вектора $y \in R^n \Rightarrow Wy = \left\langle \frac{r(k)}{\partial k}, y \right\rangle k + r(k)y.$

В силу однородности функции $r(y)$, для положительной константы C выполнено тождество

$$r(y) = Cr(Cy).$$

продифференцируем это тождество в окрестности $C = 1:$

$$0 = r(y) + \left\langle \frac{r(y)}{\partial y}, y \right\rangle.$$

но в таком случае

$$Wk = \left\langle \frac{r(k)}{\partial k}, k \right\rangle k + r(k)k = \left(\left\langle \frac{r(k)}{\partial k}, k \right\rangle + r(k) \right) k = 0,$$

поэтому строки матрицы W линейно зависимы, $|W| = 0$. А ввиду того, что

$$|W^T(I - \sigma B)^T| = |W^T||(I - \sigma B)^T| = |W||(I - \sigma B)^T| = 0,$$

существует ненулевое решение $\mu(l, \sigma)$ системы (2.7). $\square$

Лемма 2.3. *Существует малое $\hat{\sigma} > 0$, такое, что для любого положительного $\sigma \leq \hat{\sigma}$ вектор l не ортогонален ядру матрицы $W^T(I - \sigma B)^T$.*

Доказательство. Предположим противное: существует последовательность $\sigma_n \to 0$, такая, что вектор l ортогонален ядру матрицы $W^T(I-\sigma B)^T$. Тогда для ненулевого

$$\mu_n \in Ker(W^T(I-\sigma B)^T),\ \|\mu_n\| = \|1\|,$$

следует $\langle \mu_n, l\rangle = 0$. Выделим из ограниченой последовательности μ_n сходящуюся подпоследовательность $\mu_n \to \mu^*$, тогда $\|\mu^*\| = 1$ и $\langle l, \mu^*\rangle = 0$.

Оптимальное значение k_n удовлетворяет уравнению

$$\nu_n r(k_n)k_n = \lambda l + \sigma f(z) + c(l,\sigma).$$

В силу (2.4) легко показывается, что оптимальное значение $k_n \to l$, поэтому ввиду непрерывной дифференцируемости функции $r(k)$

$$W(k_n)^T(I-\sigma B)^T \to W(l)^T.$$

Тогда

$$0 = \|W(l)^T\mu^*\| = \left\| \frac{\partial r(l)}{\partial(l)}\langle l,\mu^*\rangle + r(l)\mu^* \right\| = \|r(l)\mu^*\| > \delta > 0.$$

Пришли к противоречию. □

В результате мы показали, что т.к. система (2.7) имеет непустое ядро, неортогональное вектору l, то существуют множители Лагранжа, которые в силу непрерывности наложенных на них ограничений представляют собой непрерывные функции от σ. Наконец, применив теорему о дифференцировании условного максимума, приходим к утверждению теоремы. □

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.1 и функция $c(l,\sigma)$ дифференцируема по σ. Тогда*

$$r(l|z - \sigma f(z) - c(l,\sigma) + o(\sigma)B_{0,1}) = r(l|z - \sigma f(z) - c(l,\sigma)) + \|l\|^{-1}o(\sigma),$$

где

$$\lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0.$$

Доказательство. Обозначим за $\lambda_{1,2}$ решения следующих задач максимизации:

$$\lambda_1 \to \max_{k\in R^n,\, \lambda_1\in R, \nu\in[0,1], y\in B_{0,1}}$$
$$s.t.\ \lambda_1 l - z(k) + \sigma f(z(k)) + c(l,\sigma) - o(\sigma)y = 0;$$

$$\lambda_2 \to \max_{k\in R^n,\, \lambda_2\in R, \nu\in[0,1]}$$
$$s.t.\ \lambda_2 l - z(k) + \sigma f(z(k)) + c(l,\sigma) = 0,$$

где $z(k) = r(k|Z)k$.

Тогда по Теореме 2.1 существуют непрерывные множители Лагранжа основных ограничений $\mu_1(\sigma), \mu_2(\sigma) \in R^n$ соответственно. Обозначим за $k_1(\sigma)$ и $k_2(\sigma)$ соответствующие решения задач максимизации. Тогда, домножим основные ограничения задачи на μ_i и учтем, что в силу условия на множители Лагранжа по λ, $\langle \mu_i(\sigma), l\rangle = -1$:

$$\lambda_1 = \langle -z(k_1) + \sigma f(z(k_1)) + c(l,\sigma), \mu_1\rangle - o(\sigma)\langle y, \mu_1\rangle,$$

$$\lambda_2 = \langle -z(k_2) + \sigma f(z(k_2)) + c(l,\sigma), \mu_2\rangle.$$

Тогда

$$\|\lambda_2 - \lambda_1\| = \|\langle -z(k_2) + \sigma f(z(k_2)) + c(l,\sigma), \mu_2\rangle - \langle -z(k_1) + \sigma f(z(k_1)) + c(l,\sigma), \mu_1\rangle + o(\sigma)\langle y, \mu_1\rangle\|,$$

$$\|\lambda_2 - \lambda_1\| = \sigma \left\| \left\langle \frac{-z(k_2) + \sigma f(z(k_2)) + c(l,\sigma) + z(l) - c(l,0)}{\sigma}, \mu_2 \right\rangle - \right.$$
$$\left. - \left\langle \frac{-z(k_1) + \sigma f(z(k_1)) + c(l,\sigma) + z(l) - c(l,0)}{\sigma}, \mu_1 \right\rangle + o(1)\langle y, \mu_1\rangle \right\|$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\lim_{\sigma\to+0} \left\| \left\langle \frac{-z(k_2(\sigma)) + \sigma f(z(k_2(\sigma))) + c(l,\sigma) + z(l) - c(l,0)}{\sigma}, \mu_2(\sigma) \right\rangle - \right.$$
$$\left. - \left\langle \frac{-z(k_1(\sigma)) + \sigma f(z(k_1(\sigma))) + c(l,\sigma) + z(l) - c(l,0)}{\sigma}, \mu_1(\sigma) \right\rangle + o(1)\langle y(\sigma), \mu_1(\sigma)\rangle \right\| = 0.$$

Ввиду дифференцирования ограничений задачи и того факта, что

$$\lim_{\sigma\to+0} k_i(\sigma) = l,$$

следует

$$\lim_{\sigma\to+0} \left\langle \frac{-z(k_i(\sigma)) + \sigma f(z(k_i(\sigma))) + c(l,\sigma) + z(l) - c(l,0)}{\sigma}, \mu_i(\sigma) \right\rangle =$$

$$= \lim_{\sigma\to+0} \left(\left\langle \frac{\partial(-z(k) + \sigma f(z(k)))}{\partial k} \frac{\partial k(\sigma)}{\partial \sigma} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial c(l,\sigma)}{\partial \sigma}, \mu_i(\sigma) \right\rangle \right) = \langle c'_\sigma(l,0), \mu_i(0) \rangle.$$

Поэтому,

$$\lim_{\sigma\to+0} \left\| \left\langle \frac{-z(k_2(\sigma)) + \sigma f(z(k_2(\sigma))) + c(l,\sigma) + z(l) - c(l,0)}{\sigma}, \mu_2(\sigma) \right\rangle - \right.$$

$$\left. - \left\langle \frac{-z(k_1(\sigma)) + \sigma f(z(k_1(\sigma))) + c(l,\sigma) + z(l) - c(l,0)}{\sigma}, \mu_1(\sigma) \right\rangle + o(1)\langle y(\sigma), \mu_1(\sigma) \rangle \right\| =$$

$$= \| \langle c'_\sigma(l,0), \mu_2(0) - \mu_1(0) \rangle \| = 0,$$

т.к.

