

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Синяков Владимир Владимирович

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧ
ДОСТИЖИМОСТИ И СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЙ В
УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОСТИ

01.01.07 — вычислительная математика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — доктор
физико-математических наук,
академик РАН
А. Б. Куржанский

Москва, 2015 г.

Оглавление

Введение	4
1 Задачи аппроксимации для нелинейных систем	20
1.1 Постановка задач	20
1.2 Метод аппроксимации множеств достижимости. Принцип сравнения	25
1.3 Пример аппроксимации множества достижимости: динамический уницикл	31
1.4 Алгоритм глобальной билинеаризации	37
1.5 Схемы решения задач	39
1.5.1 Задача достижимости	40
1.5.2 Задачи гарантированного оценивания	42
1.5.3 Задача синтеза управлений	44
2 Задача достижимости для билинейных систем управления	45
2.1 Постановка задач	45
2.2 Квадратичные аппроксимации множеств достижимости	48
2.2.1 Внешние аппроксимации	49
2.2.2 Внутренние аппроксимации	52
2.3 Кусочно-квадратичные аппроксимации множеств достижимости	54
2.3.1 Внешние аппроксимации	56
2.3.2 Внутренние аппроксимации	61
2.4 Внутренние аппроксимации с помощью положительно однородных функций	63
2.5 Примеры	67
3 Задачи гарантированного оценивания и синтеза управлений для билинейных систем	77
3.1 Постановка задач гарантированного оценивания	77
3.2 Решение задачи с дискретными измерениями	80
3.3 Решение задачи с непрерывными измерениями	84
3.4 Пример: несвязное информационное множество двумерной билинейной системы	88
3.5 Пример: определение ориентации объекта по неточным измерениям	89

3.6	Задача синтеза управлений	103
3.7	Пример: задача синтеза для линейной системы с неопределенно- стью в матрице	106
	Заключение	109
	Литература	110

Введение

Актуальность темы. Данная работа посвящена задачам достижимости, гарантированного оценивания и синтеза управлений для некоторых классов систем управления. Изучаемые управляемые системы описываются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Основное внимание в работе уделено классу билинейных по состоянию и управлению систем. Задача достижимости заключается в построении *множества достижимости*, состоящего из всех точек, в которые можно попасть из заданного *начального множества*, используя допустимые управления, которые удовлетворяют так называемым “жестким” или геометрическим ограничениям. В задаче гарантированного оценивания требуется найти *информационное множество*, которое состоит из всех точек, совместимых с поступающими в реальном времени измерениями и ограничениями на неопределенность в системе и начальном состоянии. Поступающие измерения представляют собой функцию от состояния системы и реализации помехи в *уравнении измерений*. Неопределенность в задачах гарантированного оценивания также удовлетворяет геометрическим ограничениям: значения неопределенных параметров в конкретный момент времени должны принадлежать определенным множествам в пространстве этих параметров. Множества достижимости и информационные множества являются составными частями решения других задач теории управления, в частности, *задачи синтеза*. В исследуемых в данной работе задачах все рассмотрения производятся на конечном отрезке времени. Важными понятиями в этих задачах являются понятия трубки достижимости и информационной трубки, которые представляют собой многозначные отображения, значениями которых в фиксированный момент времени t являются соответственно множества достижимости и информационные множества [67].

К настоящему времени разработан ряд подходов к рассматриваемому кругу задач. Необходимо подчеркнуть, что решение этих задач, как правило, может

быть получено только численно и требует большого количества вычислений. Лишь в ряде исключительных случаев решение получено в виде явной формулы.

Основным элементом многих таких вычислительных подходов является использование метода динамического программирования, разработанного Р. Беллманом [1]. Этот метод заключается во введении вспомогательного объекта — функции цены, которая вычисляется как оптимальное значение соответствующего задаче функционала для каждой *позиции* системы. Позицией системы называется пара объектов: момент времени и обобщенное состояние системы. Позиция выбирается таким образом, чтобы функция цены удовлетворяла полугрупповому свойству, которое также называется принципом оптимальности. В таком случае функция цены является решением дифференциального уравнения в частных производных, которое называется уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ). Функция цены часто бывает не всюду гладкой и удовлетворяет уравнению ГЯБ только в точках дифференцируемости, поэтому возникает необходимость использовать различные понятия обобщенных решений уравнения Беллмана. Среди определений обобщенных решений можно выделить обобщенные решения С. Н. Кружкова [16] для выпуклого по импульсной переменной p гамильтониана $H(t, x, p)$, *вязкие решения* [17, 24, 50], построенные при помощи метода исчезающей вязкости, *вязкостные решения*, введенные М. Г. Крэндаллом и П.-Л. Лионсом [46, 47], и *минимаксные решения*, введенные А. И. Субботиным [29, 30]. В случае непрерывной функции цены последние два определения эквивалентны.

Одна группа численных методов, связанная с использованием метода характеристик для уравнений Гамильтона-Якоби, была развита в работах Н.Н. Субботиной [31, 32]. В рамках этого подхода функция цены в задаче достижимости (или в задаче синтеза) аппроксимируется на основе формул метода характеристик.

Другой подход к численному решению задачи достижимости заключается в дискретизации соответствующей функции цены по времени и/или по пространству. В частности, при дискретизации по времени уравнение Гамильтона-Якоби заменяется некоторым оператором, который переводит аппроксимацию решения в момент t в аппроксимацию решения в момент $t + \Delta t$. Решения в рамках этого подхода приведены в работах [6, 33, 34, 79], см. также книги [2, 30].

Третий вычислительный подход заключается в оценивании решений рассматриваемых задач множествами более простой формы. Эти оценки представляют собой внутренние или внешние аппроксимации искомым множеств. В работах А.Б. Куржанского [62, 64] был разработан аппарат эллипсоидального исчисления, в рамках которого для линейных систем строятся внешние и внутренние оценки множеств достижимости в виде эллипсоидов (см. также [44, 76]). При этом объединение всех внутренних оценок, как и пересечение всех внешних оценок, совпадает с точным множеством достижимости. Сходная теория для оценок в виде параллелотопов была позже построена в работах Е.К. Костоусовой [57, 59].

Данный подход можно реализовать различными способами. В указанных выше работах оценки получены индуктивным методом (также см. [38]). Другой способ, называемый принципом сравнения для уравнений Гамильтона-Якоби, предложен в работе А.Б. Куржанского [22]. Он сводит задачу к нахождению верхних и нижних оценок функции цены, которые конструируются путем оценивания гамильтониана в уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана. Этот способ, в частности, применен в работе [5].

В данной работе также используется именно этот подход. Его применение приводит к алгоритмам аппроксимации, в которых оценки задаются с помощью решений задач Коши для некоторых специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти задачи Коши для различных оценок независимы друг от друга и решаются численно. Независимость позволяет при этом эффективно использовать параллельные вычисления. Полученные в результате наборы оценок могут быть использованы для построения более точных внешних и внутренних аппроксимаций искомым множеств с помощью операций пересечения и объединения.

Имеются работы, в которых было получено точное аналитическое представление множеств достижимости для конкретных нелинейных управляемых систем (см., в частности, [25, 74]).

Одними из ключевых понятий в теории гарантированного оценивания, разработанной А.Б. Куржанским [18, 19, 20, 21, 66], являются понятия информационного множества и *информационного состояния* системы, которые являются различными вариантами формализации доступной к некоторому моменту времени информации о состоянии системы и связаны между собой определенными

соотношениями. Информационное множество оказывается решением соответствующего эволюционного уравнения [61], а информационное состояние, в зависимости от определения, является решением уравнения или вариационного неравенства типа Гамильтона-Якоби [65, 66]. Использование этих различных формализаций доступной информации позволяет применять при решении задач гарантированного оценивания как теорию многозначного анализа и дифференциальных включений, так и теорию уравнений Гамильтона-Якоби.

В теории, разработанной Н.Н. Красовским и его сотрудниками [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 55], предложена формализация дифференциальных игр и подробно исследована их структура. При этом, в частности, указано, каким образом можно построить синтезирующую стратегию управления, удерживающую траекторию системы внутри слабоинвариантных множеств, несмотря на действия второго игрока, и обеспечивающую таким образом попадание на целевое множество в требуемый момент времени.

Важным свойством, которое зачастую имеется у множеств достижимости нелинейных систем, является их невыпуклость даже для выпуклых начальных множеств. Однако, при использовании только лишь выпуклых оценок для построения внешних аппроксимаций невозможно получить более точное решение, чем выпуклая оболочка множества достижимости. В связи с этим представляется важным рассмотреть новые классы невыпуклых оценок, аппроксимируя множества достижимости более точным образом. В настоящей работе, в частности, рассматриваются такие классы невыпуклых оценок, как оценки в виде множеств уровня квадратичных форм и в виде объединений эллипсоидов.

Билинейные по управлению и состоянию системы представляют собой важный класс нелинейных управляемых систем, благодаря некоторым их особенностям [23, 49, 42, 54, 60, 61, 70, 73]. Во-первых, нелинейность такого типа, пожалуй, можно считать одной из самых простых. Таким образом, эти системы служат хорошим примером для испытания новых аналитических конструкций и алгоритмов. Во-вторых, билинейная система может рассматриваться как линейная система с неопределенностью в коэффициентах матрицы системы, а такие модели часто встречаются в прикладных задачах. В-третьих, в работах А. Кренера, Р.В. Брокетта, А. Исидори, П.М. Пардалоса и В. Яценко (см., например, [42, 60, 54, 73]) была развита теория билинеаризации нелинейных систем, которая посвящена вопросам локальной и глобальной эквивалентности нелинейных

систем соответствующим билинейным системам. В данной работе результаты этой теории применяются для распространения полученных результатов на более широкий класс нелинейных систем.

Целью данной работы является построение решений задач аппроксимации множеств достижимости, информационных множеств и задачи синтеза для определенных классов нелинейных систем, которые могут быть реализованы в виде эффективных численных алгоритмов.

Методы исследования. Для достижения поставленной цели используется описанный выше подход на основе принципа сравнения для уравнений Гамильтона-Якоби, известные результаты из теории гарантированного оценивания, теории позиционных дифференциальных игр, многозначного анализа, методов глобальной билинеаризации.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Построены семейства внешних и внутренних численных аппроксимаций множеств достижимости для билинейных систем.
2. Предложен алгоритм решения задач аппроксимации множеств достижимости, информационных множеств и задачи синтеза управлений для класса нелинейных глобально билинеаризуемых систем.
3. Построено семейство внешних численных аппроксимаций множества достижимости для системы уравнений динамического уницикла.

Научная новизна работы. Полученные результаты являются новыми. В диссертации рассмотрены малоизученные задачи численной аппроксимации множеств достижимости и информационных множеств нелинейных систем с помощью семейств оценок простой формы. В частности, настоящая работа продолжает исследования [61, 58, 23] задач достижимости для класса билинейных по состоянию и управлению/возмущению систем. Среди построенных семейств оценок можно выделить численные оценки в виде множеств уровня квадратичных форм и в виде объединений эллипсоидов, которые являются различными обобщениями эллипсоидальных оценок для линейных систем, представленных в работах [62, 64, 22, 66]. В указанном выше классе методов численной аппроксимации построенные в работе методы дают одни из первых примеров невыпуклых оценок.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет, в основном, теоретический характер. Полученные в диссертации результаты по численной аппроксимации множеств достижимости и информационных множеств билинейных и билинеаризуемых систем могут представлять интерес для дальнейших исследований. В частности, представляется важным вопрос о получении точного представления множества достижимости произвольной билинейной системы в виде пересечения внешних оценок простой формы. В то же время, схемы построения аппроксимаций, приведенные во второй и третьей главах, могут быть реализованы в виде численных алгоритмов и, таким образом, решать задачу до конца. Эти алгоритмы могут быть применены при решении практических задач в таких прикладных областях, как автоматизация транспортных средств, робототехника, навигация, исследование и управление механическими системами. При нахождении аппроксимаций могут эффективно использоваться параллельные вычисления, так как отдельные оценки простой формы для множеств достижимости и информационных множеств строятся независимо.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены в виде докладов на научно-исследовательских семинарах кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ (рук. академик А.Б. Куржанский), ежегодной научной конференции “Тихоновские чтения” (Москва, МГУ, ф-т ВМК, октябрь 2013 г. и октябрь 2014 г.) и международной конференции по нелинейным системам управления NOLCOS (Тулуза, сентябрь 2013 г.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 работы, из них 2 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. Работы из журналов, рекомендованных ВАК, подготовлены автором самостоятельно.

Первая глава диссертации посвящена описанию ряда методов, которые могут быть использованы для решения поставленных в этой главе задач аппроксимации.

В разделе 1.1 представлены общие постановки исследуемых в диссертации задач достижимости, гарантированного оценивания и синтеза управлений. В задаче достижимости рассматривается нелинейная управляемая система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) &\in \mathcal{X}^0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}^k$ — управление. Предполагается, что управление стеснено “жестким” или геометрическим ограничением $u \in U$, в котором U — выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{R}^d$. Ставится задача построения семейств внутренних и внешних оценок множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0; \mathcal{X}^0)$.

В задаче гарантированного оценивания рассматривается система (1), в которой $u \in U$ — неопределенность в динамике системы, а $x(t_0) \in \mathcal{X}^0$ — неопределенность в начальном состоянии. Задано также уравнение наблюдений, которое может быть дискретным или непрерывным. Дискретное уравнение наблюдений имеет вид

$$\begin{aligned} y(\tau_i) = y_i = g_i(x(\tau_i)) + w_i, \quad i = 1, \dots, l, \\ w_i \in \mathcal{R}_i, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l \leq t_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Ставится задача внешней аппроксимации информационного множества $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ системы (1) и уравнением наблюдения (2). Уравнение наблюдения в непрерывном случае выглядит следующим образом:

$$y(t) = g(t, x) + w(t), \quad w(t) \in \mathcal{R}(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Для системы (1), (3) также ставится задача внешней аппроксимации информационного множества $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$.

Наконец, в задаче синтеза управлений рассматривается нелинейная система

$$\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (4)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}^k$ — управление, стесненное “жестким ограничением” $u \in U$, где $U \in \text{comp} \mathbb{R}^k$, $v \in Q \subseteq \mathbb{R}^l$ — неизвестное возмущение. Задача заключается в том, чтобы построить внутреннюю оценку $\mathcal{W}^-[t]$, также иногда называемую стабильным мостом (см., например, [30]), множества разрешимости и предъявить позиционную стратегию $u(t, x)$, которая для любого состояния системы $x(\tau) \in \mathcal{W}^-[\tau]$ и любой допустимой реализации помехи $v(t)$ приводит замкнутую систему в состояние $x(t_1) \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — целевое множество. Здесь используется указанная выше формализация позиционных дифференциальных игр, предложенная в работах Н.Н. Красовского и его со-

трудников (см., например, [55]).

В разделе 1.2 приведен ряд теорем об аппроксимации множеств достижимости. Внешние и внутренние аппроксимации конструируются методами гамильтонова формализма с использованием таких понятий, как вязкостные субрешения и вязкостные суперрешения соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Сформулированные в этом разделе теоремы служат в последующих главах основными инструментами для получения конкретных вычислительных алгоритмов аппроксимации. В частности, теоремы 2 и 4 используются в дальнейшем для получения соответственно внешних и внутренних оценок множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0; \mathcal{X}^0)$, границы которых пересекаются с границей множества достижимости. В некоторых случаях удастся получить достаточно богатое семейство таких оценок, что для множества достижимости оказывается справедливо представление

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \bigcup_{\xi} \mathcal{X}_{\xi}^{-}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$$

или, соответственно,

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \bigcap_{\xi} \mathcal{X}_{\xi}^{+}(t; t_0, \mathcal{X}^0).$$

Раздел 1.3 посвящен одному примеру аппроксимации множества достижимости для конкретной нелинейной системы, так называемого динамического уницикла [78], который описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= v \cos x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= v \sin x_5, \\ \dot{x}_5 &= \alpha u. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь u — управление, принимающая значения из отрезка $[-1, 1]$, а v и α — положительные константы. Теоремы 1 и 2 из предыдущего раздела используются здесь при построении эллипсоидальных оценок множества достижимости этой системы из эллипсоидального начального множества $\mathcal{X}^0$.