$$\mu_1(0) = \mu_2(0).$$

□

2.4 Уравнение в частных производных для калибровочной функции множества достижимости

Вернемся к нашей динамической системе (2.1). примем обозначение $r(l|X[t]) = r(l,t)$, тогда для функции $r(l,t)$ выполнена следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть для системы (2.1) выполнено Предположение 1. Тогда для любого ненулевого направления $l \in R^n$, такого, что функция $r(l,t)$ дифференцируема по l в некоторой его окрестности, существует правая производная $\partial^+ r(l,t)/\partial t$, причем*

$$\frac{\partial^+ r(l,t)}{\partial t} = \max_{a\in A}\left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t,z;a)\right\rangle,$$

где $z = r(l,t)l$.

Доказательство. По определению расстояния по Хаусдорфу, уравнение (2.12) эквивалентно включениям:

$$X[t+\sigma] \subseteq \bigcup_{x\in X[t]} \{x + \sigma F(t,x)\} + o(\sigma)B_{0,1}, \tag{2.8}$$

$$\bigcup_{x\in X[t]} \{x + \sigma F(t,x)\} \subseteq X[t+\sigma] + o(\sigma)B_{0,1}. \tag{2.9}$$

Из включения (2.8) и свойств калибровочной функции Минковского получаем

$$r(l,t+\sigma) = r(l|X[t+\sigma]) \le r\left(l\,\middle|\,\bigcup_{x\in X[t]}\{x+\sigma F(t,x)\} + o(\sigma)B_{0,1}\right).$$

Однако по Теореме 2.1 функция

$$r\left(l\,\middle|\,\bigcup_{x\in X[t]}\{x+\sigma F(t,x)\}\right)$$

дифференцируема по l, поэтому после применения Теоремы 2.4 получим неравенство

$$r(l,t+\sigma) \le r\left(l\,\middle|\,\bigcup_{x\in X[t]}\{x+\sigma F(t,x)\}\right) + o(\sigma)\|l\|^{-1}.$$

В добавок к этому, воспользовавшись свойством функции Минковского во включении (2.9), получим:

$$r\left(l \left| \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right.\right) \leq r(l|X[t+\sigma]+o(\sigma)B_{0,1}),$$

что после применения Теоремы 2.4 даст неравенство

$$r\left(l \left| \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right.\right) \leq r(l,t+\sigma)+o(\sigma)\|l\|^{-1}.$$

Таким образом, окончательно получаем эволюционное уравнение для множества достижимости в терминах калибровочной функции:

$$r(l,t+\sigma) = r\left(l \left| \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right.\right) + \|l\|^{-1}o(\sigma).$$

Вычтем из обеих частей уравнения $r(l,t)$ и разделим на малое σ :

$$\frac{r(l,t+\sigma)-r(l,t)}{\sigma} = \sigma^{-1}\left(r\left(l \left| \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right.\right) - r(l,t)\right) + o(1).$$

Формально перейдя к пределу при $\sigma \to +0$, получим уравнение в терминах частных производных:

$$\frac{\partial^+ r(l,t)}{\partial t} = \lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1}\left(r\left(l \left| \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right.\right) - r(l,t)\right). \qquad (2.10)$$

Причем, такой переход будет верным, если существует предел

$$L = \lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1}\left(r\left(l \left| \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right.\right) - r(l,t)\right) = \lim_{\sigma\to+0}\sigma^{-1}R(t,l,\sigma),$$

где

$$R(t,l,\sigma) = r\left(l \left| \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right.\right) - r(l,t) = r\left(l \left| \bigcup_{x\in X[t]} \{x - r(l,t)l+\sigma F(t,x)\}\right.\right).$$

Обозначим за $z = r(l,t)l$. Заметим, что $R(t,l,0) = 0$, поэтому задача нахождения предела L эквивалентна задаче поиска

$$\left.\frac{\partial R(t,l,\sigma)}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=+0}.$$

Применим к функции $R(t,l,\sigma)$ Теорему 2.1 с функциями $c(l,\sigma) = r(l,t)l$, $f(x) = -f(t,x;a)$, и дополнительной максимизацией по $a \in A(t)$. Т.к. множество $A(t)$ не зависит от σ или x, максимизация по a функции Лагранжа даст условие, эквивалентное максимизации по a функции

$$\langle -f(t,x^*(\sigma);a), \mu(\sigma)\rangle \to \max_{a\in A(t)}.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\frac{\partial R(t,l,\sigma)}{\partial \sigma} = \max_{a\in A(t)} \langle -f(t,x^*(\sigma);a), \mu(\sigma)\rangle,$$

где непрерывные множители $\mu(\sigma)$ отвечают за ограничение

$$\lambda l - x + z - \sigma f(t,x(\sigma);a) = 0.$$

Однако, при $\sigma = 0$ задача на поиск множителей сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \langle \mu, l\rangle = -1 \\ \left\langle \mu, \frac{\partial(\nu r(l,t)l)}{\partial l_i}\right\rangle = 0, \ i = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{2.11}$$

Нетрудно получить решение этой системы:

$$\mu(0) = \frac{1}{r(l,t)}\frac{\partial r(l,t)}{\partial l} = \frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}.$$

В итоге, получаем

$$L = \left.\frac{\partial R(t,l,\sigma)}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=+0} = \max_{a\in A(t)} \left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t,z;a)\right\rangle,$$

что и требовалось доказать. □

Заметим, что в силу однородности функции Минковского, уравнение для калибровочной функции может быть записано в n переменных на $n-$мерном параллелепипеде $T \times [0, 2\pi]^{n-1}$. Действительно, сделаем замену переменных:

$$l = Re(\varphi),\ R = \|l\|,\ \|e\| = 1, \varphi \in [0, 2\pi]^{n-1}.$$

В таком случае для произвольной дифференцируемой функции $g(l)$

$$\frac{\partial g}{\partial R} = \left\langle e(\varphi), \frac{\partial g}{\partial l} \right\rangle,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = Re_{\varphi}(\varphi)\frac{\partial g}{\partial l},$$

или, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial R} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(\varphi) \\ Re_{\varphi}(\varphi) \end{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial l}.$$

Поэтому,

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \begin{pmatrix} e(\varphi) \\ Re_{\varphi}(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial R} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

Однако, если дополнительно потребовать однородность функции $g(l)$, получаем

$$g(Re) = \frac{1}{R}g(e) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial R} = -\frac{1}{R^2}g(e) = -\frac{1}{R}g(Re).$$

В силу последнего неравенства

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \begin{pmatrix} e(\varphi) \\ Re_{\varphi}(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{g}{R} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

В терминах функции Минковского для Теоремы 2.1 получим задание уравнения в координатах (R, φ, t) :

$$\frac{\partial^+ r(R, \varphi, t)}{\partial t} = \max_{a \in A} \left\langle \begin{pmatrix} e(\varphi) \\ Re_{\varphi}(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{R} \\ -\frac{\partial \log r(R, \varphi, t)}{\partial \varphi} \end{pmatrix}, f(t, z; a) \right\rangle,\ \ z = Rr(R, \varphi, t)e(\varphi).$$

Теперь исключим R из уравнения: примем $R = 1$, тогда $r(1, \varphi, t) = r(\varphi, t)$, и

$$\frac{\partial^+ r(\varphi,t)}{\partial t} = \max_{a\in A} \left\langle \begin{pmatrix} e(\varphi) \\ e_\varphi(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\partial \log r(\varphi,t)}{\partial \varphi} \end{pmatrix}, f(t,z;a) \right\rangle, \;\; z = r(\varphi,t)e(\varphi).$$

2.5 Фазовые ограничения

В данной части будет рассмотрен случай задачи поиска звездного множества достижимости с фазовыми ограничениями. Рассматривается система

$$\begin{gathered}\dot{x} \in F(t,x) = \bigcup_{a \in A(t)} f(t,x;a), t \in T = [t_0, t_1], x(t_0) = x_0 \in X_0,\\ \forall t \in T \Rightarrow x[t] \in Y(t),\end{gathered} \tag{2.12}$$

в которой требования на параметры $X_0, A(t), f(t,x;a)$ системы аналогичны требованиям для (2.1): $X_0 \in comp(R^n)$, $f(t,x;a)$ и $f_x(t,x;a)$ непрерывны по совокупности переменных и $A(t)$ - непрерывное по Хаусдорфу компактно-значное отображение в R^m. Многозначное отображение $Y(t)$ непрерывно по Хаусдорфу, причем $\forall t \in T$ $Y(t) \in conv(R^m)$.

При определении множества достижимости $X[t]$ такой задачи потребуем

$$\forall \tau \in [t_0, t] \Rightarrow x[\tau] \in Y(\tau).$$

В дополнение к основным требованиям на фазовое ограничение $Y(t)$, будем требовать выполнение следующих предположений:

Предположение 2. *Выполнены следующие требования на многозначное отображение $Y(t)$:*

1. *Существует малое положительное $\varepsilon : \forall t \in T \Rightarrow \varepsilon B_{0,1} \in Y(t)$,*
2. *Функция Минковского $r(l|Y(t))$ дифференцируема по l.*

В таком случае эволюционное уравнение (2.12) для множества достижимости $X[t]$ переписывается в виде

$$\lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} h \left(X[t+\sigma], \left(\bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t,x)\} \right) \bigcap Y(t+\sigma) \right) = 0. \tag{2.13}$$

Как и прежде, обозначим за $r(l,t) = r(l|X[t])$. Тогда по аналогии с предыдущим случаем, верна следующая теорема:

Теорема 2.6. *Пусть для системы (2.12) выполнены Предположения 1-2. Тогда для любого ненулевого направления $l \in R^n$, такого, что функция $r(l,t)$ дифференцируема по l в некоторой его окрестности, существует правая производная $\partial^+ r(l,t)/\partial t$, причем*

$$\frac{\partial^+ r(l,t)}{\partial t} = \begin{cases} \max\limits_{a\in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t,z;a) \right\rangle, & \text{при } r(l,t) < r(l|Y(t)), \\ \min\left\{ \max\limits_{a\in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t,z;a) \right\rangle, \frac{\partial}{\partial t} r(l|Y(t)) \right\}, & \text{при } r(l,t) = r(l|Y(t)), \end{cases}$$

где $z = r(l,t)l$.

Доказательство. В предыдущей части было показано, что из близости в терминах функции расстояния по Хаусдорфу следует близость в терминах функций Минковкого с сохранением порядка малости $o(\sigma)$. Однако ввиду свойств функции Минковского

$$r\left(l \,\middle|\, \left(\bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right) \bigcap Y(t+\sigma)\right) = \min\left\{ r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right), r(l|Y(t)) \right\}.$$

В таком случае, эволюционное уравнение для множества достижимости в терминах калибровочной функции запишется как:

$$r(l,t+\sigma) = \min\left\{ r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right), r(l|Y(t+\sigma)) \right\} + \|l\|^{-1} o(\sigma).$$

Вычтем из обеих частей уравнения $r(l,t)$ и разделим на малое σ :

$$\frac{r(l,t+\sigma)-r(l,t)}{\sigma} = \min\left\{ \frac{\left(r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right) - r(l,t)\right)}{\sigma}, \frac{r(l|Y(t+\sigma))-r(l,t)}{\sigma} \right\} + o(1).$$

Как и раннее, формально перейдем к пределу при $\sigma \to +0$ и получим уравнение в терминах частных производных:

$$\frac{\partial^+ r(l,t)}{\partial t} = \lim_{\sigma\to+0} \min\left\{ \frac{\left(r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x\in X[t]} \{x+\sigma F(t,x)\}\right) - r(l,t)\right)}{\sigma}, \frac{r(l|Y(t+\sigma))-r(l,t)}{\sigma} \right\}. \tag{2.14}$$

Причем, такой переход будет верным, если существует предел

$$L = \lim_{\sigma\to+0} \min \left\{ \frac{\left(r\left(l \,\middle|\, \bigcup\limits_{x\in X[t]} \{x + \sigma F(t,x)\}\right) - r(l,t)\right)}{\sigma}, \frac{r(l|Y(t+\sigma)) - r(l,t)}{\sigma} \right\} =$$

$$= \lim_{\sigma\to+0} \min \left\{ \sigma^{-1} R(t,l,\sigma), \frac{r(l|Y(t+\sigma)) - r(l,t)}{\sigma} \right\}.$$

где, как и в случае без фазовых ограничений,

$$R(t,l,\sigma) = r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x\in X[t]} \{x - r(l,t)l + \sigma F(t,x)\}\right).$$

В Теореме 2.5 уже было показано, что

$$\lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1} R(t,l,\sigma) = \left.\frac{\partial R(t,l,\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=+0} = \max_{a\in A(t)} \left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t,z;a) \right\rangle.$$

Далее, возможны два случая:

1. Случай $r(l|Y(t)) > r(l,t)$. При такой постановке для малых значений σ

$$r(l|Y(t+\sigma)) > r(l,t) \Rightarrow \lim_{\sigma\to+0} \frac{r(l|Y(t+\sigma)) - r(l,t)}{\sigma} = +\infty,$$

Поэтому,

$$L = \lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1} R(t,l,\sigma) = \max_{a\in A(t)} \left\langle -\frac{\partial \ln r(l,t)}{\partial l}, f(t,z;a) \right\rangle.$$

2. Случай $r(l|Y(t)) = r(l,t)$. В этом случае, ввиду того, что

$$\lim_{\sigma\to+0} \frac{r(l|Y(t+\sigma)) - r(l,t)}{\sigma} = \frac{r(l|Y(t))}{\partial t},$$

и

$$\lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1} R(t,l,\sigma) = \left.\frac{\partial R(t,l,\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=+0},$$

функция L правилу дифференцирования представляет собой производную функции минимума по σ :

$$L = \frac{\partial}{\partial\sigma} \min \{R(t,l,\sigma), r(l|Y(t+\sigma))\}.$$

А т.к.

$$R(t,l,0) = r(l,t) = r(l|Y(t)),$$

то по теореме о дифференцировании минимума, получаем

$$L = \min\left\{\max_{a\in A(t)}\left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t,z;a)\right\rangle, \frac{\partial r(l|Y(t))}{\partial t}\right\}.$$

Записав эти два случая в одну систему, получаем утверждение теоремы. $\square$

2.6 Случай движущегося центра звезды

В данном разделе будет ослабленно ограничение Предположения 1, а именно, будет рассмотрена возможность для множества достижимости исходной системы быть звездным не относительно начала координат, а относительно некоторой заранее известной функции $q(t)$.