Наряду с алгоритмами аппроксимации для конкретных нелинейных систем,

имеет смысл исследовать возможность построения однотипных оценок множеств достижимости для целых классов нелинейных управляемых систем. В диссертации рассматривается класс билинейных по состоянию и управлению систем, которые в общем виде могут быть записаны в следующем виде:

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

$$A \in \mathcal{A}(t), \quad x(t_0) \in \mathcal{X}^0. \quad (7)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — управление, $\mathcal{A}(t)$ — геометрическое ограничение на управление, $\mathcal{X}^0$ — множество начальных состояний системы. Выбор этого класса обусловлен некоторыми его свойствами. В частности, в разделе 1.4 приведена теорема о глобальной билинеаризации, которая была доказана в работе [73]. Согласно этой теореме для достаточно широкого класса нелинейных систем существуют соответствующие билинейные системы, так называемые *билинейные реализации*. Билинейная реализация позволяет преобразовывать постановку задачи для нелинейной системы в постановку задачи для соответствующей билинейной системы.

В разделе 1.5 для сформулированных в начале главы задач производится преобразование постановок задач к их билинейным аналогам [28]. Здесь обосновывается возможность решения исходной задачи путем решения соответствующей задачи для билинейных систем. При исследовании задач для билинейных систем оказывается важным понятие *звездного множества*. Множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется звездным с центром $c \in \mathbb{R}^n$, если из условия $x \in A$ следует, что $c + \lambda(x - c) \in A$ для любого числа λ из отрезка $[0, 1]$. В задачах для билинейных систем имеет смысл в качестве множеств начальных состояний системы рассматривать звездные множества с центром в точке 0. Именно к таким множествам приводятся начальные множества из исходных постановок. В этом случае множества достижимости также являются звездными множествами с центром в нуле. Аналогичное утверждение оказывается справедливым и в задаче гарантированного оценивания. Необходимо заметить, что простые по форме оценки множеств достижимости или информационных множеств билинеаризованной системы могут переходить в соответствующие оценки для исходной системы, имеющие весьма сложную форму. Эта форма напрямую зависит от характера нелинейностей в правой части уравнений системы. Таким образом, получение

оценок фиксированного вида с помощью приведенных в этом разделе схем билинеаризации, вообще говоря, затруднительно. Однако, данные схемы позволяют использовать одни и те же формулы вычисления оценок (полученные в следующих главах) для большого числа нелинейных систем.

Вторая глава посвящена задаче аппроксимации множеств достижимости для класса билинейных управляемых систем с геометрическим ограничением на управление. Предполагается, что начальное множество в рассматриваемой задаче является центрально симметричным и звездным относительно нуля.

В разделе 2.1 приведены постановки исследуемых в этой главе задач. Рассматриваются различные варианты геометрических ограничений на управление, а именно: ограничения в виде эллипсоидов или параллелепипедов в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$. В постановках задач используются начальные множества трех видов: множество уровня положительно однородной липшицевой функции, множество уровня квадратичной формы и объединение эллипсоидов. Формулируются три задачи аппроксимации множества достижимости билинейной системы (6), (7). В первой задаче необходимо получить внешние и внутренние аппроксимации множества достижимости в виде множеств уровня квадратичных форм. Во второй задаче производится поиск внешних и внутренних аппроксимаций в виде объединений эллипсоидов. Наконец, в третьей задаче требуется получить внутренние аппроксимации множества достижимости в виде множеств уровня следующих функций:

$$w(t, x) = \sigma(S^{-1}(t_0)S(t)x) + \gamma(t)\psi(S(t)x). \quad (8)$$

Здесь $\sigma(x)$ — липшицевая положительно однородная функция, которая задает начальное множество $\mathcal{X}^0$.

В разделе 2.2 производится построение оценок множества достижимости, которые представляют собой множества уровня квадратичных форм [28]:

$$\mathcal{X}^+(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid \langle x, K^+(t)x \rangle \leq 1\}, \quad \mathcal{X}^-(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid \langle x, K^-(t)x \rangle \leq 1\}.$$

Это одна из простейших форм оценок, включающая в себя эллипсоиды и гиперболоиды. Из того условия, что квадратичная форма является вязкостным субрешением или суперрешением соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, выведены дифференциальные уравнения для матриц квадратичных

форм. В этих уравнениях присутствуют параметры, выбор которых определяет конкретное субрешение или суперрешение соответственно.

Далее в разделе 2.3 исследуется более сложный класс оценок, так называемые кусочно-квадратичные оценки, которые представляют собой объединения конечного числа эллипсоидов [28, 27]. Такие оценки, наряду с параллелепипедами [58], являются одними из простейших примеров оценок, которые могут быть определены как множества уровня негладких функций. Уравнения параметров оценок из этого класса значительно сложнее, чем аналогичные уравнения для оценок из раздела 2.2. Объединение эллипсоидов $\cup_{i=1}^m \mathcal{E}_i$ может быть представлено как множество уровня следующей функции:

$$w(t, x) = \min_{1 \leq i \leq m} \langle x, K_i(t)x \rangle.$$

Важно подчеркнуть, что отдельные квадратичные формы $\langle x, K_i(t)x \rangle$ сами могут не являться вязкостными суб- или суперрешениями. Это означает, что кусочно-квадратичные оценки представляют собой более богатый класс оценок, чем оценки в виде эллипсоидов. Данный пример оценок показывает, как можно из оценок более простого вида получать более сложные оценки. Однако, новые оценки описываются значительно более сложными уравнениями.

Наконец, в разделе 2.4 рассматривается весьма широкий класс внутренних оценок множеств достижимости вида (8), которые также строятся с помощью теорем сравнения. В отличие от оценок из других классов, построенных ранее в этой главе, эти оценки определяются как множества уровня некоторых положительно однородных функций довольно общего вида. Задача по построению суперрешений уравнения Гамильтона-Якоби в этом случае сводится к оценке константы Липшица некоторой функции [26]. При этом сконструированные в этом параграфе семейства оценок позволяют аппроксимировать множество достижимости изнутри с произвольной точностью.

В разделе 2.5 представлено несколько примеров, иллюстрирующих предложенные в этой главе алгоритмы аппроксимации множеств достижимости.

Третья глава диссертации посвящена задаче гарантированного оценивания для билинейных систем, а также задаче синтеза управлений при неопределенности. Здесь алгоритмы аппроксимации, представленные в главе 2, используются для решения указанных задач.

В разделе 3.1 приведена постановка задачи гарантированного оценивания для билинейной система (6). Здесь множество $\mathcal{X}^0$ представляет собой неопределенность в начальном состоянии системы. Рассматриваются два варианта уравнения измерений, представляющие собой частные случаи уравнений (2) и (3). Дискретное уравнение измерений имеет вид

$$\begin{aligned} y(\tau_i) = y_i &= G_i x(\tau_i) + w_i, \quad i = 1, \dots, l, \\ w_i &\in \mathcal{R}_i, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l \leq t_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Предполагается, что множество $\mathcal{R}_i$ является эллипсоидом. По аналогии непрерывное уравнение измерений записывается следующим образом:

$$y(t) = G(t)x(t) + w(t), \quad w(t) \in \mathcal{R}(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (10)$$

Здесь множество $\mathcal{R}(t)$ также является эллипсоидом. Формулируется задача построения семейств внешних оценок информационных множеств $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ и $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$.

Раздел 3.2 посвящен решению задачи аппроксимации информационного множества $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ при дискретных измерениях. В этом параграфе алгоритмы внешней аппроксимации множеств достижимости, приведенные во второй главе, модифицируются таким образом, чтобы их можно было применить к рассматриваемой задаче гарантированного оценивания и получить соответствующие внешние оценки информационного множества.

В этой задаче множество $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ может иметь весьма сложную структуру. В частности, оно может состоять из нескольких компонент связности. Однако, применяя предложенный в главе 1 подход, эту задачу можно преобразовать в задачу со звездным информационным множеством, что позволяет использовать оценки той же формы, что и в главе 2.

Существуют различные подходы к решению задачи гарантированного оценивания с непрерывными измерениями, сформулированной в разделе 3.1. Один из таких подходов, как было указано выше, заключается в использовании понятия информационного состояния системы $V(t, x)$, которое связано с информационным множеством соотношением

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid V(t, x) \leq c\}$$

для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$. Информационное состояние может быть определено различными способами, что приводит к различным уравнениям или вариационным неравенствам типа Гамильтона-Якоби [21, 65, 66]. В разделе 3.3 применяется несколько иной подход, в котором уравнение измерений дискретизируется, что позволяет воспользоваться результатами предыдущего параграфа для решения задачи аппроксимации информационного множества при непрерывных измерениях. Основным результатом этого раздела является теорема 20, в которой утверждается, что рассматриваемую задачу гарантированного оценивания с непрерывными измерениями при некоторых дополнительных предположениях можно представить как последовательность задач с дискретными измерениями. При этом последовательность информационных множеств $\{\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к множеству $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$.

В разделе 3.4 приведен простой пример задачи гарантированного оценивания для двумерной билинейной системы, в которой информационное множество $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$, как и построенные для него оценки $\mathcal{X}_{\xi}^{l,+}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ представляют собой несвязные множества.

Далее в разделе 3.5 рассматривается пример задачи гарантированного оценивания для четырехмерной билинейной системы, называемой кинематическим уравнением для кватернионов (см., например, [4, 41])

$$\dot{q} = \frac{1}{2}A(\omega)q = \frac{1}{2}[\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3]q, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

в котором в качестве неизвестной помехи выступает вектор угловой скорости ω . Стохастическому аналогу этой задачи посвящена обширная литература (см., в частности, [41]). Для построенных оценок информационных множеств далее формулируется и решается задача их проецирования на координатные оси, что позволяет получить более грубые, но простые по форме, оценки.

Наконец, в разделе 3.6 исследуется задача синтеза управлений для билинейных систем при неопределенности, частный случай задачи из раздела 1.1 первой главы. Здесь рассматривается система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bx, \quad t \in [t_0, t_1], \\ A(t) &\in \mathcal{A}(t), \quad B(t) \in \mathcal{B}(t), \end{aligned} \quad (12)$$

в которой A — это помеха, а B — управление. Решение рассматриваемой за-

дачи синтеза дается в виде стратегии, экстремальной к слабоинвариантным множествам $\mathcal{W}^-(t)$, которые строятся с помощью вязкостных суперрешений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса

$$V_t + \max_{A \in \mathcal{A}(t)} \langle V_x, Ax \rangle + \min_{B \in \mathcal{B}(t)} \langle V_x, Bx \rangle = 0.$$

В данном разделе мы ограничиваемся поиском кусочно-квадратичных суперрешений вида $w(t, x) = \min_s \langle x, K_s(t)x \rangle$. Алгоритм конструирования этих суперрешений строится с использованием формул оценивания соответствующих гамильтонианов, полученных во второй главе.

В соответствии с результатами первой главы к системам вида (12) благодаря процедуре билинеаризации можно отнести также класс линейных управляемых систем с неопределенностью в матрице системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(t)u, \quad t \in [t_0, t_1], \\ A(t) &\in \mathcal{A}(t), \quad u(t) \in \mathcal{E}(0, P(t)), \end{aligned} \tag{13}$$

которому посвящена обширная литература (см., в частности, [23, 61]). Решение задачи эллипсоидального синтеза для таких систем приведено в разделе 3.7.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [26, 27, 28, 78].

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Борисовичу Куржанскому за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы. Также автор благодарит коллектив кафедры системного анализа, на которой он обучался сначала в качестве студента, а затем аспиранта.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-2692.2014.1).

Основные обозначения

В этом разделе приведен список обозначений, используемых в работе.

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел

$\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство

$\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов x и y

$\|x\|$ — евклидова норма вектора x , равная $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$

$\text{comp}\mathbb{R}^n$ — класс всех компактных множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$

$\text{int}\mathcal{X}$ — внутренность множества $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$

$L^\infty([t_0, t_1], U)$ — пространство всех измеримых функций $u(\cdot)$, у которых $u(t) \in U$ п.в.

$\text{diam}A$ — диаметр множества A :

$$\text{diam}A = \sup_{x \in A} \|x\|$$

A^T — транспонированная матрица A

I — единичная матрица, размерность которой ясна из контекста

$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица размера $n \times n$ с элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$0_{n \times m}$ — нулевая матрица размера $n \times m$

$A + B$ — алгебраическая сумма множеств A и B :

$$A + B = \{x = a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$\text{graph}A$ — график многозначного отображения $A(\cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow \text{comp}\mathbb{R}^n$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \mid y \in A(x)\}$$

$\text{co}A$ — выпуклая оболочка множества A

$\text{co}f$ — выпуклая оболочка функции f

$\mathcal{E}(p, P)$ — эллипсоид с центром в точке p и матрицей формы P :

$$\mathcal{E}(p, P) = \{x \mid \langle x - p, P^{-1}(x - p) \rangle \leq 1\}$$

$d(x, A)$ — расстояние от точки x до множества A :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

$h(X, Y)$ — хаусдорфово расстояние между компактами X и Y :

$$h(X, Y) = \max \left\{ \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \|x - y\|, \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \|x - y\| \right\}$$

$\dot{x}(t)$ — полная производная по времени

Глава 1

Задачи аппроксимации для нелинейных систем

1.1 Постановка задач

Задача достижимости

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.1)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}^k$ — управление, стесненное “жестким ограничением” $u \in U$, где $U \in \text{comp} \mathbb{R}^k$. Функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных и липшицева по x с константой L_f : $\|f(t, x, u) - f(t, y, u)\| \leq L_f \|x - y\|$. Эти условия обеспечивают существование, единственность и продолжимость решений системы (1.1) на отрезок $[t_0, t_1]$ для любого начального условия x^0 и любого допустимого управления $u(\cdot)$ [37].

В качестве класса всех допустимых управлений выбрано множество

$$u(\cdot) \in \mathcal{U}(t) = L^\infty([t_0, t_1], U).$$

Определение 1 Множеством достижимости из произвольного начального множества $\mathcal{X}^0$ для системы (1.1) называется множество

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}(t) : x(t_0; t, x, u(\cdot)) \in \mathcal{X}^0\}.$$

Трубкай достижимости будем называть многозначное отображение $\mathcal{X}(\cdot; t_0, \mathcal{X}^0)$.

В дальнейшем будут рассматриваться начальные множества, заданные как множества уровней непрерывных функций $\sigma(x)$:

$$x(t_0) \in \mathcal{X}^0 = \{x \mid \sigma(x) \leq 1\}. \quad (1.2)$$

Задача 1 Построить параметрическое семейство внешних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}$$

множества достижимости:

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0).$$

Задача 2 Построить параметрическое семейство внутренних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^-(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}$$

множества достижимости:

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}_\xi^-(t; t_0, \mathcal{X}^0).$$

Решения данных задач, полученные в настоящей работе, представляют собой алгоритмы построения оценок $\mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ и $\mathcal{X}_\xi^-(t; t_0, \mathcal{X}^0)$, основанные на численном решении задач Коши для некоторых специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача гарантированного оценивания

Рассматривается система (1.1), в которой $u \in U$ представляет собой неизвестную помеху в уравнении динамики, а множество $\mathcal{X}^0$ — неопределенность в начальном состоянии системы.

В систему поступают измерения, которые рассматриваются в нескольких различных вариантах формализации.

1. Задано уравнение непрерывных измерений состояния системы

$$y(t) = g(t, x) + w(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.3)$$

Здесь известная функция g и неизвестная помеха w предполагаются непрерывными. Величины $w(t)$ удовлетворяют геометрическим ограничениям

$$w(t) \in \mathcal{R}(t) \subseteq \mathbb{R}^r, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Функция $y(\cdot)$, представляющая собой доступные измерения, предполагается известной.

2. Измерения состояния системы поступают в дискретные заранее заданные моменты времени:

$$\begin{aligned} y(\tau_i) = y_i = g_i(x(\tau_i)) + w_i, \quad i = 1, \dots, l, \\ t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l \leq t_1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь непрерывные функции g_i считаются известными, неизвестные векторы w_i представляют собой помеху в измерениях. Предполагается, что на величины w_i наложены геометрические ограничения

$$w_i \in \mathcal{R}_i \subseteq \mathbb{R}^r, \quad i = 1, \dots, l.$$

Значения y_i , которые представляют собой доступные измерения, предполагаются известными.