Для начала, определим строгую звезду SSt :

Определение. Множеством строгих звезд $SSt(C, R^n)$ назовем все подмножества $S \in R^n$, такие, что

$$\forall c \in C \exists \varepsilon > 0 : \forall s \in S, \lambda \in [0,1], b \in B_{0,1} \Rightarrow \lambda(s - c + \varepsilon b) \in S - c + \varepsilon b,$$

т.е. множество остается звездным при небольших сдвигах центра звезды.

Пусть задана абсолютно непрерывная функция $q(t)$, такая, что

$$\dot{q} = Q(q,t),\ q(t_0) = q_0,$$

и выполнено Предположение 3:

Предположение 3. *Существует малое $\varepsilon > 0$, такое, что система (2.1) удовлетворяет свойствам:*

1. *Начальное множество $X_0 \in SSt(q(0), R^n)$,*

2. *График системы (2.1) $graph_t F \in SSt(Q(t), R^{2n})$ почти всюду на множестве T, где*

$$Q = (q(t), \dot{q}(t)),$$

3. *Окрестность центра звезды $q(t) + \varepsilon B_{0,1} \subseteq X[t]$ для любого момента времени $t \in T$.*

Третье требование легко проверяется по виду $graph_t F$. Например, достаточным условием будет являться

$$q(t_0) + \varepsilon B_{0,1} \subseteq X_0,\ \forall t \in T(q(t), \dot{q}(t) + \varepsilon B_{0,1}) \subseteq graph_t F.$$

Тогда при выполнении Предположения 3 множество достижимости будет сохранять звездную структуру для каждого фиксированного момента времени: $X[t] \in SSt(q(t), R^n)$.

Действительно, рассмотрим произвольный элемент $x \in X[t]$. По определению, существует $x_0 \in X_0 : x(t, t_0, x_0) = x$. Рассмотрим динамику $\lambda x[t]$ для произвольного $\lambda \in [0, 1)$:

$$\lambda(x_0 - q(t_0)) \in int(X_0 - q(t_0)) \text{ по первому предположению,}$$

$$\lambda(\dot{x} - \dot{q}) \in \lambda F(t, x) - \lambda\dot{q} \subset F(t, \lambda(x - \dot{q})) \text{ по второму предположению,}$$

т.е.

$$\forall t \in T \Rightarrow \lambda(x[t] - q(t)) \in X[t] - q(t) \Rightarrow X[t] \in SSt(q(t), R^n).$$

В этом случае по аналогии с Теоремой 2.5 верен следующий результат:

Теорема 2.7. *Пусть для системы (2.1) выполнено Предположение 3. Тогда для любого ненулевого направления $l \in R^n$, такого, что функция $r[l, t] = r(l|X[t] - q(t))$ дифференцируема по l в некоторой его окрестности, существует правая производная $\partial^+ r[l, t]/\partial t$, причем*

$$\frac{\partial^+ r[l, t]}{\partial t} = \max_{a \in A} \left\langle \frac{\partial \log r[l, t]}{\partial l}, Q(q(t), t) - f(t, z; a) \right\rangle,$$

где $z = r[l, t]l + q(t)$.

Доказательство. Рассмотрим эволюционное уравнение (2.12):

$$\lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} h(X[t + \sigma], \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\}) = 0, \ \ t \in T.$$

Сдвинем все пространство на вектор $-q(t + \sigma)$:

$$\lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} h(X[t + \sigma] - q(t + \sigma), \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\} - q(t + \sigma)) = 0, \ \ t \in T. \tag{2.15}$$

Покажем, что множество $\bigcup\limits_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\} \in St(q(t + \sigma), R^n)$. Действительно, для любого $x \in X[t], a \in A(t)$ существует $y \in X[t] : \lambda(x - q(t)) = y - q(t)$, и верна следующая цепочка равенств:

$$\lambda(x + \sigma f(t, x; a) - q(t + \sigma)) =$$

$$= \lambda(x - q(t)) + \sigma f(t, x - q(t); a) + \lambda(q(t) - q(t+\sigma)) + \sigma(f(t, x; a) - f(t, x - q(t); a)) =$$

$$= y + \sigma f(t, y; a) + o(1) - q(t+\sigma) \subseteq \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\} - q(t+\sigma)$$

в силу того, что множество $X[t] \in SSt(q(t), R^n)$.

В таком случае, после применения Теоремы 2.4 к эволюционному уравнению (2.15) получаем

$$r[l, t+\sigma] = r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\} - q(t+\sigma)\right) + \|l\|^{-1} o(\sigma),$$

$$\frac{r[l, t+\sigma] - r[l, t]}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\left(r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\} - q(t+\sigma)\right) - r[l, t]\right) + o(1),$$

или, как и ранее переходя к пределу при $\sigma \to +0$,

$$\frac{\partial^+ r[l, t]}{\partial t} = \lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} R[t, l, \sigma],$$

где теперь

$$R[t, l, \sigma] = r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\} - q(t+\sigma)\right) - r[l, t] =$$

$$= r\left(l \,\middle|\, \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\} - q(t+\sigma) - (z - q(t))\right).$$

По аналогии с неподвижным центром $R[t, l, 0] = 0$, поэтому

$$\lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} R[t, l, \sigma] = \left.\frac{\partial^+ R[l, t, \sigma]}{\partial t}\right|_{\sigma = +0}.$$

Применим к функции $R[t, l, \sigma]$ Теорему 2.1 с функциями

$$c = r(l, t)l + q(t) - q(t+\sigma),\ f = -f(t, x; a),$$

и дополнительной максимизацией по $a \in A(t)$. Причем теперь параметризация $x \in X[t]$ будет проведена следующим образом: $x = \nu r[k, t]k + q(t)$. Получаем:

$$\frac{\partial R[t, l, \sigma]}{\partial \sigma} = \max_{a \in A(t)} \langle q'(t+\sigma) - f(t, x^*(\sigma); a), \mu(\sigma) \rangle,$$

где непрерывные множители $\mu(\sigma)$ отвечают за ограничение

$$\lambda l - x + q(t+\sigma) + (z - q(t)) - \sigma f(t, x(\sigma); a) = 0.$$

Однако, при $\sigma = 0$ задача на поиск множителей как и раньше сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \langle \mu, l \rangle = -1 \\ \left\langle \mu, \frac{\partial(\nu r[l,t]l)}{\partial l_i} \right\rangle = 0, i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{2.16}$$

Следовательно,

$$\mu(0) = \frac{1}{r[l,t]} \frac{\partial r[l,t]}{\partial l}.$$

В итоге, получаем

$$\left.\frac{\partial R[t,l,\sigma]}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=+0} = \max_{a \in A(t)} \left\langle \frac{\partial \ln r[l,t]}{\partial l}, \dot{q}(t) - f(t,z;a) \right\rangle,$$

или, после подстановки динамики $\dot{q}$:

$$\left.\frac{\partial R[t,l,\sigma]}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=+0} = \max_{a \in A(t)} \left\langle \frac{\partial \ln r[l,t]}{\partial l}, Q(q(t),t) - f(t,z;a) \right\rangle,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. В случае неподвижного центра звезды: $\dot{q} = 0$, динамика калибровочной функции полностью повторяет динамику, полученную в Теореме 2.5.