Уравнения измерений могут быть представлены как фазовые ограничения на состояние системы, поступающие в реальном времени. А именно, для непрерывных измерений уравнение (1.3) эквивалентно ограничению

$$x(t) \in \mathcal{Y}(t) = \{x \mid y(t) - g(t, x) \in \mathcal{R}(t)\}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.5)$$

а в случае дискретных измерений уравнение (1.4) эквивалентно ограничению

$$x(\tau_i) \in \mathcal{Y}_i = \{x \mid y_i - g_i(x) \in \mathcal{R}_i\}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (1.6)$$

Введем обозначения для доступных к моменту t измерений:

$$\begin{aligned} y_t &= \{y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}, \\ y_t^l &= \{y_i, \tau_i \in [t_0, t]\}. \end{aligned}$$

Определение 2 Информационным множеством из произвольного начального множества $\mathcal{X}^0$ для системы (1.1) при доступных измерениях y_t называется множество

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}(t) : x(t_0; t, x, u(\cdot)) \in \mathcal{X}^0, x(\tau) \in \mathcal{Y}(\tau) \forall \tau \in [t_0, t]\}.$$

Определение 3 Информационным множеством из произвольного начального множества $\mathcal{X}^0$ для системы (1.1) при доступных измерениях y_t^l называется множество

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}(t) : x(t_0; t, x, u(\cdot)) \in \mathcal{X}^0, x(\tau_i) \in \mathcal{Y}_i \forall i : \tau_i \in [t_0, t]\}.$$

Информационной трубкой будем называть многозначное отображение $\mathcal{X}(\cdot; t_0, \mathcal{X}^0)$. Информационное множество содержит неизвестное настоящее состояние $x(t)$ системы (1.1), являясь тем самым его гарантированной оценкой. Таким образом, текущее состояние всей системы, которое вычисляется по измерениям $y(\tau)$ (или по измерениям y_i) из отрезка $[t_0, t]$, может быть представлено парой $\{t, \mathcal{X}[t]\}$ (парой $\{t, \mathcal{X}^l[t]\}$). Естественно, это состояние также тривиальным образом представимо парой $\{t, y_t\}$ (соответственно, парой $\{t, y_t^l\}$).

Задача 3 Построить параметрическое семейство внешних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}$$

информационного множества:

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0).$$

Задача 4 Построить параметрическое семейство внешних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^{+,l}(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}$$

информационного множества:

$$\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}_\xi^{+,m}(t; t_0, \mathcal{X}^0).$$

Как и в случае задачи достижимости, решения данных задач, получен-

ные в настоящей работе, представляют собой алгоритмы построения оценок $\mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ и $\mathcal{X}_\xi^{+,l}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$, основанные на численном решении задач Коши для некоторых специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Необходимо также заметить, что решение задачи 3 в случае билинейных систем получено путем аппроксимации ее последовательностью задач 4, то есть путем дискретизации уравнения измерений $y(t)$.

Задача синтеза управлений

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.7)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}^k$ — управление, стесненное “жестким ограничением” $u \in U$, где $U \in \text{comp} \mathbb{R}^k$, $v \in Q \subseteq \mathbb{R}^l$ — неизвестное возмущение. Функции $f_i(t, x, u)$ предполагаются непрерывными по совокупности переменных и такими, что выполняются стандартные условия существования, единственности и продолжимости решений системы (1.7) на отрезок $[t_0, t_1]$ для любого начального условия x^0 и любых реализаций $u(\cdot) \in L^\infty([t, t_1], U)$, $v(\cdot) \in L^\infty([t, t_1], Q)$. Задано целевое множество $\mathcal{M}$.

Рассматриваемая здесь постановка задачи синтеза следует подходу представленному в книгах [14, 30]. Управление u рассматривается в классе позиционных стратегий $U(t, x)$, которые принимают значения в множестве U . Символом Δ обозначим некоторое разбиение

$$\Delta = \{\tau_i, i = \overline{0, l+1}\}, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l+1} = t_1.$$

Пусть функция $u(t)$ определена по следующему правилу с помощью стратегии $U(t, x)$:

$$u(t) = U(\tau_i, x(\tau_i)), \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \quad i = \overline{0, l}.$$

Тогда решение уравнения замкнутой системы

$$\dot{x} = f_1(t, x, u(t)) + f_2(t, x, v(t)) \quad (1.8)$$

существует, единственно и продолжимо при любой реализации неопределенности $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t) = L^\infty([t, t_1], Q)$.

Приведем следующие определения [14, 30].

Определение 4 Мнозначное отображение $\mathcal{W}(\cdot)$ называется слабо инвариантным (в прямом времени) относительно дифференциального включения $\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x)$, если для любых $(\tau, y) \in \text{graph}\mathcal{W}$ существует траектория $x(\cdot) : [\tau, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет этому дифференциальному включению, начальному условию $x(\tau) = y$ и следующему условию выживаемости: $x(t) \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \in [\tau, t_1]$.

Определение 5 Мнозначное отображение $\mathcal{W}^-[\cdot] = \mathcal{W}^-(\cdot; t_1, \mathcal{M})$ называется стабильным мостом, если оно слабо инвариантно относительно дифференциального включения $\dot{x} \in \text{co}f_1(t, x, U) + f_2(t, x, v)$ при любом $v \in Q$, выполняется включение $\mathcal{W}^-[t_1] \subseteq \mathcal{M}$, а график этого многозначного отображения $\text{graph}\mathcal{W}^-$ замкнут в $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$.

Максимальный по включений стабильный мост называется множеством разрешимости. Будем обозначать это множество символом $\mathcal{W}[t]$.

Задача 5 Построить внутреннюю оценку (стабильный мост) $\mathcal{W}^-[t]$ для множества разрешимости и предъявить позиционную стратегию $U(t, x)$, которая для любого состояния системы $x(\tau) \in \mathcal{W}^-[\tau]$ и любой допустимой реализации помехи $v(t)$ приводит замкнутую систему в состояние $x(t_1) \in \mathcal{M}$.

Как и в случае с оценками множества достижимости, решения данной задачи, полученные в настоящей работе, представляют собой алгоритмы построения оценок $\mathcal{W}^-[t]$, основанные на численном решении задач Коши для некоторых специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.2 Метод аппроксимации множеств достижимости. Принцип сравнения

В этом параграфе приводятся основные теоремы для решения задач 1 и 2. Множество достижимости $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ в этих задачах может быть представлено в виде множества уровня функции цены для определенной задачи динамической оптимизации. А именно, справедливо соотношение [63]

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid V(t, x) \leq 1\},$$

в котором

$$V(t, x) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)} \{ \sigma(x(t_0)) \mid x(t) = x \}.$$

Введем множество $\Omega = [t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n$. В продолжении этого раздела считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1 *Функция цены $V(t, x)$ является непрерывной в $\bar{\Omega}$.*

В условиях предположения 1 функция $V(t, x)$ является обобщенным решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана [40, 47, 51, 30]

$$V_t + H(t, x, V_x) = 0, \quad (1.9)$$

с начальным условием

$$V(t_0, x) = \sigma(x). \quad (1.10)$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются определения вязкостных суб- и суперрешений (см., например, [40, 47]) уравнения (1.9).

Определение 6 *Функция $w \in C(\bar{\Omega})$ называется вязкостным субрешением уравнения (1.9) на множестве Ω , если для всех $(t, x) \in \Omega$*

$$q + H(t, x, p) \leq 0 \quad \forall (q, p) \in D^+ w(t, x). \quad (1.11)$$

Определение 7 *Функция $w \in C(\bar{\Omega})$ называется вязкостным суперрешением уравнения (1.9) на множестве Ω , если для всех $(t, x) \in \Omega$*

$$q + H(t, x, p) \geq 0 \quad \forall (q, p) \in D^- w(t, x). \quad (1.12)$$

Определение 8 *Функция $w \in C(\bar{\Omega})$ называется вязкостным решением уравнения (1.9), если она одновременно является вязкостным субрешением и вязкостным суперрешением.*

Здесь $D^- w(t, x)$ и $D^+ w(t, x)$ — соответственно суб- и супердифференциалы функции w (см., например, [45]), черта над множеством обозначает его замыкание.

Определение 9 *Субдифференциалом функции $w \in C(\bar{\Omega})$ в точке $(t, x) \in \Omega$ называется множество $D^- w(t, x)$ всех пар $(q, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих*

условиям

$$(q, p) = (\phi_t(t, x), \phi_x(t, x)),$$

$$(t, x) \in \operatorname{Arg} \min_{(s, y) \in \Omega} [w(s, y) - \phi(s, y)]$$

для некоторой функции $\phi \in C^\infty(\Omega)$.

Определение 10 Супердифференциалом функции $w \in C(\bar{\Omega})$ в точке $(t, x) \in \Omega$ называется множество $D^+w(t, x)$ всех пар $(q, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям

$$(q, p) = (\phi_t(t, x), \phi_x(t, x)),$$

$$(t, x) \in \operatorname{Arg} \max_{(s, y) \in \Omega} [w(s, y) - \phi(s, y)]$$

для некоторой функции $\phi \in C^\infty(\Omega)$.

Таким образом, функция цены $V(t, x)$ оказывается решением уравнения (1.9) в вязкостном смысле. Заметим также, что она является решением и в минимаксном смысле [30].

Сформулированные далее теоремы 1 и 3 имеют название теорем сравнения. Использование утверждений такого вида для получения вычислительных алгоритмов аппроксимации множеств достижимости было впервые предложено в работах [22, 63]. Прежде чем сформулировать эти теоремы, приведем известную лемму о вязкостных решениях [40, 47, 51, 53].

Лемма 1 Пусть w^- и w^+ соответственно вязкостное субрешение и вязкостное суперрешение уравнения (1.9). Тогда

$$\sup_{(t, x) \in \Omega} [w^-(t, x) - w^+(t, x)] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [w^-(t_0, x) - w^+(t_0, x)].$$

Теорема 1 Предположим, что функция $w \in C(\bar{\Omega})$ является вязкостным субрешением уравнения (1.9) и удовлетворяет начальному условию (1.10). Тогда $w(t, x) \leq V(t, x)$, $t \in [t_0, t_1]$, и, следовательно, справедливо включение

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}^+[t] = \{x \mid w(t, x) \leq 1\}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует непосредственно из леммы о неравенстве между вязкостным суб- и суперрешением. $\square$

Далее приведем уточняющее утверждение, аналогичное известной теореме о верификации [51].

Теорема 2 Пусть в условиях теоремы 1 функция w является непрерывно дифференцируемой в окрестности некоторой траектории $\bar{x}(\cdot)$ системы (1.1), отвечающей управлению $\bar{u}(\cdot)$ такому, что

$$\bar{u}(t) \in \operatorname{Arg} \max_{u \in U} \langle w_x(t, \bar{x}(t)), f(t, \bar{x}(t), u) \rangle.$$

Кроме того, пусть выполняется равенство

$$w_t(t, \bar{x}(t)) + H(t, \bar{x}(t), w_x(t, \bar{x}(t))) = 0, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Тогда $w(t, \bar{x}(t)) = V(t, \bar{x}(t))$ при $t \in [t_0, t_1]$. В частности, из условия $\bar{x}(t) \in \partial \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ следует условие $\bar{x}(t) \in \partial \mathcal{X}^+[t]$.

Доказательство. Имеем следующее тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(t, \bar{x}(t)) &= w_t(t, \bar{x}(t)) + \langle w_x(t, \bar{x}(t)), f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \rangle = \\ &= w_t(t, \bar{x}(t)) + H(t, \bar{x}(t), w_x(t, \bar{x}(t))) = 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$w(t, \bar{x}(t)) = w(t_0, \bar{x}(t_0)) = \sigma(\bar{x}(t_0)).$$

Учитывая неравенство

$$w(t, \bar{x}(t)) \leq V(t, \bar{x}(t)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)} \{ \sigma(x(t_0)) \mid x(t) = \bar{x}(t) \},$$

получаем, что

$$w(t, \bar{x}(t)) = V(t, \bar{x}(t)).$$

Второе утверждение теоремы следует из того, что $\partial \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid V(t, x) = 1\}$ и $\partial \mathcal{X}^+(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid w(t, x) = 1\}$. $\square$

Важно подчеркнуть, что оценка трубки достижимости $\mathcal{X}^+[\cdot]$ множества достижимости, построенная в соответствии с теоремами 1 и 2, оказывается *сильно*

инвариантным многозначным отображением относительно дифференциального включения $\dot{x} \in \text{cof}(t, x, U)$.

Определение 11 Многозначное отображение $\mathcal{X}(t)$ называется сильно инвариантным (в обратном времени) относительно дифференциального включения $\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x)$, если для любых $(\tau, y) \in \text{graph} \mathcal{X}$ каждая траектория $x(\cdot) : [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ этого дифференциального включения с конечным условием $x(\tau) = y$ удовлетворяет условию выживаемости $x(t) \in \mathcal{X}(t)$ для всех $t \in [t_0, \tau]$.

Аналогом теоремы 1 для внутренних оценок является следующее утверждение [40, 47, 51, 53].

Теорема 3 Предположим, что функция $w \in C(\bar{\Omega})$ является вязкостным суперрешением уравнения (1.9) и удовлетворяет начальному условию (1.10). Тогда $w(t, x) \geq V(t, x)$, $t \in [t_0, t_1]$, и, следовательно, справедливо включение

$$\mathcal{X}^-[t] = \{x \mid w(t, x) \leq 1\} \subseteq \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0).$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует непосредственно из леммы о неравенстве между вязкостным суб- и суперрешением. $\square$

Теорема 4 Пусть в условиях теоремы 3 функция w является непрерывно дифференцируемой в окрестности некоторой траектории $\bar{x}(\cdot)$ системы (1.1). Кроме того, пусть выполняется равенство

$$w_t(t, \bar{x}(t)) + H(t, \bar{x}(t), w_x(t, \bar{x}(t))) = 0, \quad t \in (t_0, t_1),$$

в котором $\bar{x}(\cdot)$ — траектория системы (1.1). Тогда из условия $\bar{x}(t) \in \partial \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ следует условие $\bar{x}(t) \in \partial \mathcal{X}^-[t]$.

Доказательство. Имеем следующее неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(t, \bar{x}(t)) &= w_t(t, \bar{x}(t)) + \langle w_x(t, \bar{x}(t)), f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \rangle \leq \\ &\leq w_t(t, \bar{x}(t)) + H(t, \bar{x}(t), w_x(t, \bar{x}(t))) = 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$w(t, \bar{x}(t)) \leq w(t_0, \bar{x}(t_0)) = \sigma(\bar{x}(t_0)).$$

С другой стороны, из условия $\bar{x}(t) \in \partial\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ и теоремы 3 следует, что

$$\sigma(\bar{x}(t_0)) = V(t, \bar{x}(t)) \leq w(t, \bar{x}(t)).$$

Таким образом, $w(t, \bar{x}(t)) = V(t, \bar{x}(t))$. Остается заметить, что $\partial\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid V(t, x) = 1\}$ и $\partial\mathcal{X}^-(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid w(t, x) = 1\}$. $\square$

Решения задач 1 и 2 могут быть получены путем нахождения функций w , удовлетворяющих теореме 3 или 4 соответственно при различном выборе траекторий $\bar{x}(\cdot)$.

Оценка трубки достижимости $\mathcal{X}^+[\cdot]$ множества достижимости, построенная в соответствии с теоремами 3 и 4, оказывается *слабо инвариантным* многозначным отображением относительно дифференциального включения

$$\dot{x} \in \text{co}f(t, x, U).$$

Определение 12 Многозначное отображение $\mathcal{X}(\cdot)$ называется *слабо инвариантным (в обратном времени) относительно дифференциального включения* $\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x)$, если для любых $(\tau, y) \in \text{graph}\mathcal{X}$ существует траектория $x(\cdot) : [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет этому дифференциальному включению, конечному условию $x(\tau) = y$ и следующему условию выживаемости: $x(t) \in \mathcal{X}(t)$ для всех $t \in [t_0, \tau]$.

Необходимо отметить важность начального условия (1.10) для возможности получения точных представлений множества достижимости нелинейной системы в виде пересечения внешних оценок:

$$\mathcal{X}[t] = \bigcap_{\xi} \mathcal{X}_{\xi}^+[t]. \quad (1.13)$$

К примеру, рассмотрим систему

$$\dot{x} = u \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad u \in [-1, 1], \quad (1.14)$$

$$x(t_0) \in \mathcal{X}^0 = \mathcal{E}(0, I). \quad (1.15)$$

Если условие (1.15) заменить на включение

$$x(t_0) \in \mathcal{X}^0 = \{x \mid |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\},$$

то любая внешняя оценка $\mathcal{X}^+[\cdot]$, которая представляет собой сильно инвариантное отображение, будет удовлетворять включению $\mathcal{E}(0, 2I) \subseteq \mathcal{X}^+[t]$ при $t \geq t_0 + \pi/4$. При этом в исходной постановке $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}^0 = \mathcal{E}(0, I)$. Это отличает задачу достижимости для нелинейных систем от задачи достижимости для линейных систем, в которой возможно получить представление (1.13), даже если для каждой из оценок $\mathcal{X}_\xi^+[t]$ выполняется строгое включение $\mathcal{X}^0 \subset \mathcal{X}_\xi^+[t_0]$. В частности, для конкретной нелинейной системы классы эллипсоидальных и параллелотопных оценок могут оказаться слишком узкими для получения представлений выпуклой оболочки множества достижимости, а вводимые далее во второй главе классы квадратичных и кусочно квадратичных оценок — недостаточными для получения представления (1.13).