3 Звездные множества в рамках гамильтонова формализма

В данной секции будет проведен сравнительный анализ уже хорошо изученного метода нахождения множества достижимости при помощи функции цены с методом при помощи калибровочных функций, полученным в предыдущей секции.

3.1 Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для нахождения множества достижимости

К настоящему моменту, аппарат Гамильтонова формализма был применен в большом количестве работ [24]-[43], в том числе и в вопросах касательно нахождения множества достижимости дифференциального уравнения.

Как и ранее рассмотрим следующую динамику:

$$\dot{x} = f(t, x; a), a \in A(t), t \in T \tag{3.1}$$

с ограничениями на функции $f(t, x; a), A(t)$, заданными в предыдущей секции. Как и ранее, обозначим за $x[t] = x(t, t_0, x_0)$ траекторию системы, т.е. такое решение динамической системы, что $x[t_0] = x_0$. Пусть требуется найти множество достижимости в момент времени $t \in T$. Аппарат теории динамического программирования предлагает путь к решению этой задачи в рамках Гамильтонова формализма. Действительно, рассмотрим следующую задачу оптимизации в обратном времени:

$$\dot{x} = f(t, x; a), a \in A(t), t \in T, x(t_1) = x,$$

$$d(x(t_0), X_0) \to \inf_{a \in A(t)},$$

где $d(s, S)$ - некоторая метрика в пространстве R^n :

$$\forall S \in comp(R^n), d(s, S) = 0 \Leftrightarrow s \in S.$$

Обычно, в качестве такой метрики берется

$$d(s, S) = \inf_{x \in S} \|s - x\|,$$

или

$$d(s,S) = \inf_{x \in S} \|s - x\|^2.$$

Для таких задач функция цены определяется как

$$V(t,x) = \inf\{d(x(t_0), X_0) | x(t) = x\}$$

и подчиняется уравнению Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \max\limits_{a \in A(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle \right\} = 0, \\ V(t_0, x) = d(x, X_0). \end{cases} \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что множество достижимости исходной системы может быть найдено как линии уровня функции цены для попятной системы:

$$X[t] = \{x \in R^n : V(t,x) \leq 0\}.$$

Аппарат Гамильтонова формализма позволяет, таким образом, находить множества достижимости и для невыпуклых задач, однако имеет ряд вычислительных ограничений: для каждого момента времени $t \in T$ функция цены $V(t,x)$ должна быть найдена на всем пространстве R^n.

3.2 Калибровочная функция в рамках гамильтонова формализма

Пусть теперь выполнено Предположение 1, и множество достижимости можно искать как

$$X[t] = \{l \in R^n : 1 - r(l,t) \le 0\},$$

причем, по Теореме 2.5

$$\begin{cases} \frac{\partial^+ r(l,t)}{\partial t} = \max\limits_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t, r(l,t)l; a) \right\rangle, \\ r(l,t_0) = r(l|X_0), \end{cases} \tag{3.3}$$

Нас интересует взаимосвязь между уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана и уравнением на калибровочную функцию.

Для начала, обратим внимание, что, во-первых, уравнение для калибровочной функции задано в пространстве R^n, т.к. из однородности выполнено тождество

$$\left\langle \frac{\partial r(l,t)}{\partial l}, l \right\rangle + r(l,t) = 0,$$

тогда как уравнение Беллмана задано в пространстве R^{n+1}. Во-вторых, динамика уравнения Беллмана не предполагает однородность решения по x, в отличие от однородности по l решения уравнения на калибровочную функцию.

Теперь рассмотрим метрику $d(s,S)$, которая зависит от калибровочной функции. Например, определим

$$d(s,S) = g(1 - r(s|S)), \tag{3.4}$$

где функция $g(x) = 0$ для значений $x \le 0$, и $g(x)$ возрастает при $x > 0$. Т.е. "расстояние"от точки s до множества S – длина отрезка, заключенного между точкой s и множеством S, на прямой, соединяющей начало координат и точку s. В этом случае, если

$$s \in S \Leftrightarrow r(s|S) \ge 1 \Leftrightarrow d(s,S) = g(1 - r(s|S)) = 0,$$

поэтому линии уровня функции цены $V(t,x) \le 0$ будут задавать искомое множество достижимости.

Выполнен следующий результат:

Лемма 3.1. *Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ существует решение уравнения (3.2) и для системы (3.1) выполнено Предположение 1. Тогда для точек x на границе множества $X[t]$ и любой монотонно убывающей дифференцируемой функции $V = V(r)$, $V(t,x) = V(r(t,x))$ удовлетворяет динамике системы (3.2).*

Доказательство. Действительно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V'_r \frac{\partial r(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V'_r \frac{\partial r(x,t)}{\partial t} = V'_r \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(l,t)}{\partial l}, f(t, r(l,t)l; a) \right\rangle =$$

$$= V'_r \max_{a \in A} \left\langle -\frac{1}{r(x,t)} \frac{\partial r(x,t)}{\partial x}, f(t, r(x,t)x; a) \right\rangle =$$

$$= -\max_{a \in A} \left\langle \frac{1}{r(x,t)} V'_r \frac{\partial r(x,t)}{\partial x}, f(t, r(x,t)x; a) \right\rangle = \{r(x,t) = 1\} =$$

$$= -\max_{a \in A} \left\langle V'_r \frac{\partial r(x,t)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle = -\max_{a \in A} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \max_{a \in A(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle \right\} = 0$$

□

Важным следствием из Леммы 3.1 является возможность выражения функции цены в терминах калибровочной функции, как минимум на границе множества достижимости. В самом деле, в случае, если начальное условие выражено в терминах (3.4), достаточное условие для того, чтобы функция

$$V(t,x) = d(1 - r(x,t))$$

являлась решением системы (3.2), записывается следующим образом:

Теорема 3.2. *Пусть система (3.1) удовлетворяет Предположению (1). Пусть также выполнено следующее равенство:*

$$\max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial r(x,t)}{\partial x}, \frac{1}{r(x,t)} f(t, r(x,t)x; a) \right\rangle = \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial r(x,t)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle$$

для любых ненулевых векторов $x \in R^n$, и момента времени $t \in [t_0, \tau] \subseteq T$. Тогда функция $V(t,x) = g(1 - r(x,t))$ является решением системы Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \max\limits_{a \in A(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle \right\} = 0, \\ V(t_0, x) = g(1 - r(x|X_0)) \end{cases} \tag{3.5}$$

на отрезке $t \in [t_0, \tau]$, для непрерывно дифференцируемой функции $g(x)$, такой, что $g(x) = 0$ для значений $x \le 0$, и возрастает при $x > 0$.