1.3 Пример аппроксимации множества достижимости: динамический уницикл

В этом параграфе рассматривается пример применения сформулированных выше теорем сравнения к одной конкретной нелинейной системе, так называемому динамическому унициклу [48, 71, 75, 78]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= v \cos x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= v \sin x_5, \\ \dot{x}_5 &= \alpha u.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Здесь u — управление, принимающая значения из отрезка $[-1, 1]$, а v и α — положительные константы. Начальное множество представляет собой эллипсоид

$$x(t_0) \in \mathcal{X}^0 = \mathcal{E}(x^0, (X^0)^{-1}), \quad X^0 = (X^0)^T > 0.\tag{1.17}$$

Множество допустимых управлений

$$\mathcal{U}(t) = L^\infty([t_0, t]; U), \quad U = [-1, 1].$$

Эта система имеет отношение к динамической модели машиноподобного робота. А именно, x_1 и x_3 представляют собой декартовы координаты заднего колеса, x_2 и x_4 — соответствующие скорости, v — модуль скорости, x_5 — угол поворота, а α — максимальное значение угловой скорости.

Задача 6 Построить семейство внешних эллипсоидальных аппроксимаций множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ системы (1.16) из начального множества $\mathcal{X}^0$.

Функцию цены в данной задаче можно определить следующим образом:

$$V(t, x) = \inf_{u(\cdot)} \{ \langle x - x^0, X^0(x - x^0) \rangle \mid x[t] = x \}.$$

Тогда будет справедливо равенство

$$\mathcal{X}[t] = \{x \mid V(t, x) \leq 1\}.$$

Рассмотрим уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для функции $V(t, x)$:

$$V_t + \max_{|u| \leq 1} \{ V_{x_1} x_2 + V_{x_3} x_4 + v V_{x_2} \cos x_5 + v V_{x_4} \sin x_5 + \alpha u V_{x_5} \} = V_t + H(t, x, V_x) = 0, \quad (1.18)$$

в котором

$$H(t, x, p) = p_1 x_2 + p_3 x_4 + v p_2 \cos x_5 + v p_4 \sin x_5 + \alpha |p_5|. \quad (1.19)$$

Для нахождения внешней аппроксимации множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ воспользуемся теоремами 1 и 2 из предыдущего параграфа. Будем искать вязкостные субрешения w^+ уравнения (1.18) в виде квадратичных функций от состояния системы (1.16):

$$w^+(t, x) = \langle x - x^*(t), K(t)(x - x^*(t)) \rangle + k(t).$$

Семейство функций $w^+(t, x)$ параметризуем парой $\{\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot)\}$ — решением характеристической системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{p}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= v \cos x_5, & \dot{p}_2 &= -p_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{p}_3 &= 0, \\ \dot{x}_4 &= v \sin x_5, & \dot{p}_4 &= -p_2, \\ \dot{x}_5 &= \alpha \bar{u}, & \dot{p}_5 &= v(p_4 \cos x_5 - p_2 \sin x_5), \end{aligned} \tag{1.20}$$

в которой

$$\bar{u} \in \text{sgn}(p_5) \equiv \begin{cases} \{1\}, & p_5 > 0, \\ \{-1\}, & p_5 < 0, \\ [-1, 1], & p_5 = 0 \end{cases}$$

Будем искать такие внешние эллипсоидальные аппроксимации $\mathcal{X}_+[t]$ множества достижимости $\mathcal{X}[t]$, которые бы при каждом t касались $\text{conv} \mathcal{X}[t]$ в точке $\bar{x}(t)$. Далее для краткости будем писать $\bar{x}$ и $\bar{p}$ вместо $\bar{x}(t)$ и $\bar{p}(t)$ соответственно.

Для произвольных чисел $r_1 > 0$, λ_1 , λ_2 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} p_2 \cos x_5 + p_4 \sin x_5 &\leq \frac{1}{2} r_1^{-1} \langle p, (e_2 e_2^T + e_4 e_4^T) p \rangle + \\ &+ r_1^{-1} \langle \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_4, p \rangle + \lambda_1 \cos x_5 + \lambda_2 \sin x_5 + \gamma. \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_1 = \bar{p}_2 - r_1 \cos \bar{x}_5$, $\lambda_2 = \bar{p}_4 - r_1 \sin \bar{x}_5$, $\gamma = \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_1^{-1} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$, $[e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] = I$, где I — единичная матрица. При этом в точке $(\bar{x}, \bar{p})$ достигается равенство. Справедливо неравенство

$$\cos \phi \leq a(\phi - \bar{\phi})^2 + 2b(\phi - \bar{\phi}) + c,$$

где

$$a = \begin{cases} -\sin \bar{\phi} / (2(\bar{\phi} - \pi)), & \bar{\phi} \neq \pi \\ \frac{1}{2}, & \bar{\phi} = \pi \end{cases}, \quad b = a(\bar{\phi} - \pi), \quad c = \cos \bar{\phi}, \quad \bar{\phi} \in [0, 2\pi].$$

Это неравенство обращается в равенство при $\phi = \bar{\phi}$. Тригонометрические функции $-\cos \phi$, $\sin \phi$, $-\sin \phi$ можно оценить сверху аналогичным образом. Приме-

няя эти оценки, получаем неравенство:

$$p_2 \cos x_5 + p_4 \sin x_5 \leq \frac{1}{2} r_1^{-1} \langle p, (e_2 e_2^T + e_4 e_4^T) p \rangle + r_1^{-1} \langle \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_4, p \rangle + \\ + \langle x - \bar{x}, (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) e_5 e_5^T (x - \bar{x}) \rangle + 2 \langle (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) e_5, x - \bar{x} \rangle + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \gamma,$$

причем равенство достигается при $x = \bar{x}$, $p = \bar{p}$.

Используя это соотношение, получаем оценку для функции $H(t, x, p)$:

$$H(t, x, p) = p_1 x_2 + p_3 x_4 + v p_2 \cos x_5 + v p_4 \sin x_5 + \alpha |p_5| \leq \\ \leq \langle p, A(x - x^*) \rangle + \langle p, Bp \rangle + \langle x - x^*, C(x - x^*) \rangle + \\ + 2 \langle f, x - x^* \rangle + 2 \langle C(x^* - \bar{x}), x - x^* \rangle + \langle g, p \rangle + \langle Ax^*, p \rangle + \mu = \mathcal{H}(t, x, p),$$

причем равенство достигается при $x = \bar{x}$, $p = \bar{p}$ и любом выборе функции $x^* = x^*(t)$. Здесь

$$A = e_1 e_2^T + e_3 e_4^T, \quad B = \frac{1}{2} v r_1^{-1} (e_2 e_2^T + e_4 e_4^T) + \frac{1}{2 |\bar{p}_5|} \alpha e_5 e_5^T, \quad C = v (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) e_5 e_5^T, \\ f = v (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) e_5, \quad g = v r_1^{-1} (\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_4), \\ \mu = \frac{1}{2} \alpha |\bar{p}_5| + \langle x^* - \bar{x}, C(x^* - \bar{x}) \rangle + 2 \langle f, x^* - \bar{x} \rangle + v (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \gamma).$$

Таким образом, функция $w^+(t, x)$ будет субрешением уравнения (1.18), если выполняется соотношение

$$\left\langle x - x^*(t), \dot{K}(t)(x - x^*(t)) \right\rangle + \dot{k} - 2 \langle x - x^*(t), K(t) \dot{x}^*(t) \rangle + \\ + \langle x - x^*(t), (K(t)A + A^T K(t) + 4B(t) + C(t))(x - x^*(t)) \rangle + \\ + 2 \langle K(t)g(t) + C(t)(x^* - \bar{x}) + KAx^* + f(t), x - x^*(t) \rangle + \mu(t) \leq 0.$$

Для справедливости этого неравенства достаточно, чтобы выполнялись следующие уравнения:

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) + 4KB(t)K + C(t) = 0, \quad (1.21)$$

$$\dot{x}^*(t) = (A + K^{-1}(t)C(t))x^*(t) + K^{-1}(t)(f(t) - C(t)\bar{x}(t)) + g(t), \quad (1.22)$$

$$\dot{k}(t) = \mu(t). \quad (1.23)$$

Кроме того, используя начальное условие $w^+(t, x) = \langle x - x^0, X^0(x - x^0) \rangle$, получаем начальные условия для параметров K , x^* и k :

$$K(t_0) = X^0, \quad x^*(t_0) = x^0, \quad k(t_0) = 0. \quad (1.24)$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 5 Пусть набор параметров $\{K(\cdot), x^*(\cdot), k(\cdot)\}$, в котором $K(t) > 0$, удовлетворяет при $t \in [t_0, t_1]$ уравнениям (1.21)-(1.24) для некоторого решения $\{\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot)\}$ характеристической системы (1.20). Тогда функция w^+ является вязкостным субрешением уравнения (1.18), и, следовательно, справедливо включение

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}^+[t] = \{x \mid w^+(t, x) \leq 1\}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Более того, $\bar{x}(t) \in \partial\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) \cap \partial\mathcal{X}^+[t]$.

Последнее утверждение следует из того, что по построению $\bar{x}(t) \in \partial\mathcal{X}^+[t]$.

Ниже представлены иллюстрации, вычисленные для параметров:

$$\alpha = v = 1, \quad \mathcal{X}^0 = \mathcal{E}(0, I), \quad x^0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

Граница точного множества достижимости (рис. 1.2) и трубки достижимости (рис. 1.1) обозначена красным цветом, а граница соответствующих внешних аппроксимаций — зеленым.

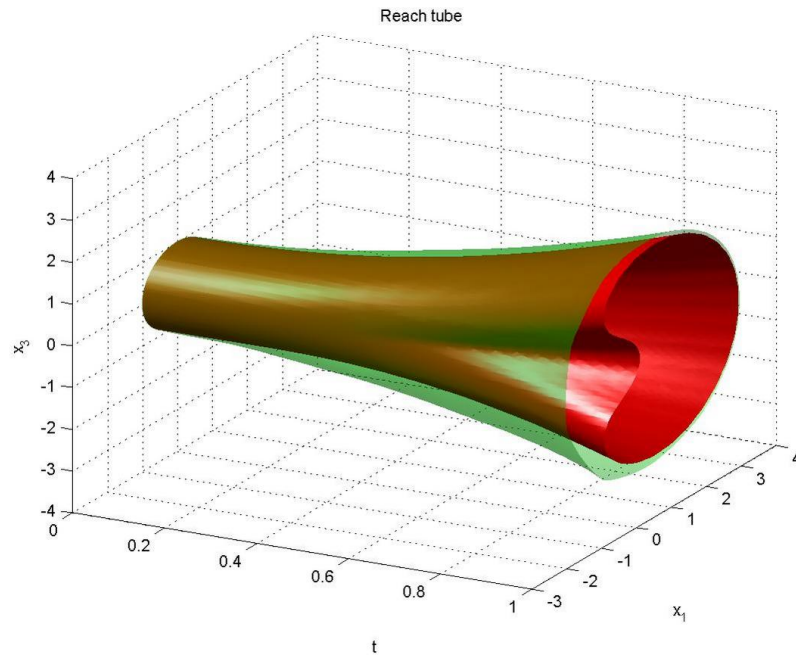


Рис. 1.1: Внешняя эллипсоидальнозначная аппроксимация трубки достижимости.

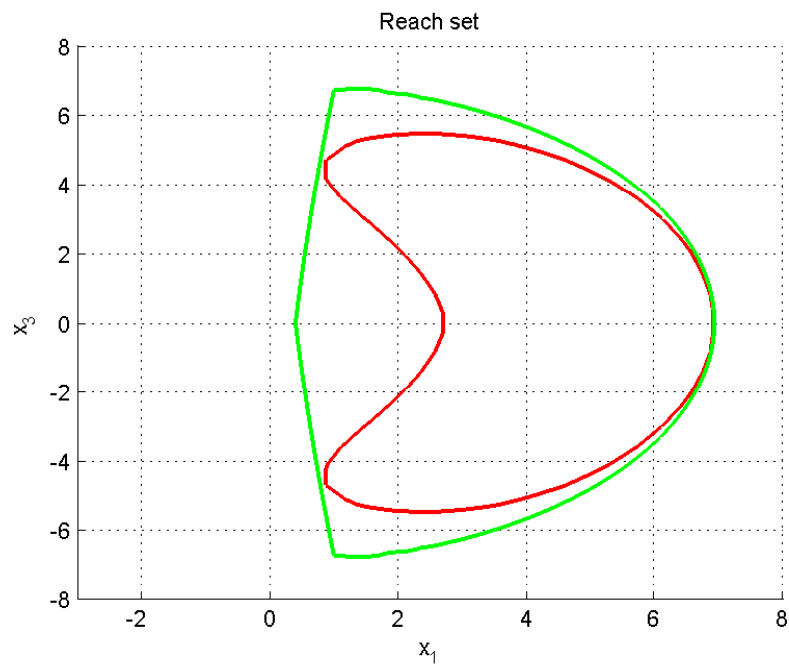


Рис. 1.2: Внешняя аппроксимация множества достижимости в конечный момент времени $t = 1$, состоящая из трех эллипсов.

1.4 Алгоритм глобальной билинеаризации

В работе [73] представлен метод так называемой *глобальной билинеаризации* управляемой системы. Использование идеи билинеаризации позволяет для некоторых систем вида (1.1) преобразовать задачи, сформулированные выше, к соответствующим задачам для билинейных систем.

Наряду с системой (1.1) введем уравнение выходных параметров

$$z(t) = r(t, x, w). \quad (1.25)$$

Рассмотрим билинейную систему

$$\dot{\tilde{x}} = (A_0(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_d A_d(t)) \tilde{x}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.26)$$

$$\tilde{z}(t) = (C_0(t) + w_1 C_1(t) + \dots + w_q C_q(t)) \tilde{x}(t). \quad (1.27)$$

Здесь $\tilde{x}(t)$ — состояние системы, $\tilde{z}(t)$ — выход этой системы, u и w — входные параметры. Следуя [73], введем следующее

Определение 13 *Билинейная система (1.26), (1.27) называется билинейной реализацией нелинейной системы (1.1), (1.25), если существуют матрицы $A_0(t), \dots, A_d(t)$ и $C_0(t), \dots, C_q(t)$, а также функция $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, такие что отображения $(x^0, u(\cdot), w(\cdot)) \rightarrow z(\cdot)$ и $(\varphi(x^0), u(\cdot), w(\cdot)) \rightarrow \tilde{z}(\cdot)$ совпадают, то есть $z(t; x^0, u(\cdot), w(\cdot)) = \tilde{z}(t; \varphi(x^0), u(\cdot), w(\cdot))$ при всех $x^0, u(\cdot)$ и $w(\cdot)$. В таком случае системы (1.1), (1.25) и (1.26), (1.27) называются динамически эквивалентными.*

Для полноты изложения сформулируем далее предложенный в работе [73] критерий билинеаризуемости нелинейной системы. Он относится к нелинейным системам, *линейным по входам*:

$$\dot{x} = f(x(t)) + G(x(t))u, \quad (1.28)$$

$$z(t) = h(x(t)) + Q(x(t))w. \quad (1.29)$$

Здесь функции $f(x)$, $h(x)$, $G(x)$ и $Q(x)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми. Заметим, что это не ограничивает общность рассмотрения только автономными системами, так как при должной гладкости функций $f(t, x)$, $h(t, x)$, $G(t, x)$ и $Q(t, x)$ неавтономная система вида (1.27), (1.28) может быть

приведена к автономной системе такого вида за счет введения дополнительной переменной $x_{n+1} = t$ и соответствующего уравнения $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Для нелинейной системы (1.27), (1.28) рассматривается билинейная система (1.26), (1.27) с постоянными матрицами A_i и C_j . Предполагается, что для некоторых чисел M_i , $i = \overline{0, q}$ выполняется соотношение

$$\text{rank}[C_0^T, A_0^T C_0^T, \dots, (A_0^T)^{M_0-1} C_0^T, C_1^T, A_0^T C_1^T, \dots, (A_0^T)^{M_0-1} C_1^T, \dots, C_q^T, A_0^T C_q^T, \dots, (A_0^T)^{M_0-1} C_q^T] = \dim A_0.$$

Введем дифференциальный оператор L , определенный для скалярных, векторных и матричных функций от n переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} L(g(x)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g(x), f(x) \right\rangle \quad \text{при } g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ L(g(x)) &= \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_1(x), f(x) \right\rangle \quad \dots \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_m(x), f(x) \right\rangle \right]^T \quad \text{при } g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ L(g(x)) &= \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_{11}(x), f(x) \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_{1k}(x), f(x) \right\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_{m1}(x), f(x) \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_{mk}(x), f(x) \right\rangle \end{bmatrix} \quad \text{при } g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times k}. \end{aligned}$$

Теорема 6 *Нелинейная система (1.27), (1.28) динамически эквивалентна билинейной системе (1.26), (1.27) тогда и только тогда, когда существуют числа M_i , $i = \overline{0, q}$ для $k = 1, \dots, q$ выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} L^{M_0} h(x) &= \sum_{i=0}^{M_0-1} A(0, 0, i+1) L^i h(x) + \sum_{j=1}^q \sum_{i=0}^{M_j-1} A(0, j, i+1) L^i Q_j(x), \\ L^{M_k} Q_k(x) &= \sum_{i=0}^{M_0-1} A(k, 0, i+1) L^i h(x) + \sum_{j=1}^q \sum_{i=0}^{M_j-1} A(k, j, i+1) L^i Q_j(x), \end{aligned}$$

и каждый столбец матриц $(L^i h(x))_x G(x)$ и $(L^i Q_j(x))_x G(x)$ при $j = 1, \dots, q$, $i = 0, \dots, M_j - 1$ является линейной комбинацией векторов $L^s h(x)$ и $L^s Q_l(x)$

при $l = 1, \dots, q$, $s = 0, \dots, M_l - 1$:

$$\begin{aligned}
 ((L^i h(x))_x G(x))_k &= \sum_{s=0}^{M_0-1} B_0(k, i, 0, s+1) L^s h(x) + \\
 &+ \sum_{l=1}^q \sum_{s=0}^{M_l-1} B_0(k, i, l, s+1) L^s Q_l(x), \\
 ((L^i Q_j(x))_x G(x))_k &= \sum_{s=0}^{M_0-1} B_j(k, i, 0, s+1) L^s h(x) + \\
 &+ \sum_{l=1}^q \sum_{s=0}^{M_l-1} B_j(k, i, l, s+1) L^s Q_l(x).
 \end{aligned}$$

Замечание 1 Заметим, что при доказательстве достаточности в качестве состояния $\tilde{x}(t)$ динамически эквивалентной билинейной системы выбирается конкатенация векторов $L^s h(x(t))$ и $L^s Q_l(x(t))$ при $l = 1, \dots, q$, $s = 0, \dots, M_l - 1$.