Доказательство. Теорема доказывается непосредственной подстановкой:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = -g'(1 - r(x,t)) \frac{\partial r(x,t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = -g'(1-r(x,t)) \frac{\partial r(x,t)}{\partial t} = -g'(1-r(x,t)) \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(x,t)}{\partial x}, f(t, r(x,t)x; a) \right\rangle =$$

$$= -g'(1 - r(x,t)) \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial r(x,t)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle =$$

$$= -\max_{a \in A} \left\langle -g'(1 - r(x,t)) \frac{\partial r(x,t)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle =$$

$$= -\max_{a \in A} \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \max_{a \in A} \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle = 0.$$

□

Следствие 3.2.1. *Пусть система (3.1) удовлетворяет Предположению 1 с положительно однородной по аргументу x функцией f(t,x;a). Тогда функция $V(t,x) = g(1 - r(x,t))$ является решением системы Гамильтона-Якоби-Беллмана*

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \max\limits_{a \in A(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, f(t,x;a) \right\rangle \right\} = 0, \\ V(t_0, x) = g(1 - r(x|X_0)), \end{cases} \tag{3.6}$$

где непрерывно дифференцируемая функция $g(x) = 0$ для значений $x \le 0$, и возрастает при $x > 0$. Множество достижимости может быть найдено как

$$X[t] = \{x \in R^n : r(x,t) \ge 1\} = \{x \in R^n : V(x,t) \le 0\}.$$

Из свойств функции цены и множества достижимости следует следующее утверждение:

Следствие 3.2.2. *В случае, если* $V(t,x) = g(1-r(x,t))$ *является решением системы Гамильтона-Якоби-Беллмана, где непрерывно дифференцируемая функция* $g(x) = 0$ *для значений* $x \leq 0$, *и возрастает при* $x > 0$, *множество достижимости, определяемое как*

$$X[t] = \{x \in R^n : V(t,x) \leq 0\}$$

не зависит от выбора функции $g(x)$.

Далее будет рассмотрен пример с двумерной линейной системой.

3.3 Пример с двумерной линейной системой

Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x} = Ax,\ A \in \mathcal{A} \in conv\left(R^{2\times 2}\right),$$

$$x(t_0) \in B_{0,1}.$$

Проверим для этой системы выполнение Предположения 1. Первое требование очевидно выполнено, т.к. начальное множество является выпуклым. Далее,

$$graph_t F(t,x) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \left\{(x, Ax), x \in R^2\right\},$$

Зафиксируем элемент этого множества (x, Ax), тогда прямой подстановкой убеждаемся, что $(\lambda x, \lambda Ax)$ принадлежит $graph_t F(t,x)$ для любой константы λ. Наконец, третье свойство выполнено в силу линейности динамики уравнения.

Поэтому, по Теореме 2.5 и следствию из нее, калибровочная функция в полярных координатах удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^+ r(\varphi,t)}{\partial t} = \max_{A\in\mathcal{A}} \left\langle \begin{pmatrix} e(\varphi) \\ e_\varphi(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r(\varphi,t) \\ -\frac{\partial r(\varphi,t)}{\partial\varphi} \end{pmatrix}, Ae(\varphi) \right\rangle,$$

$$r(\varphi, t_0) = 1,$$

где

$$e(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ e_\varphi(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Пусть $A = \{a_{ij}\},\ i,j = 1,2$. Тогда уравнение запишется как

$$\frac{\partial^+ r}{\partial t} = \max_{A\in\mathcal{A}} \left\langle \begin{pmatrix} r\cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi \\ r\sin\varphi - \frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi \\ a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\frac{\partial^+ r}{\partial t} = \max_{a_{11}}\{a_{11}\cos\varphi(r\cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi)\} +$$

$$+\max_{a_{12}}\{a_{12}\sin\varphi(r\cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi)\} + \max_{a_{21}}\{a_{12}\cos\varphi(r\sin\varphi - \frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi)\} +$$

$$+\max_{a_{22}}\{a_{22}\sin\varphi(r\sin\varphi-\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi)\}.$$

Ниже приведены примеры множеств достижимости для случая

$$\mathcal{A}_1=\begin{pmatrix} -1 & [-0.5,1] \\ [-1,0] & [-1,1] \end{pmatrix},\ \mathcal{A}_2=\begin{pmatrix} [-1,0.5] & [-1,1] \\ [0,-0.5] & [-1,1] \end{pmatrix}.$$