Замечание 2 Для билинеаризуемой системы вида (1.28), (1.29) минимальная размерность k ее билинейной реализации может быть сколь угодно большой. При $z(t) = x(t)$ число k не меньше размерности n исходной нелинейной системы.

Переход от различных задач, сформулированных в параграфе 1.1, к соответствующим билинейным постановкам рассматривается в следующем разделе.

1.5 Схемы решения задач

В этом параграфе будут рассмотрены схемы приведения сформулированных в разделе 1.1 задач для билинеаризуемых нелинейных систем к соответствующим стандартным задачам для билинейных систем [28], решению которых посвящены главы 2 и 3. Основное предположение этого параграфа заключается в том, что рассматриваемые нелинейные системы имеют вид (1.28), а их билинейные реализации строятся в соответствии с замечанием 1. Кроме того, считаем, что $\text{int } \mathcal{X}^0 \neq \emptyset$, $\text{int } \mathcal{Y}(t) \neq \emptyset$, $\text{int } \mathcal{Y}_i \neq \emptyset$.

Для того, чтобы был возможен обратный переход от билинейной задачи к исходной нелинейной постановке выберем уравнение (1.29) в виде $z(t) = x(t)$.

Предположим, что система (1.1), (1.29) оказалась билинеаризуемой, и ее билинейная реализация имеет вид (1.26). Тогда, в соответствии с указанным предположением, уравнение (1.27) принимает вид $\tilde{z}(t) = C_0 \tilde{x}(t)$, где

$$C_0 = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times (k-n)} \end{bmatrix}.$$

1.5.1 Задача достижимости

Для перехода к билинейной постановке задачи достижимости требуется указать новое начальное множество $\tilde{\mathcal{X}}^0$. При этом для восстановления исходной постановки задачи по билинеаризованной необходимо, чтобы образ $\varphi(\partial \mathcal{X}^0)$ границы начального множества лежал на границе нового начального множества $\tilde{\mathcal{X}}^0$. В частности, можно выбрать

$$\tilde{\mathcal{X}}^0 = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^k \mid \sigma(C_0 \tilde{x}) + \|\tilde{x} - \varphi(C_0 \tilde{x})\|^2 = \tilde{\sigma}(\tilde{x}) \leq 1 \}. \quad (1.30)$$

При таком выборе компактному множеству $\mathcal{X}^0$ соответствует компактное множество $\tilde{\mathcal{X}}^0$. Задача достижимости для системы (1.26), (1.30) может быть далее приведена к стандартному виду, когда начальное множество $\tilde{\mathcal{X}}^0$ является звездными и центрально-симметричным относительно нуля (см. рис. 1.3). Для этого можно перейти к другой билинейной реализации исходной системы:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A_0(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_d A_d(t)) \tilde{x}, \\ \dot{\tilde{x}}_0 &= 0. \end{aligned}$$

При этом вместо матрицы C_0 используется матрица $[C_0, 0_{n \times 1}]$, вместо функции φ — отображение $\tilde{\varphi}$, которое определяется равенством

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ 1 \end{bmatrix},$$

а начальное множество может иметь вид

$$\left\{ (\tilde{x}^T, \tilde{x}_0)^T \in \mathbb{R}^k \mid \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(\tilde{x} + (1 - \tilde{x}_0)v) + \frac{1}{2} \tilde{x}_0^2 \leq 1 \right\}.$$

Здесь вектор v содержится в множестве $\text{int}\tilde{\mathcal{X}}^0$, которое не пусто в силу непустоты множества $\text{int}\mathcal{X}^0$. Справедливо следующее утверждение [61].

Теорема 7 Пусть начальное множество $\tilde{\mathcal{X}}^0$ является звездным и центрально-симметричным относительно нуля. Тогда этими свойствами обладает множество достижимости $\tilde{\mathcal{X}}(t; t_0, \tilde{\mathcal{X}}^0)$ для билинейной системы (1.26).

Для упрощения обозначений далее будем считать, что начальное множество $\tilde{\mathcal{X}}$ исходной билинейной реализации уже является звездным и центрально-симметричным.

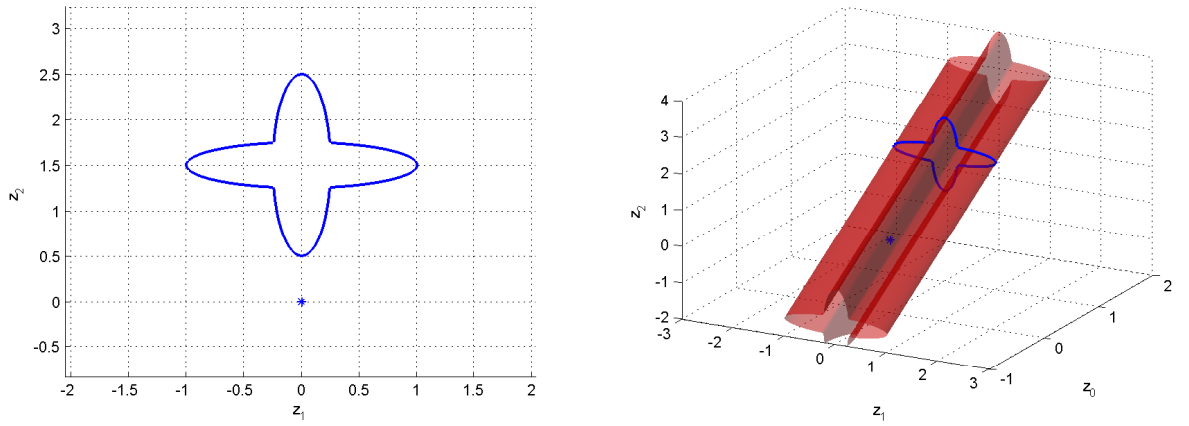


Рис. 1.3: За счет введения дополнительной переменной образ границы произвольного множества может быть вложен в границу в звездного множества с центром в нуле.

Итак, от исходной постановки задачи достижимости для системы (1.1), (1.2) мы перешли к задаче достижимости для системы (1.26), (1.30). Предположим далее, что методами, описанными в параграфе 1.2, были получены аппроксимации множества достижимости $\tilde{\mathcal{X}}[t]$ этой системы: внешняя $\tilde{\mathcal{X}}^+[t]$ и внутренняя $\tilde{\mathcal{X}}^-[t]$. Эти аппроксимации представляют собой множества уровня соответствующих вязкостных суб- и суперрешений уравнения (1.9) для билинейной системы (1.26):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}[t] \subseteq \tilde{\mathcal{X}}^+[t] &= \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^k \mid \tilde{w}^+(t, \tilde{x}) \leq 1 \}, \\ \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \mid \tilde{w}^-(t, \tilde{x}) \leq 1 \} &= \tilde{\mathcal{X}}^-[t] \subseteq \tilde{\mathcal{X}}[t]. \end{aligned}$$

Тогда соответствующие аппроксимации исходного множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[t] &\subseteq \mathcal{X}^+[t] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{w}^+(t, \varphi(x)) \leq 1\}, \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{w}^-(t, \varphi(x)) \leq 1\} &= \mathcal{X}^-[t] \subseteq \mathcal{X}[t].\end{aligned}$$

Кроме того, пусть в условиях теорем 2 и 4 начальная точка $\bar{x}(t_0)$ траектории $\bar{x}(\cdot)$ билинейной системы выбрана так, что $\bar{x}(t_0) = \varphi(x^0)$ для некоторого $x^0 \in \mathcal{X}^0$. Тогда из условия $\bar{x}(t) \in \partial\tilde{\mathcal{X}}^+[t]$ следует условие $C_0\bar{x}(t) \in \partial\mathcal{X}^+[t] \cap \partial\mathcal{X}[t]$, а из условия $\bar{x}(t) \in \partial\tilde{\mathcal{X}}^-[t]$ следует условие $C_0\bar{x}(t) \in \partial\mathcal{X}^-[t] \cap \partial\mathcal{X}[t]$.

Таким образом, было показано, что задача аппроксимации множеств достижимости для билинеаризуемых систем может быть решена с помощью решения соответствующей задачи аппроксимации для билинейной системы. Однако, необходимо заметить, что функция $\varphi(x)$ может иметь весьма сложный вид, а значит оценки множества достижимости исходной системы могут иметь сложную форму, даже если соответствующие оценки множеств достижимости билинейной системы имеют простую форму, например являются эллипсоидами или параллелепипедами.

1.5.2 Задачи гарантированного оценивания

В сформулированных в параграфе 1.1 задачах гарантированного оценивания для перехода к билинейной постановке требуется указать новое начальное множество $\tilde{\mathcal{X}}^0$, а также новое фазовое ограничение $\tilde{\mathcal{Y}}(t)$ или $\tilde{\mathcal{Y}}_i$ соответственно. Предположим, что множества допустимых значений помех в уравнениях наблюдений представляют собой множества уровня некоторых функций:

$$\mathcal{R}(t) = \{w \in \mathbb{R}^r \mid \psi(t, w) \leq 1\}, \quad (1.31)$$

$$\mathcal{R}_i = \{w \in \mathbb{R}^r \mid \psi_i(w) \leq 1\}. \quad (1.32)$$

Для восстановления исходной постановки задачи по билинеаризованной необходимо, чтобы образ $\varphi(\partial\mathcal{X}^0)$ границы начального множества лежал на границе нового начального множества $\tilde{\mathcal{X}}^0$, а образ границы фазового ограничения — на

границе нового фазового ограничения. Для этого, в частности, можно положить

$$\tilde{\mathcal{X}}^0 = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \mid \sigma(C_0 \tilde{x}) + \|\tilde{x} - \varphi(C_0 \tilde{x})\|^2 = \tilde{\sigma}(\tilde{x}) \leq 1 \}, \quad (1.33)$$

$$\tilde{\mathcal{Y}}(t) = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \mid \psi(t, y(t) - g(t, C_0 \tilde{x})) + \|\tilde{x} - \varphi(C_0 \tilde{x})\|^2 \leq 1 \}, \quad (1.34)$$

$$\tilde{\mathcal{Y}}_i = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \mid \psi_i(y_i - g_i(C_0 \tilde{x})) + \|\tilde{x} - \varphi(C_0 \tilde{x})\|^2 \leq 1 \}. \quad (1.35)$$

По аналогии с тем, как это было проделано для задачи достижимости, в рассматриваемых задачах гарантированного оценивания за счет добавления фиктивной переменной можно перейти к звездным и центрально-симметричным относительно нуля множествам $\tilde{\mathcal{X}}^0$, $\tilde{\mathcal{Y}}(t)$ и $\tilde{\mathcal{Y}}_i$. Далее считаем, что такой переход уже был произведен. Справедливо следующее утверждение [61].

Теорема 8 Пусть начальное множество $\tilde{\mathcal{X}}^0$ и фазовые ограничения $\tilde{\mathcal{Y}}(t)$ являются звездными и центрально-симметричными относительно нуля множествами. Тогда этими свойствами обладает также информационное множество $\tilde{\mathcal{X}}(t; t_0, \tilde{\mathcal{X}}^0)$ для билинейной системы (1.26).

Аналогичная теорема справедлива и в задаче с дискретными измерениями.

Итак, от исходных постановок задач гарантированного оценивания для нелинейной системы (1.1), (1.2), (1.7) и (1.1), (1.2), (1.8) мы перешли к соответствующим задачам гарантированного оценивания для билинейной системы (1.26), (1.33), (1.34) и (1.26), (1.33), (1.35). Предположим далее, что были получены аппроксимации информационного множества $\tilde{\mathcal{X}}[t]$ в билинеаризованной задаче: внешняя $\tilde{\mathcal{X}}^+[t]$ и внутренняя $\tilde{\mathcal{X}}^-[t]$, представляющие собой множества уровня некоторых функций:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}[t] \subseteq \tilde{\mathcal{X}}^+[t] &= \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \mid \tilde{w}^+(t, \tilde{x}) \leq 1 \}, \\ \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \mid \tilde{w}^-(t, \tilde{x}) \leq 1 \} &= \tilde{\mathcal{X}}^-[t] \subseteq \tilde{\mathcal{X}}[t]. \end{aligned}$$

Тогда соответствующие аппроксимации исходного информационного множества $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}^+[t] &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{w}^+(t, \varphi(x)) \leq 1 \}, \\ \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{w}^-(t, \varphi(x)) \leq 1 \} &= \mathcal{X}^-[t] \subseteq \mathcal{X}[t]. \end{aligned}$$

Точно такие же формулы перехода справедливы и для оценок информационных множеств в задаче с дискретными измерениями.

Таким образом, мы показали, что задача аппроксимации информационных множеств для билинеаризуемых систем также может быть решена путем решения соответствующей задачи аппроксимации для билинейной системы. Заметим, что информационные множества $\mathcal{X}[t]$ и $\mathcal{X}^l[t]$ в исходной постановке могут быть несвязными. Однако, информационные множества в итоговой билинейной постановке являются звездными [61] и, следовательно, связными.

1.5.3 Задача синтеза управлений

Далее рассмотрим схему решения задачи синтеза управлений для нелинейных систем, сформулированную в разделе 1.1, ограничившись случаем систем линейных по управлению и помехе:

$$\dot{x} = f(x(t)) + G_1(x(t))u + G_2(x(t))v, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.36)$$

Входом этой системы считаем вектор $[u^T, v^T]^T$. Если такая система оказалась билинеаризуемой, то ее билинейная реализация будет иметь вид:

$$\dot{\tilde{x}} = (A_0 + u_1 A_1 + \dots + u_{d_1} A_{d_1} + v_1 B_1 + \dots + v_{d_2} B_{d_2}) \tilde{x}. \quad (1.37)$$

Новое целевое множество $\tilde{\mathcal{M}}$ выбирается совершенно аналогично тому, как это было сделано выше с начальным множеством в задаче достижимости. Так как между траекториями исходной системы и определенным подмножеством траекторий ее билинейной реализации существует взаимнооднозначное соответствие, которое определяется равенствами

$$x = C_0 \tilde{x}, \quad \tilde{x} = \varphi(x),$$

то для позиционного управления $\tilde{u}(\tilde{x})$, которое решает задачу синтеза для билинейной реализации, соответствующее позиционное управление, решающее исходную задачу, определяется равенством $u(x) = \tilde{u}(\varphi(x))$.

Глава 2

Задача достижимости для билинейных систем управления

2.1 Постановка задач

Рассматривается билинейная управляемая система

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.1)$$

$$A \in \mathcal{A}(t), \quad x(t_0) \in \mathcal{X}^0, \quad (2.2)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, а $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — управление. Многозначное отображение $\mathcal{A}(\cdot)$ предполагается непрерывным в метрике Хаусдорфа со значениями в множестве выпуклых компактов. В этой главе будут рассмотрены следующие варианты множеств $\mathcal{A}(t)$.

1. $\mathcal{A}(t)$ — параллелепипед в пространстве матриц. В этом случае имеет место представление

$$A(t) = A_0(t) + u_1 A_1(t) + \cdots + u_d A_d(t), \quad (2.3)$$

в котором $A_j(\cdot)$ являются непрерывными функциями при $j = \overline{1, d}$, а функции $u(\cdot)$ лежат в классе $L^\infty([t_0, t_1], [-1, 1]^d)$.

2. $\mathcal{A}(t)$ — эллипсоид в пространстве матриц:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{E}(0, P(t)) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \langle A, P^{-1}(t) \circ A \rangle_F = \langle \bar{A}, P^{-1}(t) \bar{A} \rangle \leq 1\}. \quad (2.4)$$

Здесь $P(\cdot)$ является непрерывной функцией со значениями в $\mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $P(t) = P^T(t) \geq 0$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ — скалярное произведение, порожденное нормой Фробениуса. Операция $\circ$ действует следующим образом:

$$K \circ A = B \quad \Leftrightarrow \quad K \bar{A} = \bar{B},$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, а вектор-столбец $\bar{C} \in \mathbb{R}^{n^2}$ есть вытягивание по строкам матрицы C :

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} & C_{21} & \dots & C_{2n} & \dots & C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

Далее будут рассматриваться начальные множества $\mathcal{X}^0$ следующих видов.

1. Начальное множество $\mathcal{X}^0$ задано в виде множества уровня липшицевой положительно однородной функции:

$$\mathcal{X}^0 = \{x \mid \sigma(x) \leq 1\}. \quad (2.5)$$

2. Начальное множество $\mathcal{X}^0$ ограничено поверхностью второго порядка:

$$\mathcal{X}^0 = \{x \mid \sigma(x) = \langle x, X^0 x \rangle \leq 1\}, \quad X^0 = (X^0)^T. \quad (2.6)$$

3. Начальное множество $\mathcal{X}^0$ представляет собой объединение конечного набора эллипсоидов:

$$\mathcal{X}^0 = \left\{ x \mid \sigma(x) = \min_{1 \leq k \leq m} \langle x, X_k^0 x \rangle \leq 1 \right\}, \quad X_k^0 = (X_k^0)^T > 0. \quad (2.7)$$

Класс допустимых на отрезке $[t_0, t]$ управлений $\mathcal{U}(t)$ состоит из измеримых функций $A(\cdot)$ таких, что $A(t) \in \mathcal{A}(t)$ почти всюду:

$$\mathcal{U}(t) = L^\infty([t_0, t]; \mathcal{A}(\cdot)).$$

Таким образом, множество достижимости $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ в момент t из начального множества $\mathcal{X}^0$ задается следующим равенством:

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid \exists A(\cdot) \in \mathcal{U}(t) : x(t_0; t, x, A(\cdot)) \in \mathcal{X}^0\}.$$

Сформулируем далее задачи, которые будут рассматриваться в этой главе [26, 28, 27].

Задача 7 Построить параметрические семейства внутренних и внешних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}, \quad \left\{ \mathcal{X}_\xi^-(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}$$

множества достижимости $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ системы (2.1), (2.2), (2.3), (2.6)

$$\mathcal{X}_\xi^-[t] \subseteq \mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}_\xi^+[t]$$

при помощи множеств уровня квадратичных форм

$$\mathcal{X}_\xi^+[t] = \{x \mid \langle x, K^+(t)x \rangle \leq 1\}, \quad \mathcal{X}_\xi^-[t] = \{x \mid \langle x, K^-(t)x \rangle \leq 1\}. \quad (2.8)$$

В дальнейшем для краткости будем называть оценки такого вида *квадратичными оценками*.

Задача 8 Построить параметрические семейства внутренних и внешних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}, \quad \left\{ \mathcal{X}_\xi^-(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}$$

множества достижимости $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ системы (2.1), (2.2), (2.4), (2.7)

$$\mathcal{X}_\xi^-[t] \subseteq \mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}_\xi^+[t]$$

при помощи объединений эллипсоидов ($K_j^\pm(t) > 0$)

$$\mathcal{X}_\xi^+[t] = \bigcup_{s=1}^m \{x \mid \langle x, K_s^+(t)x \rangle \leq 1\}, \quad \mathcal{X}_\xi^-[t] = \bigcup_{s=1}^m \{x \mid \langle x, K_s^-(t)x \rangle \leq 1\}. \quad (2.9)$$

Оценки вида (2.9) будем также называть *кусочно-квадратичными*.

Задача 9 Оценить изнутри множество достижимости $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ системы (2.1), (2.2), (2.3), (2.5)

$$\mathcal{X}^-[t] \subseteq \mathcal{X}[t]$$

при помощи множеств вида

$$\mathcal{X}^-[t] = \{x \mid \sigma(S^{-1}(t_0)S(t)x) + \gamma(t)\psi(S(t)x) \leq 1\}.$$

Отметим, что множество достижимости $\mathcal{X}[t]$, как и оценки $\mathcal{X}^-[t]$, $\mathcal{X}^+[t]$ в указанных выше задачах, является центрально-симметричным и звездным относительно нуля [23, 61].

Справедливо следующее утверждение (см., например, [51]).

Теорема 9 Пусть функция $\sigma(x)$ определена в соответствии с одной формул (2.5)-(2.7), а многозначное отображение определяется формулой (2.3) или (2.4). Тогда функция цены

$$V(t, x) = \inf_{A(\cdot) \in \mathcal{U}(t)} \sigma(x(t_0; t, x, A(\cdot)))$$

непрерывна и является единственным вязкостным решением уравнения

$$V_t + \max_{A \in \mathcal{A}(t)} \langle V_x, Ax \rangle = 0, \quad V(t_0, x) = \sigma(x).$$

2.2 Квадратичные аппроксимации множеств достижимости

Этот раздел посвящен решению задачи 7. Рассматривается билинейная система (2.1), (2.2), (2.3), (2.6):

$$\dot{x} = [A_0(t) + u_1(t)A_1(t) + \cdots + u_d(t)A_d(t)]x, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.10)$$

$$x(t_0) \in \mathcal{X}^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, X^0 x \rangle \leq 1\}. \quad (2.11)$$

Функция цены в данном случае имеет вид

$$V(t, x) = \inf_{u(\cdot)} \{ \langle x(t_0), \mathcal{X}^0 x(t_0) \rangle \mid x(t) = x \}.$$

Она является вязкостным решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$V_t + \langle V_x, A_0(t)x \rangle + \sum_{j=1}^d |\langle V_x, A_j(t)x \rangle| = 0 \quad (2.12)$$

с начальным условием

$$V(t_0, x) = \langle x, X^0 x \rangle. \quad (2.13)$$

Далее будем искать вязкостные субрешения и вязкостные суперрешения уравнения (2.12), удовлетворяющие начальному условию (2.13), которые представляют собой квадратичные формы по переменной x :

$$w(t, x) = \langle x, K(t)x \rangle, \quad K(t_0) = X^0. \quad (2.14)$$

Здесь функция $K(\cdot)$ предполагается непрерывно дифференцируемой, а матрицы $K(t)$ — симметричными. При этих предположениях для частных производных функции w справедливы формулы:

$$w_t^-(t, x) = \langle x, \dot{K}(t)x \rangle, \quad w_x^-(t, x) = 2K(t)x.$$

2.2.1 Внешние аппроксимации

Для того, чтобы построить целое семейство оценок такого вида, рассмотрим характеристическую систему для уравнения (2.12):

$$\dot{x} = [A_0(t) + \sum_{j=1}^d u_j(t)A_j(t)]x, \quad (2.15)$$

$$\dot{p} = -[A_0^T(t) + \sum_{j=1}^d u_j(t)A_j^T(t)]p, \quad (2.16)$$

$$u_j(t) \in \text{sign}(\langle p(t), A_j(t)x(t) \rangle). \quad (2.17)$$

Здесь

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} \{1\}, & a > 0, \\ \{-1\}, & a < 0, \\ [-1, 1], & a = 0. \end{cases}$$

В качестве параметра оценки будем использовать решение $(\bar{x}(t), \bar{p}(t))$ этой системы, такое что $\bar{p}(t_0) = 2X^0\bar{x}(t_0)$.

Гамильтониан $H(t, x, w_x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} H(t, x, w_x(t, x)) &= \langle x, (A_0^T(t)K(t) + K(t)A_0(t))x \rangle + \\ &+ \sum_{j=1}^d |\langle x, (A_j^T(t)K(t) + K(t)A_j(t))x \rangle|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В соответствии с определением 6, функция w представляет собой вязкостное субрешение уравнения (2.12), если справедливо неравенство

$$w_t + H(t, x, w_x) \leq 0. \quad (2.19)$$

Чтобы получить условие на матрицу $K(t)$, при котором это неравенство выполняется, оценим сверху функцию $H(t, x, w_x(t, x))$ с помощью квадратичной формы по переменной x . Для этого рассмотрим разложение

$$\begin{aligned} M_j(t) &= A_j^T(t)K(t) + K(t)A_j(t) = Q_j^T(t)\Lambda_j(t)Q_j(t), \\ \Lambda_j(t) &= \text{diag}(\lambda_1^j(t), \dots, \lambda_n^j(t)). \end{aligned}$$

Матрица $Q_j(t)$ имеет следующую структуру:

$$Q_j(t) = Q_{3j}(t)Q_{2j}(t)Q_{1j}(t).$$

Здесь матрица $Q_{1j}(t)$ ортогональна и удовлетворяет условию

$$Q_{1j}(t)\bar{x}(t) = \|\bar{x}(t)\|[1, 0, \dots, 0]^T.$$

Невырожденная матрица $Q_{2j}(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{2j}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -c_j(t) \\ 0_{(n-1) \times 1} & L_j(t) \end{bmatrix}, \\ c_j(t) &= (m_{11}^j(t))^{-1}[m_{12}^j(t) \dots m_{1n}^j(t)], \\ M_{1j}(t) &= Q_{1j}(t)M_j(t)Q_{1j}^T(t) = (m_{is})_{i,s=1}^n. \end{aligned}$$

Здесь $L_j(t)$ является произвольной невырожденной матрицей, такой что функ-

ция $L_j(\cdot)$ непрерывна. Ортогональная матрица $Q_{3j}(t)$ диагонализует матрицу

$$M_{2j}(t) = (Q_{2j}(t))^{-1} M_{1j}(t) (Q_{2j}^T(t))^{-1},$$

так что

$$M_{2j}(t) = Q_{3j}^T(t) \Lambda_j(t) Q_{3j}(t).$$

После преобразования $\tilde{x} = Q_j(t)x$ получаем неравенства

$$|\langle x, M_j(t)x \rangle| = |\langle \tilde{x}, \Lambda_j(t)\tilde{x} \rangle| \leq \langle \tilde{x}, \text{Abs}(\Lambda_j(t))\tilde{x} \rangle = \langle x, Q_j^T \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j x \rangle,$$

в которых

$$\text{Abs}(\Lambda_j(t)) = \text{diag}(|\lambda_1^j(t)|, \dots, |\lambda_n^j(t)|).$$

Ясно, что неравенство (2.19) будет выполняться, если

$$\dot{K} + \sum_{j=1}^d Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) = 0. \quad (2.20)$$

Это уравнение, взятое вместе с начальным условием $K(\tau) = X^0$, гарантирует выполнение соотношения $w^-(t, x) \leq V(t, x)$. Вообще говоря, решение уравнения (2.20), а значит и субрешение $w^-(t, x)$, определено на некотором максимальном полуинтервале $[t_0, \vartheta)$, который может быть конечным или бесконечным. В частности, если величина $\|c_j(t)\|$, ограничена на $[t_0, \vartheta_1]$ для всех j , то $\vartheta_1 < \vartheta$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 10 Пусть функция $K(t)$ является решением уравнения (2.20) с начальным условием $K(\tau) = X^0$. Тогда для множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0, X^0)$ справедливо включение

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}^+[t], \quad (2.21)$$

в котором

$$\mathcal{X}^+[t] = \{x \mid \langle x, K(t)x \rangle \leq 1\}. \quad (2.22)$$

Замечание 3 Если в уравнении (2.20) все слагаемые $Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t)$ оказались непрерывными, то в соответствии с теоремой 2 выполняется включение $\bar{x}(t) \in \partial \mathcal{X}[t] \cap \partial \mathcal{X}^+[t]$.

Пересечения элементарных оценок (2.22), отвечающих различным траекториям системы (2.15)-(2.17), могут быть использованы в качестве более точных аппроксимаций множеств достижимости:

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \bigcap_{\xi} \mathcal{X}_{\xi}^{+}[t], \quad (2.23)$$

где ξ представляет собой совокупность параметров $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot))$, $L_j(\cdot)$, $j = \overline{1, n}$. При этом, отдельные оценки в таких пересечениях строятся независимо, что позволяет эффективно использовать параллельные вычисления.

Пересечение всех оценок, которые можно построить в соответствии с теоремой 10, является, вообще говоря, лишь внешней аппроксимацией множества достижимости и может с ним не совпадать. Рассмотрим, например, систему

$$\dot{x} = \left(u_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) x, \quad x(t_0) \in \mathcal{E}(0, X_0), \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

У этой системы существуют траектории, которые лежат на границе множества достижимости до некоторого фиксированного момента θ . При этом любая оценка $\mathcal{H}(t, x, w_x)$ гамильтониана $H(t, x, w_x)$, построенная по приведенным выше формулам, может удовлетворять равенству $H(t, x, w_x) = \mathcal{H}(t, x, w_x)$ только вдоль одной траектории $\bar{x}(\cdot)$. Таким образом, траектория $\tilde{x}(\cdot)$, такая что $\bar{x}(\theta) = \tilde{x}(\theta)$, будет лежать во множестве $\text{int} \mathcal{X}^{+}[t]$ при $t > t_0$. Откуда следует, что $\bar{x}(\theta) \in \text{int} \mathcal{X}^{+}[\theta]$.

2.2.2 Внутренние аппроксимации

В качестве параметров внутренней квадратичной оценки будем использовать допустимые управления $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}(t_1)$. В соответствии с определением 7, функция w представляет собой вязкостное суперрешение уравнения (2.12), если справедливо неравенство

$$w_t + H(t, x, w_x) \geq 0, \quad (2.24)$$

в котором величина $H(t, x, w_x)$ определяется формулой (2.18). Чтобы получить условие на матрицу $K(t)$, при котором это неравенство выполняется, необхо-

димо оценить сверху функцию $H(t, x, w_x)$ с помощью квадратичной формы по переменной x . Оценивая, получаем следующее уравнение

$$\dot{K} + \sum_{j=1}^d \bar{u}_j(t)(A_j^T(t)K(t) + K(t)A_j(t)) = 0, \quad K(t_0) = X^0. \quad (2.25)$$

В результате мы приходим к утверждению.

Теорема 11 Пусть функция $K(t)$ является решением уравнения (2.24) с начальным условием $K(\tau) = X^0$. Тогда для множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0, X^0)$ справедливо включение

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}^+[t], \quad (2.26)$$

в котором

$$\mathcal{X}^+[t] = \{x \mid \langle x, K(t)x \rangle \leq 1\}. \quad (2.27)$$

Легко заметить, что такие внутренние оценки представляют собой эволюционные множества из начального множества $\mathcal{X}^0$ в силу системы (2.1) при некотором фиксированном управлении $\bar{u}(\cdot)$.

Далее рассмотрим понятие внутренней тугой оценки, введенное в работе [64].

Определение 14 Внутреннюю оценку $\mathcal{X}^-[t]$ будем называть тугой в классе $\tilde{\mathcal{A}}$, если для любой оценки $\tilde{\mathcal{X}}^-[t] \in \tilde{\mathcal{A}}$ из включения $\mathcal{X}^-[t] \subseteq \tilde{\mathcal{X}}^-[t] \subseteq \mathcal{X}[t]$ следует, что $\tilde{\mathcal{X}}^-[t] = \mathcal{X}^-[t]$.

Ясно, что для любой квадратичной формы $\langle x, Qx \rangle$, которая оценивает гамильтониан $H(t, x, w_x^+(t, x))$ снизу, для некоторых функций $u_j(t) \in [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$Q \leq \sum_{j=1}^d u_j(t)(A_j^T(t)K(t) + K(t)A_j(t)).$$

Это приводит нас к следующему утверждению.

Теорема 12 Семейство всех оценок, которые могут быть построены с помощью теоремы 11 содержит все тугие оценки в классе оценок вида

$$\tilde{\mathcal{X}}^+[t] = \{x \mid w(t, x) \leq 1\},$$

где $w(t, x) = \langle x, K(t)x \rangle$, функция $K(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, а функция w является вязкостным суперрешением уравнения (1.9).