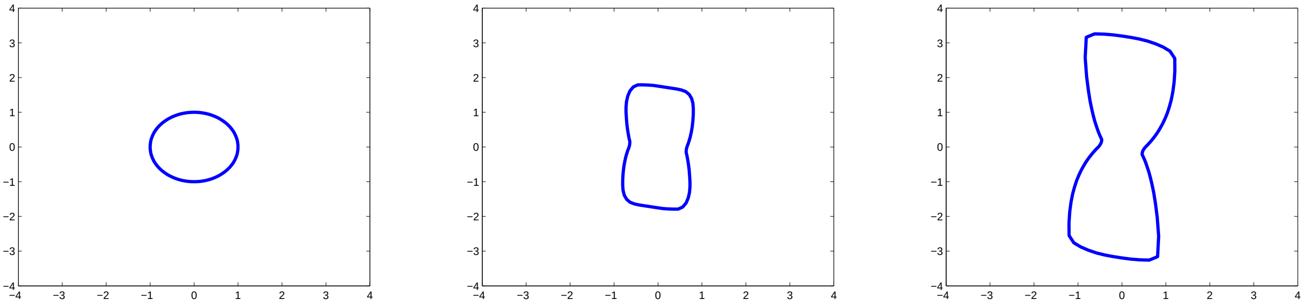

Рис. 9: Множества достижимости для $\mathcal{A}_1$ и $t = 0$, $t = 0.5$, $t = 1$

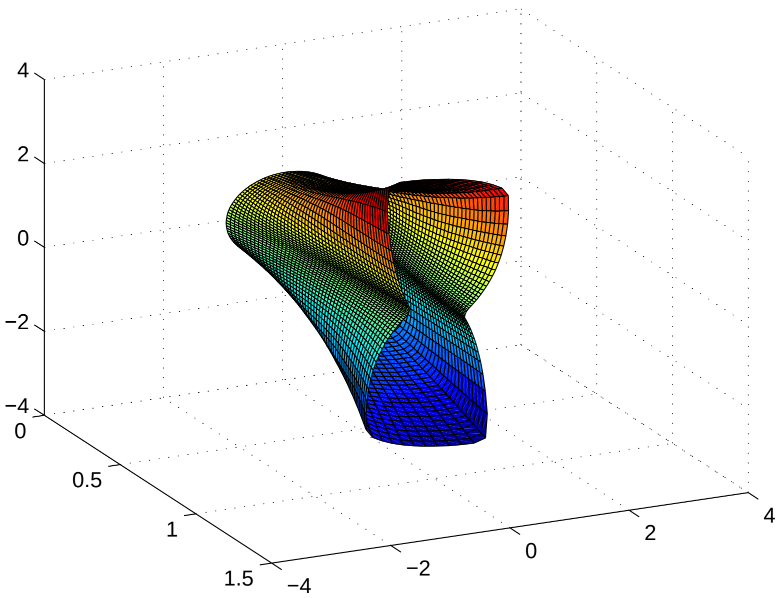

Рис. 10: Трубка достижимости для $t \in [0, 1]$

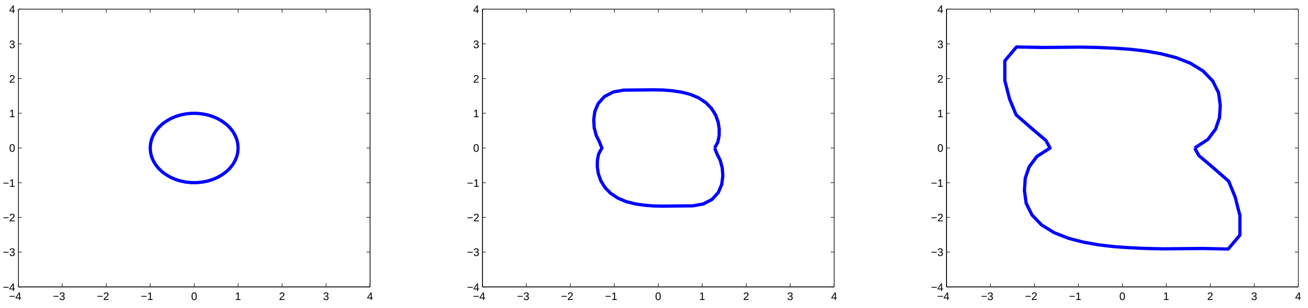

Рис. 11: Множества достижимости для $\mathcal{A}_2$ и $t = 0$, $t = 0.5$, $t = 1$

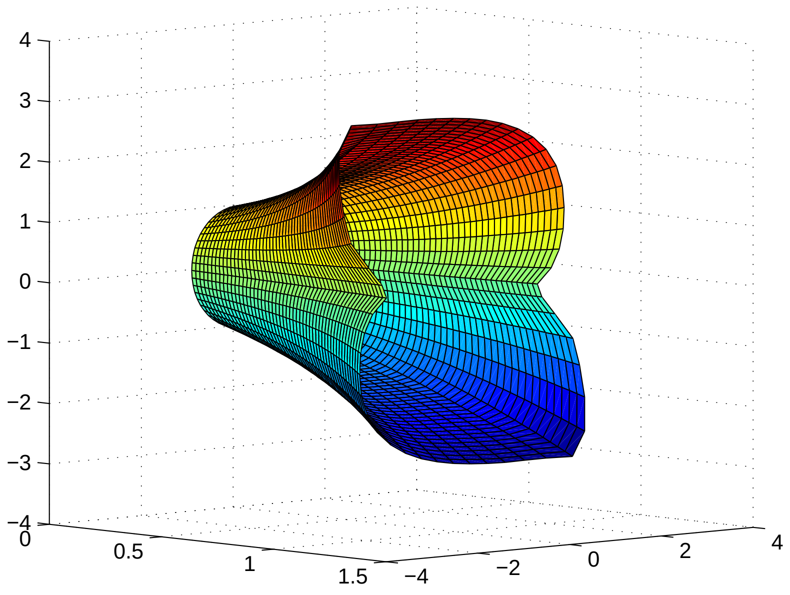

Рис. 12: Трубка достижимости для $t \in [0, 1]$

Теперь рассмотрим функцию цены

$$V(t,x) = \inf_{a\in\mathcal{A}}\{g(1-r(x,t))|x(t)=x\},$$

$$g(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \leq 0, \\ e^{\frac{x^2}{2}} - 1, & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

В таком случае, т.к. правая часть исходной системы однородна по x, по Следствию 3.2.1 получим

$$V(t,x) = g(1-r(x,t)).$$

Функция цены для множеств $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и момента времени $t=1$ изображены ниже.

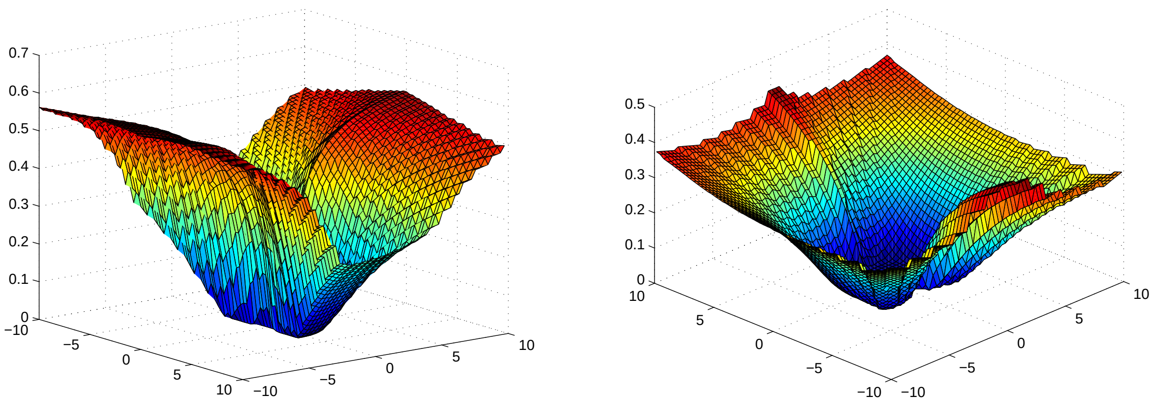

Рис. 13: Функция цены для множеств $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и момента времени $t=1$

Заключение

Таким образом, в данной работе был разработан метод поиска решения задачи оптимального управления потоками при задании начального распределения. Основной метод - модифицированные уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Решена задача оптимального управления линейной системой с начальным распределением и линейно-квадратичным интегралом, построены графические иллюстрации динамики распределения в частных случаях.

Для случая звездных систем было получено дифференциальное уравнение для калибровочной функции Минковского множества достижимости, позволяющее строить трубки достижимости систем со звездной динамикой. Получена модификация этого уравнения при наличии фазовых ограничений, а также при движущимся центре звезды.

Теоретически обоснована взаимосвязь преобразованных в работе методов со стандартными подходами решения задач управления в рамках гамильтонова формализма. Найдена соответствующая функция цены задачи поиска множества достижимости, построены графические иллюстрации трубок достижимости и функций цены в случае с неопределенностью в матрице динамики линейной системы.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Борисовичу Куржанскому за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы.

Список литературы

[1] *Л. С. Понтрягин* “Избранные научные труды”, 2 т., М.: Наука, 1988.

[2] *Р. Беллман* “Динамическое программирование”, М.: Изд-во Иностранная литература, 1960.

[3] *Н. Н. Красовский* “Теория управления движением”, М.: Наука, 1961.

[4] *Н. Н. Красовский* “Игровые задачи о встрече движений”, М.: ФИЗМАТЛИТ, 1970.

[5] *R. E. Kalman* “A new approach to linear filtering and prediction problems”, Trans. ASME. 1960. V. 82. N. Series D. P. 35–45.

[6] *Ж.-Л. Лионс* “Управление сингулярными распределенными системами”, М.: Наука, 1987.

[7] *Ф.Л. Черноусько, А.А. Меликян* “Игровые задачи управления и поиска”,М.: Наука, 1978.

[8] *Б.Н. Пшеничный, В.В. Остапенко* “Дифференциальные игры”,Киев: Наукова думка, 1992.

[9] *В.А. Троицкий* “Вариационные задачи оптимизации процессов в системах с ограниченными координатами”, Прикладная математика и механика, 26, выпуск 3, 1962.

[10] *В.А. Якубович* “Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования”, ДАН СССР, т.143, N 6, 1962, с.1304-1307.

[11] *В.Ф. Кротов, В.И. Гурман* “Методы и задачи оптимального управления”, М.: Наука, 1973.