Таким образом, внутренние оценки в этом классе оказываются тривиальными. В следующих разделах этой главы будут приведены примеры других внутренних оценок, не являющихся эволюционными множествами для рассматриваемой системы или их объединениями.

2.3 Кусочно-квадратичные аппроксимации множеств достижимости

В этом параграфе производится построение решения задачи 8. Рассматривается билинейная система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x, \quad t \in [t_0, t_1], \\ A(t) &\in \mathcal{A}(t) = \mathcal{E}(0, P(t)), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — это управление (или помеха), значения которого лежат в эллипсоиде

$$\mathcal{E}(0, P(t)) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \langle A, P^{-1}(t) \circ A \rangle_F = \langle \bar{A}, P^{-1}(t) \bar{A} \rangle \leq 1\} \quad (2.29)$$

с непрерывной матрицей формы $P(t) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $P(t) = P^T(t) \geq 0$.

Квадрат функции Минковского множества достижимости из начального множества $\mathcal{X}^0$

$$\mu^2(x \mid \mathcal{X}[t]) = \inf \{ \lambda^2 \mid \lambda^{-1}x \in \mathcal{X}[t], \lambda > 0 \} \quad (2.30)$$

совпадает с функцией цены в задаче оптимального управления

$$V(t, x) = \min_{A(\cdot) \in \mathcal{U}(t)} \min_{1 \leq k \leq m} \langle x(t_0; t, x, A(\cdot)), X_k^0 x(t_0; t, x, A(\cdot)) \rangle,$$

которая удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$V_t + \max_{A \in \mathcal{A}} \langle V_x, Ax \rangle = V_t + H(t, x, V_x) = 0 \quad (2.31)$$

с начальным условием $V(t_0, x) = \langle x, X^0 x \rangle$. Вычисляя максимум в гамильтони-

ане $H(t, x, p)$, получаем

$$\begin{aligned} H(t, x, p) &= \max_{A \in \mathcal{A}(t)} \langle p, Ax \rangle = \max_{A \in \mathcal{A}(t)} \langle px^T, A \rangle_F = \\ &= \sqrt{\langle px^T, P(t) \circ px^T \rangle} = \sqrt{\langle p \otimes x, P(t)(p \otimes x) \rangle}. \end{aligned}$$

В соответствии со схемой применения принципа сравнения, приведенной в параграфе 1.2, для решения указанных задач необходимо построить вязкостные суб- и суперрешения $w^\pm(t, x)$ уравнения (2.31) с начальным условием $w^\pm(t_0, x) = \min_{1 \leq k \leq m} \langle x, X_k^0 x \rangle$. Такие суб- и суперрешения будут являться нижними и, соответственно, верхними оценками функции цены $V(t, x)$. Оценкам множества достижимости (2.9) соответствуют оценки функции цены в виде

$$w^\pm(t, x) = \min_{1 \leq s \leq m} \langle x, K_s(t)x \rangle. \quad (2.32)$$

Везде далее считаем выполненным следующее

Предположение 2 *Функции $K_s(\cdot)$ удовлетворяют условиям*

$$K_s(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]), \quad K_s(t_0) = X_s^0 > 0.$$

Введем в рассмотрение набор открытых множеств $\mathcal{W}_s(t)$ ($s = \overline{1, m}$), удовлетворяющих условиям

$$\{x \mid \langle x, K_s(t)x \rangle < \langle x, K_j(t)x \rangle, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq s\} \subseteq \mathcal{W}_s(t), \quad (2.33)$$

$$\mathcal{W}_{s_1}(t) \cap \mathcal{W}_{s_2}(t) = \emptyset \quad \text{при} \quad s_1 \neq s_2, \quad \overline{\bigcup_s \mathcal{W}_s(t)} = \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathcal{W}_s(t)$ функции $w^\pm(t, x)$ дифференцируемы, и $w_t^\pm(t, x) = \langle x, \dot{K}_s(t)x \rangle$, $w_x^\pm(t, x) = 2K_s(t)x$.

В дальнейшем, для краткости, мы иногда будем опускать зависимость некоторых функций от t и писать, к примеру, K_s вместо $K_s(t)$.

Заметим также, что все результаты этого параграфа могут быть очевидным образом обобщены на случай $\mathcal{A}(t) = \mathcal{E}(0, P^1(t)) + \dots + \mathcal{E}(0, P^k(t))$. В частности, при $\text{rank} P^j(t) = 1$ множество $\mathcal{A}(t)$ представляет собой параллелепипед в пространстве матриц. Однако, в этом параграфе мы ограничимся случаем $k = 1$.

2.3.1 Внешние аппроксимации

Для вычисления субрешений уравнения (2.31) построим оценку сверху для гамильтониана $H(t, x, p)$ при $x \in \mathcal{W}_s(t)$, $p = w_x^-(t, x)$ с помощью квадратичной формы по x :

$$\begin{aligned} H(t, x, w_x^-) &= \sqrt{\langle K_s x \otimes x, P(K_s x \otimes x) \rangle} \leq \sqrt{\langle x \otimes x, (P_{1s} \otimes P_{2s})(x \otimes x) \rangle} = \\ &= \sqrt{\langle x, P_{1s} x \rangle \langle x, P_{2s} x \rangle} \leq (4\mu_s)^{-1} \langle x, P_{1s} x \rangle + \mu_s \langle x, P_{2s} x \rangle = \mathcal{H}(t, x, w_x^-). \end{aligned}$$

Здесь неотрицательно определенные матрицы P_{1s} и P_{2s} выбраны так, что справедливо первое из неравенств. Вопрос вычисления таких матриц рассмотрен далее. Заметим, что P_{1s} и P_{2s} суть функции от t и от набора матриц $\{K_j, j = \overline{1, m}\}$. Второе неравенство справедливо для любых матриц P_{1s} , P_{2s} и любого $\mu_s > 0$. Если μ_s определено по формуле

$$\mu_s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\langle \bar{x}_s, P_{1s} \bar{x}_s \rangle}{\langle \bar{x}_s, P_{2s} \bar{x}_s \rangle}},$$

то неравенство обращается в равенство в точке $x = \bar{x}_s \in \mathcal{W}_s(t)$.

Таким образом, для справедливости неравенства (1.13) при $x \in \cup_s \mathcal{W}_s(t)$ достаточно, чтобы

$$w_t^- + \mathcal{H}(t, x, w_x^-) \leq 0.$$

Записывая это условие более подробно, получаем

$$\langle x, \dot{K}_s x \rangle + (4\mu_s)^{-1} \langle x, P_{1s} x \rangle + \mu_s \langle x, P_{2s} x \rangle \leq 0, \quad x \in \mathcal{W}_s, \quad s = \overline{1, m}.$$

Эти неравенства квадратичны по x , поэтому достаточным условием их выполнения будет равенство нулю матриц соответствующих квадратичных форм:

$$\dot{K}_s + (4\mu_s)^{-1} P_{1s} + \mu_s P_{2s} = 0, \quad s = \overline{1, m}. \quad (2.34)$$

Эти соотношения следует рассматривать как уравнения относительно K_s .

Далее необходимо рассмотреть неравенство (1.13) при $x \notin \cup_s \mathcal{W}_s(t)$. Функция $H(t, x, p)$ выпукла по p и непрерывна по совокупности переменных, а множество $D^+ w^-(t, x)$ компактно. Поэтому существует пара, $(q_{\max}, p_{\max}) \in \partial D^+ w^-(t, x)$

такая, что

$$(q_{\max}, p_{\max}) \in \operatorname{Arg} \max_{(q,p) \in D^+ w^-(t,x)} [q + H(t, x, p)].$$

По известной теореме (см., например, [45]) для этой точки (t, x) и для $(q_{\max}, p_{\max}) \in \partial D^+ w^-(t, x)$ существует последовательность точек $(t_k, x_k) \rightarrow (t, x)$ такая, что $x_k \in \cup_s \mathcal{W}_s(t_k)$ и $(q_k, p_k) = (w_t^-(t_k, x_k), w_x^-(t_k, x_k)) \rightarrow (q, p)$. Используя непрерывность гамильтониана $H(t, x, p)$ по совокупности переменных, получаем

$$0 \geq q_k + \mathcal{H}(t_k, x_k, p_k) \geq q_k + H(t_k, x_k, p_k) \rightarrow q_{\max} + H(t, x, p_{\max}).$$

Таким образом, доказана

Теорема 13 Пусть функции $K_s(t)$ удовлетворяют предположению 2, а открытые множества $\mathcal{W}_s(t)$ удовлетворяют условиям (2.33). Кроме того, пусть при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathcal{W}_s(t)$ для некоторых непрерывных функций $P_{1s}(t) \geq 0$, $P_{2s}(t) \geq 0$ справедливы неравенства ($s = \overline{1, m}$)

$$\langle x \otimes x, (K_s(t) \otimes I)P(t)(K_s(t) \otimes I)(x \otimes x) \rangle \leq \langle x \otimes x, (P_{1s}(t) \otimes P_{2s}(t))(x \otimes x) \rangle, \quad (2.35)$$

а матрицы $K_s(t)$ являются решениями уравнений

$$\dot{K}_s + \mu_s^{-1}(t)P_{1s}(t) + \mu_s(t)P_{2s}(t) = 0, \quad s = \overline{1, m}$$

при некоторых $\mu_s = \mu_s(t) > 0$. Тогда имеет место включение

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}^+[t] = \{x \mid w^-(t, x) \leq 1\} = \left\{x \mid \min_{1 \leq s \leq m} \langle x, K_s(t)x \rangle \leq 1\right\}.$$

Далее рассмотрим вопрос касания множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ и оценки $\mathcal{X}^+[t]$. Будем говорить, что множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ касаются, если $\partial \mathcal{A} \cap \partial \mathcal{B} \neq \emptyset$. Множества $\mathcal{X}[t]$ и $\mathcal{X}^+[t]$ касаются тогда и только тогда, когда существует точка $z \in \mathbb{R}^n$ такая, что $w^-(t, z) = V(t, z)$. Используя результаты раздела 1.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 14 Пусть для некоторого j и некоторой траектории $\bar{x}(\cdot)$ системы (2.28), (2.29) выполняется включение $\bar{x}(t) \in \mathcal{W}_j(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$. Пусть далее в условиях теоремы 13 неравенство (2.35) для $s = j$ обращается в равенство

при $x = \bar{x}(t)$, а функция $\mu_j(t)$ выбрана следующим образом:

$$\mu_j(t) = \sqrt{\frac{\langle \bar{x}_j(t), P_{1j}(t) \bar{x}_j(t) \rangle}{\langle \bar{x}_j(t), P_{2j}(t) \bar{x}_j(t) \rangle}}.$$

Тогда $w^-(t, \bar{x}(t)) = V(t, \bar{x}(t))$, то есть множества $\mathcal{X}[t]$ и $\mathcal{X}^+[t]$ касаются. В частности, из условия $\bar{x}(t) \in \partial \mathcal{X}[t]$ следует условие $\bar{x}(t) \in \partial \mathcal{X}^+[t]$.

Алгоритм решения основного неравенства

Для построения оценок множества достижимости в соответствии с теоремой 13 необходимо иметь алгоритм решения неравенств вида 2.3.1. Заметим, что, вообще говоря, недоминируемое решение этого неравенства неединственно. Ниже приведен лишь один пример алгоритма решения неравенства 2.3.1 для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Рассмотрение аппроксимаций множества достижимости в виде (2.9) при $m \geq 2$ имеет смысл, если оказывается возможным получить такие оценки $\mathcal{X}^+[t]$ и $\mathcal{X}^-[t]$, что не все отдельные множества $\{x \mid \langle x, \mathcal{K}_s(t)x \rangle \leq 1\}$ определяют соответственно сильно и слабо инвариантные относительно рассматриваемой системы многозначные отображения. Другими словами, это имеет смысл в случае, когда не все функции $\langle x, K_s(t)x \rangle$ являются вязкостными суб- и суперрешениями уравнения (2.31). Приводимый далее алгоритм решения неравенств вида (2.3.1) позволяет в некоторых случаях получать такие оценки. Это иллюстрируется в конце главы на нескольких примерах.

Пусть задана симметричная матрица P размера $n^2 \times n^2$. Требуется оценить сверху функцию

$$F(x) = \langle x \otimes x, P(x \otimes x) \rangle$$

с помощью функции вида

$$G(x) = \langle x \otimes x, (P_1 \otimes P_2)(x \otimes x) \rangle = \langle x, P_1 x \rangle \langle x, P_2 x \rangle, \quad P_1 \geq 0, \quad P_2 \geq 0$$

при всех $x \in \mathcal{W}$ так, чтобы в точке $\bar{x} \in \mathcal{W}$ выполнялось равенство $F(\bar{x}) = G(\bar{x})$. Можно выделить два случая:

1. Множество $\mathcal{W}$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$;
2. Множество $\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Wx \rangle \geq 0\}$, где W — симметричная матрица;

ца размера $n \times n$, которая имеет $n - 1$ отрицательных и одно положительное собственное значение.

Далее будет рассматриваться второй случай. Для первого случая схема остается справедливой, но некоторые шаги необходимо опустить. Предлагаемый алгоритм может быть использован для решения неравенств (2.3.1) в том случае, когда множества $\mathcal{W}_s(t)$ могут быть вложены в множества вида $\mathcal{W}$ при $t_0 \leq t \leq t_1$.

Существует невырожденная матрица $U \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$U^{-1}\bar{x} = \bar{y} \equiv [1, 0, \dots, 0],$$

$$U^T W U = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_j < 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{2, n}.$$

После замены переменных $y = U^{-1}x$ неравенство $F(x) \leq G(x)$ принимает вид

$$\langle y \otimes y, (U^T \otimes U^T)P(U \otimes U)(y \otimes y) \rangle \leq \langle y \otimes y, (U^T P_1 U \otimes U^T P_2 U)(y \otimes y) \rangle. \quad (2.36)$$

Определим матрицы: $\tilde{P} = (U^T \otimes U^T)P(U \otimes U)$, $\tilde{P}_i = U^T P_i U$, $\tilde{W} = U^T W U$. Таким образом, теперь требуется решить поставленную задачу для вектора $\bar{y}$ и диагональной матрицы $\tilde{W}$. Далее, не вводя дополнительных обозначений, проведем последовательность преобразований над матрицей $\tilde{P}$, при которых величина $\langle y \otimes y, \tilde{P}(y \otimes y) \rangle$ не изменяется при каждом $y \in U^{-1}\mathcal{W}$.