[12] *Р. Габасов, Ф.М. Кириллова* “Конструктивные методы оптимизации”, Мн.: Изд-во "Университетское 1984.

[13] *В. М. Кунцевич* “Синтез оптимального робастного управления линейными объектами при ограниченных возмущениях”, Автомат. и телемех., 1992, № 7, 178–182.

[14] *T. Basar, P. Bernhard* “H^∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems”, SCFA. Basel: Birkheauser, 2nd ed., 1995.

[15] *P.V. Kokotovic, R.A. Freeman* “Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques”, Boston: Birkhauser, 2008.

[16] *A. Isidori* “Nonlinear Control Systems”, Springer, 1995.

[17] *A. Krener* “A Generalization of the Accessibility Problem for Control Systems”, University of California, Davis, California, 1971.

[18] *A.B. Kurzhanski, Ch. Byrnes* “Modelling and adaptive control”, Proceedings of the IIASA conference, Sopron, Hungary, July, 1986.

[19] *A.B. Kurzhanski, I.M. Mitchell, P. Varaiya* “Control Synthesis for State Constrained Systems and Obstacle Problems”, Proc. NOLCOS-04. IFAC, Elsevier Science, Stuttgart, 2004.

[20] *J. Lygeros, C. Tomlin, S. Sastry* “Controllers for reachability specifications for hybrid systems”, Automatica. 1999. V. 35. N. 3. P. 349–370.

[21] *E.B. Lee, L. Markus* “Foundations of Optimal Control Theory”, N.Y.: Wiley, 1967.

[22] *Y.S. Osipov, A.V. Kryazhimskiy* “Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions”, London: Gordon and Breach, 1995.

[23] *N.N. Krasovskii, A.I. Subbotin* “Game-Theoretical Control Problems”,SSSM. N.Y.: Springer, 1988..

[24] *А.Б. Куржанский* “Управление и наблюдение в условиях неопределённости”, М.: Наука, 1977.

[25] *А.Н. Дарьин, И.А. Дигайлова, И.В. Рублев* “Избранные труды А.Б. Куржанского”, МГУ: 2009.

[26] *А.Н. Дарьин, А.Б. Куржанский* “Нелинейный синтез управления при двойных ограничениях”, Дифференц. уравн. 2001. Т. 37. № 11. С. 1476–1484.

[27] *A.B. Kurzhanski, I. Valyi* “Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control”, SCFA. Boston: Birkheauser, 1997.

[28] *М.И. Гусев* “О структуре оптимальных минимаксных оценок в задаче гарантированного оценивания”, Доклады РАН. 1992. Т. 332. № 5. С. 832–835.

[29] *М.И. Гусев* “Об устойчивости информационных множеств в задаче гарантированного оценивания”, Труды ИММ УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 55–72.

[30] *В.Н. Ушаков, А.Р. Матвийчук, А.Г. Малев* “Задачи динамики систем с фазовыми ограничениями”, Изв. ИМИ УдГУ, 2012, № 1(39), 138–139.

[31] *С.М. Асеев, А.В. Кряжимский* “Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста”, Тр. МИАН, 257, Наука, М., 2007.

[32] *Н.Л. Григоренко* “Задача преследования несколькими объектами”, Тр. МИАН СССР, 166, 1984, 61–75.

[33] *М.С. Никольский* “О задаче оптимального быстродействия для одного класса двумерных билинейных управляемых систем”, МТИП, 2:3 2010, 7–20.

[34] *В.А. Комаров* “Уравнение множеств достижимости дифференциальных включений в задаче с фазовыми ограничениями”, Труды МИАН СССР. 1988. Т. 185. С. 116-125.

[35] *Н.Н. Субботина* "Метод характеристик Коши и обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана", Доклады АН СССР, 1991, 320(3), 556–561.

[36] *А.Н. Дарьин, А.Б. Куржанский* "Управление в условиях неопределённости при двойных ограничениях", Дифференц. уравн. 2003. Т. 39. № 11. С. 1474–1486.

[37] *И.В. Рублев* "О связи между двумя понятиями обобщённого решения уравнения Гамильтона–Якоби", Дифференц. уравн. 2002. Т. 38. № 6. С. 818–825.

[38] *А.Б. Куржанский* "О задачах синтеза управлений по реально доступной информации", Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2005. Специальный выпуск. С. 113–122.

[39] *А.Б. Куржанский* "Об аналитическом описании пучка выживающих траекторий дифференциальной системы", Доклады АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1047–1050.

[40] *А.Б. Куржанский, О.И. Никонов* "Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления", Доклады РАН. 1993. Т. 333. № 4. С. 578–581.

[41] *A.B. Kurzhanski, T.F. Filippova* "On the theory of trajectory tubes - a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control", Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Boston: Birkhauser, 1993. P. 122-188.

[42] *A.B. Kurzhanski, A.N. Daryin* "Dynamic Programming for Impulse Controls", Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. N. 2. P. 213–227.

[43] *A.B. Kurzhanski, P. Varaiya* "Dynamic Optimization for Reachability Problems", A Journal of Optimization Theory and Applications. Boston: Birkhauser, 2001. V. 108, N.2, P. 227-251.

[44] *C.W. Reynolds* "Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model", Computer Graphics 21 (4), 25–34, 1987 (SIGGRAPH'87 Conf. Proc.).

[45] *R.W. Brockett* “Optimal control of the Liouville equation”, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol 39, 2007, pp 23-35.

[46] *В.С. Владимиров* “Уравнения математической физики”, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва 1981.

[47] *И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов* “Обобщенные функции и действия над ними”, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1959.

[48] *А.Ф. Филиппов* “Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью”, М.: Издательство физ.-мат. литературы, 1985.

[49] *R.T. Rockafellar* “Convex Analysis”, Princeton University Press, 1970.

[50] *R.T. Rockafellar, R. Wets* “Variational Analysis”, Springer-Verlag, 2009.

[51] *Fan Ky* “Minimax theorems”, Proc. Nat. Acad. of Sci. USA 1953, V. 39. N. 1. P. 42-47.

[52] *K. Ito, K. Kunisch* “Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2008.

[53] *А.Б. Куржанский, Т.Ф. Филлипова* “Об описании пучка выживающих траекторий дифференциального включения”, Докл. АН СССР. 1986. Т. 279, М 1.

[54] *А.Б. Куржанский, Т.Ф. Филлипова* “Об описании пучка выживающих траекторий дифференциального включения”, Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, Ш 8. С. 1303-1315

[55] *A.B. Kurzhanski, T.F. Filippova* “Dynamics of the set of viable trajectories to a differential inclusions: the evolution equation”, Проблемы управления и теории информации (Венгрия), 1988. Т. 17, Ч 3. С. 137-144.

[56] *А.И. Панасюк* “Множества достижимости дифференциальных включений в замкнутой области определения”, Матем. заметки, 50:3 (1991), 113–121.

[57] *В.А. Комаров* "Об одном способе описания эволюции множества достижимости дифференциального включения", Труды Математического института РАН 1995, Т. 211.

[58] *С.С. Мазуренко* "Метод динамического программирования в системах с состояниями в виде распределений", Вестник московского университета. Секция 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2011. № 3. с. 30−38.

[59] *С.С. Мазуренко* "Дифференциальное уравнение для калибровочной функции звездного множества достижимости дифференциального включения", Доклады Академии наук. Математика. 2012. Т. 445, № 2. с. 139−142.