Вводя обозначение $z = y \otimes y$, получаем, что

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_{n+1} & z_{n+2} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n^2-n+1} & z_{n^2-n+2} & \dots & z_{n^2} \end{bmatrix}$$

является симметричной положительно определенной матрицей ранга 1. Свойство $\text{rank} Z = 1$ означает, что любой минор этой матрицы порядка 2 равен нулю. Таким образом, z принадлежит множеству нулей определенного набора квадратичных форм, что позволяет прибавлять к $\tilde{P}$ матрицы этих квадратичных форм, не изменяя величины $\langle y \otimes y, \tilde{P}(y \otimes y) \rangle$. В частности, в этот набор входят

квадратичные формы

$$\det \begin{bmatrix} z_{n(j-1)+j} & z_{n(j-1)+k} \\ z_{n(k-1)+j} & z_{n(k-1)+k} \end{bmatrix} = 0, \quad j \neq k,$$

что позволяет обнулить элементы $\tilde{P}_{(n(j-1)+j)(n(k-1)+k)}$ при $j \neq k$. Условие симметричности также можно записать в виде равенства нулю определенного набора квадратичных форм:

$$\langle z, M_i z \rangle = z_l(z_{n(j-1)+k} - z_{n(k-1)+j}) = 0, \quad j, k, l = \overline{1, n}, \quad j \neq k.$$

Используя эти квадратичные формы при $l = n(j-1) + k$ или $l = n(k-1) + j$, можно привести матрицу $\tilde{P}$ к блочно-диагональному виду с блоками размера n . Ограничение $x \in \mathcal{W}$ с учетом соотношения $x = Uy$ эквивалентно неравенству $\langle y, U^T W U y \rangle = \langle y, \tilde{W} y \rangle \geq 0$. Следовательно, при $\lambda_j \geq 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \langle y \otimes y, \tilde{P}(y \otimes y) \rangle &\leq \langle y \otimes y, \left(\tilde{P} + \text{diag}(0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \otimes \tilde{W} \right) (y \otimes y) \rangle = \\ &= \langle y \otimes y, R(y \otimes y) \rangle. \end{aligned}$$

При выборе соответствующем выборе неотрицательных чисел λ_j , можно получить матрицы с одним положительным собственным значением во всех блоках матрицы R , кроме первого. Далее используем следующие из условий симметричности:

$$z_{n(j-1)+k}^2 - z_{n(k-1)+j}^2 = 0.$$

Эти условия позволяют получить отрицательно определенные матрицы во всех блоках матрицы R , кроме первого. Выберем матрицы $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ из соотношений

$$\tilde{P}_1 \geq R_1, \quad \tilde{P}_1 \geq 0, \quad (\tilde{P}_1)_{11} = (R_1)_{11}, \quad \tilde{P}_2 = [1, 0, \dots, 0]^T [1, 0, \dots, 0],$$

где через R_1 обозначен первый блок матрицы R . При таком выборе матриц $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ неравенство (2.36) будет справедливо. Остается только вернуться к исходным координатам:

$$P_1 = (U^T)^{-1} \tilde{P}_1 U^{-1}, \quad P_2 = (U^T)^{-1} \tilde{P}_2 U^{-1}.$$

2.3.2 Внутренние аппроксимации

Перейдем к вычислению суперрешений уравнения (2.31). Оценим гамильтониан $H(t, x, p)$ снизу при всех (t, x, p) :

$$\begin{aligned} H(t, x, p) &\geq \frac{\langle H_s(p \otimes x), Q_s P^{\frac{1}{2}}(p \otimes x) \rangle}{\sqrt{\langle H_s(p \otimes x), H_s(p \otimes x) \rangle}} = \\ &= \frac{\langle H_{1s} K_s^{-1} p \otimes H_{2s} x, Q_s P^{\frac{1}{2}}(p \otimes x) \rangle}{\sqrt{\langle H_{1s} K_s^{-1} p \otimes H_{2s} x, H_{1s} K_s^{-1} p \otimes H_{2s} x \rangle}} = \\ &= \frac{\langle H_{1s} K_s^{-1} p \otimes H_{2s} x, Q_s P^{\frac{1}{2}}(p \otimes x) \rangle}{\sqrt{\langle H_{1s} K_s^{-1} p, H_{1s} K_s^{-1} p \rangle \langle x, H_{2s}^T H_{2s} x \rangle}} = \mathcal{H}_s(t, x, p), \quad s = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Здесь функции $H_s(\cdot)$ определяются равенствами

$$H_s(t) = H_{1s}(t) K_s^{-1}(t) \otimes H_{2s}(t), \quad (2.37)$$

функции $H_{1s}(\cdot)$, $H_{2s}(\cdot)$ и $Q_s(\cdot)$ непрерывны при $t \in [t_0, t_1]$, а матрицы $Q_s(t)$ ортогональны. Равенство в оценке $H(t, x, p) \geq \mathcal{H}_s(t, x, p)$ достигается в точке $(t, \bar{x}(t), \bar{p}(t))$, если для некоторого $\lambda = \lambda(t) > 0$ справедливо соотношение

$$Q_s P^{\frac{1}{2}}(\bar{p} \otimes \bar{x}) = \lambda H_s(\bar{p} \otimes \bar{x}) = \lambda H_{1s} K_s^{-1} \bar{p} \otimes H_{2s} \bar{x}. \quad (2.38)$$

Таким образом, для справедливости неравенства (1.14) при $x \in \cup_s \mathcal{W}_s(t)$ достаточно, чтобы

$$w_t + \frac{\langle H_{1s} K_s^{-1} w_x \otimes H_{2s} x, Q_s P^{\frac{1}{2}}(w_x \otimes x) \rangle}{\sqrt{\langle H_{1s} K_s^{-1} w_x, H_{1s} K_s^{-1} w_x \rangle \langle x, H_{2s}^T H_{2s} x \rangle}} = w_t + \mathcal{H}_s(t, x, w_x) \geq 0. \quad (2.39)$$

Пусть матрицы R_s удовлетворяют неравенствам

$$\langle x \otimes x, (H_{1s} \otimes H_{2s}) Q_s P^{\frac{1}{2}}(K_s \otimes I)(x \otimes x) \rangle \geq \langle x, R_s x \rangle \langle x, H_{2s}^T H_{2s} x \rangle.$$

Тогда, подставляя выражение для функции $w^+(t, x)$ в соотношение (2.39), по-

лучаем систему неравенств

$$\begin{aligned} \langle x, \dot{K}_s x \rangle + 2 \frac{\langle H_{1s} x \otimes H_{2s} x, Q_s P^{\frac{1}{2}}(K_s x \otimes x) \rangle}{\sqrt{\langle x, H_{1s}^T H_{1s} x \rangle \langle x, H_{2s}^T H_{2s} x \rangle}} &\geq \\ &\geq \langle x, \dot{K}_s x \rangle + \langle x, R_s x \rangle \sqrt{\frac{\langle x, H_{2s}^T H_{2s} x \rangle}{\langle x, H_{1s}^T H_{1s} x \rangle}} \geq 0 \end{aligned}$$

при $x \in \mathscr{W}_s(t)$, $s = \overline{1, m}$. Пусть числа $\gamma_s > 0$ и матрицы H_{1s} , H_{2s} выбраны так, что

$$0 \leq \langle x, H_{1s}^T H_{1s} x \rangle \leq \gamma_s^2 \langle x, H_{2s}^T H_{2s} x \rangle$$

при $x \in \mathscr{W}_s(t)$. Неравенство (2.39), таким образом, будет справедливо, если

$$\langle x, \dot{K}_s x \rangle + \gamma_s^{-1} \langle x, R_s x \rangle \geq 0.$$

Последнее соотношение заведомо выполняется, если

$$\dot{K}_s + \gamma_s^{-1} R_s = 0. \quad (2.40)$$

Заметим, что из условия $K_s(t_0) = X^0 > 0$ и неравенства (2.39) следует условие $K_s(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Если же последнее справедливо для всех $s = \overline{1, m}$, то либо функция $w^+(t, x)$ дифференцируема в произвольной точке (t, x) , $t \in [t_0, t_1]$, либо $D^-w^+(t, x) = \emptyset$. Поэтому в точках недифференцируемости этой функции условие (1.14) выполняется тривиальным образом.

Теорема 15 Пусть функции $K_s(t)$ удовлетворяют предположению 2, а открытые множества $\mathscr{W}_s(t)$ удовлетворяют условиям (2.33). Кроме того, пусть при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathscr{W}_s(t)$ для некоторых непрерывных функций $R_s(t)$, $Q_s(t)$, $H_{1s}(t)$, $H_{2s}(t)$ справедливы неравенства ($s = \overline{1, m}$)

$$\begin{aligned} &2 \langle x \otimes x, (K_s(t) \otimes I) P^{\frac{1}{2}}(t) Q_s^T(t) (H_{1s}^T(t) \otimes H_{2s}^T(t)) (x \otimes x) \rangle \geq \\ &\geq \langle x \otimes x, (R_s(t) \otimes H_{2s}^T(t) H_{2s}(t)) (x \otimes x) \rangle, \quad Q_s(t) Q_s^T(t) = I, \\ &\langle x, H_{1s}^T(t) H_{1s}(t) x \rangle \leq \gamma_s^2(t) \langle x, H_{2s}^T(t) H_{2s}(t) x \rangle, \end{aligned} \quad (2.41)$$

а матрицы $K_s(t)$ являются решениями уравнений

$$\dot{K}_s + \gamma_s^{-1}(t) R_s(t) = 0, \quad s = \overline{1, m}.$$

Тогда имеет место включение

$$\left\{ x \mid \min_{1 \leq s \leq m} \langle x, K_s(t)x \rangle \leq 1 \right\} = \{ x \mid w^+(t, x) \leq 1 \} = \mathcal{X}^-[t] \subseteq \mathcal{X}[t].$$

Теорема 16 Пусть для некоторого j и некоторой траектории $\bar{x}(\cdot)$ системы (2.28), (2.29) выполняется включение $\bar{x}(t) \in \mathcal{W}_j(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$. Пусть далее в условиях теоремы 15 неравенство (2.41) для $s = j$ обращается в равенство при $x = \bar{x}(t)$, и для некоторой непрерывной функции $\lambda(\cdot)$ и пары $(\bar{x}(t), 2K_j(t)\bar{x}(t))$ выполняется условие (2.38). Тогда из условия $\bar{x}(t) \in \partial\mathcal{X}[t]$ следует, что множества $\mathcal{X}[t]$ и $\mathcal{X}^-[t]$ касаются, и $\bar{x}(t) \in \partial\mathcal{X}^-[t]$.

Заметим, что для множества всех оценок, которые можно построить в соответствии с теоремой 15, справедливо тождество

$$\bigcup_{\xi} \mathcal{X}_{\xi}^-[t] = \mathcal{X}[t].$$

2.4 Внутренние аппроксимации с помощью положительно однородных функций

В этом параграфе рассматривается билинейная система вида

$$\dot{x} = [A_0(t) + u_1(t)A_1(t) + \cdots + u_d(t)A_d(t)]x, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.42)$$

$$x(t_0) \in \mathcal{X}^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) \leq 1\}. \quad (2.43)$$

Считается выполненным следующее

Предположение 3 Функция $\sigma(x)$ удовлетворяет условию Липшица, положительно однородна и симметрична относительно нуля.

Функция цены в данном случае имеет вид

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \sigma(x(t_0; t, x, u)). \quad (2.44)$$

Она является вязкостным решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$V_t + \langle V_x, A_0(t)x \rangle + \sum_{j=1}^d |\langle V_x, A_j(t)x \rangle| = 0 \quad (2.45)$$

с начальным условием

$$V(t_0, x) = \sigma(x). \quad (2.46)$$

В этом разделе будем искать вязкостные суперрешения w уравнения (2.45) в виде [26]

$$w(t, x) = \sigma(S^{-1}(t_0)S(t)x) + \gamma(t)\psi(S(t)x). \quad (2.47)$$

Пусть $\{\bar{u}^k(t)\}$ — набор из n допустимых управлений, а $\bar{x}^k(t)$ — соответствующие им траектории, выпущенные из начального множества $\mathcal{X}^0$. Выберем матрицу $S(t)$ следующим образом:

$$S(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}^1(t) & \dots & \bar{x}^n(t) \end{bmatrix}^{-1}, \quad (2.48)$$

предполагая при этом, что

$$\det \begin{bmatrix} \bar{x}^1(t) & \dots & \bar{x}^n(t) \end{bmatrix} \neq 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{K}(x^1, \dots, x^m) = \{x \mid \exists j \in \overline{1, m}, \alpha \geq 0 : x = \alpha x^j\}.$$

Предположим, что функция $\psi(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$0 \leq c_1 d(x, K(e_1, \dots, e_n)) \leq \psi(x) \leq c_2 d(x, K(e_1, \dots, e_n)), \quad (2.49)$$

в которых $d(x, A) = \min_{y \in A} \|x - y\|_2$ — расстояние от точки x до множества A . Справедлива следующая теорема.

Теорема 17 Пусть функция $S(\cdot)$ определена равенством (2.48), а функция ψ удовлетворяет условию (2.49). Тогда при некотором выборе $\gamma(\cdot)$ функция w , определенная равенством (2.47), является суперрешением уравнения (2.45), и справедливы включения

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^-[t] &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid w(t, x) \leq 1\} \subseteq \mathcal{X}[t], \\ \bar{x}^k(t) &\in \mathcal{X}^-[t], \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала проверим второе включение, воспользовавшись свойством функции ψ :

$$\begin{aligned} w(t, \bar{x}^k(t)) &= \sigma(S^{-1}(t_0)S(t)\bar{x}^k(t)) + \gamma(t)\psi(S(t)\bar{x}^k(t)) = \\ &= \sigma(S^{-1}(t_0)e_k) + \gamma(t)\psi(e_k) = \sigma(\bar{x}^k(t_0)) \leq 1. \end{aligned}$$

Для краткости введем обозначение $p = (S^{-1}(t_0))^T p_\sigma + \gamma(t)p_\psi$, в котором

$$\begin{aligned} p_\sigma &\in D^-\sigma(S^{-1}(t_0)S(t)x), \\ p_\psi &\in D^-\psi(S(t)x). \end{aligned}$$

Запишем условие того, что функция w является суперрешением уравнения (2.45):

$$\dot{\gamma}\psi(S(t)x) + \max_u \left\langle p, S(t)[A_0(t) + u_1(t)A_1(t) + \dots + u_d(t)A_d(t)]x + \dot{S}(t)x \right\rangle \geq 0$$

Справедливость этого неравенства при $x \in K(\bar{x}^1(t), \dots, \bar{x}^n(t))$ следует из того, что

$$\begin{aligned} \max_u \left\langle l, [A_0(t) + u_1(t)A_1(t) + \dots + u_d(t)A_d(t)]S^{-1}(t)e_k + \dot{S}(t)S^{-1}(t)e_k \right\rangle = \\ = \max_u \left\langle l, S(t)[A_0(t) + u_1(t)A_1(t) + \dots + u_d(t)A_d(t)]\bar{x}^k(t) - \right. \\ \left. - S(t)[A_0(t) + \bar{u}_1^k(t)A_1(t) + \dots + \bar{u}_d^k(t)A_d(t)]\bar{x}^k(t) \right\rangle \geq 0 \quad \forall l \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

При сделанных предположениях множества $D^-\sigma(x)$ и $D^-\psi(x)$ ограничены на любом компакте, откуда для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \max_u \left\langle p, S(t)[A_0(t) + u_1(t)A_1(t) + \dots + u_d(t)A_d(t)]S^{-1}(t)x + \dot{S}(t)S^{-1}(t)x \right\rangle \geq \\ \geq -L_1(1 + \gamma(t))d(x, K(e_1, \dots, e_n)). \end{aligned}$$

Из условия на функцию ψ следует, что

$$\begin{aligned} \psi(S(t)x) &\geq c_1 d(S(t)x, K(e_1, \dots, e_n)) = \\ &= c_1 d(S(t)x, K(S(t)\bar{x}^1(t), \dots, S(t)\bar{x}^n(t))) = \\ &= c_1 d(S(t)x, S(t)K(\bar{x}^1(t), \dots, \bar{x}^n(t))) \geq L_2 d(x, K(\bar{x}^1(t), \dots, \bar{x}^n(t))). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство для суперрешения выполняется, если

$$\dot{\gamma} \geq \frac{L_1}{L_2}(1 + \gamma) = L(1 + \gamma).$$

Остается положить $\gamma(t) = e^{Lt} - 1$. □

В качестве примера функции ψ , удовлетворяющей условиям теоремы, можно предложить функцию

$$\psi(x) = \|x\|_\infty - \|x\|_1,$$

в которой символы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ обозначают соответствующие нормы Гельдера. Функция $\gamma(\cdot)$ вычисляется для данной системы и заданных функций $\sigma(x)$, $\psi(x)$ и $S(t)$ так, как это делается в доказательстве теоремы.

Таким образом, мы получили семейство внутренних оценок, параметризованных набором из n траекторий $\{\bar{u}^k(t)\}$, точки которых линейно независимы в каждый момент времени t , и функцией $\psi(x)$. Ясно, что объединение всех таких оценок совпадает с точным множеством достижимости. Для этого достаточно перебирать наборы траекторий, зафиксировав функцию ψ . Однако, среди таких оценок, вообще говоря, имеются в том числе и нетривиальные оценки, отличные от эволюционных множеств при фиксированном управлении.

В заключение этого раздела отметим возможность дальнейших обобщений построенных здесь оценок, которые могут быть применены для аппроксимации множеств достижимости других классов нелинейных систем. А именно, линейное отображение $x \rightarrow S(t)x$ может быть заменено на нелинейное отображение $x \rightarrow S(t, x)$, а конус $\mathcal{K}(x^1, \dots, x^m)$ на другое такое множество, для которого из условий $x^i \in \mathcal{X}[t]$, $i = \overline{1, m}$, $x \in \mathcal{K}(x^1, \dots, x^m)$ следует включение $x \in \mathcal{X}[t]$.

2.5 Примеры

Пример 1. Применим алгоритм построения внешних квадратичных оценок множества достижимости к следующей двумерной системе при $t \in [0, 1]$:

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) x, \quad (2.50)$$

$$x(0) \in \mathcal{E}(0, (X^0)^{-1}), \quad X^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

Представленные иллюстрации (рис. 2.1) отвечают параметру $L(t) = 1$ и оптимальным траекториям $\bar{x}(\cdot)$ этой системы, проходящим при $t = 0$ через точки $[-1, 0]^T$ и $[0.7515, -0.0933]^T$ соответственно.

Заметим, что, с практической точки зрения, может быть полезно останавливать вычисление конкретной оценки в некоторый момент ϑ и считать далее оценку вырожденной, если нормы векторов $c_j(\vartheta)$ в представленном алгоритме превосходят некоторую положительную постоянную $C_{\max}$.

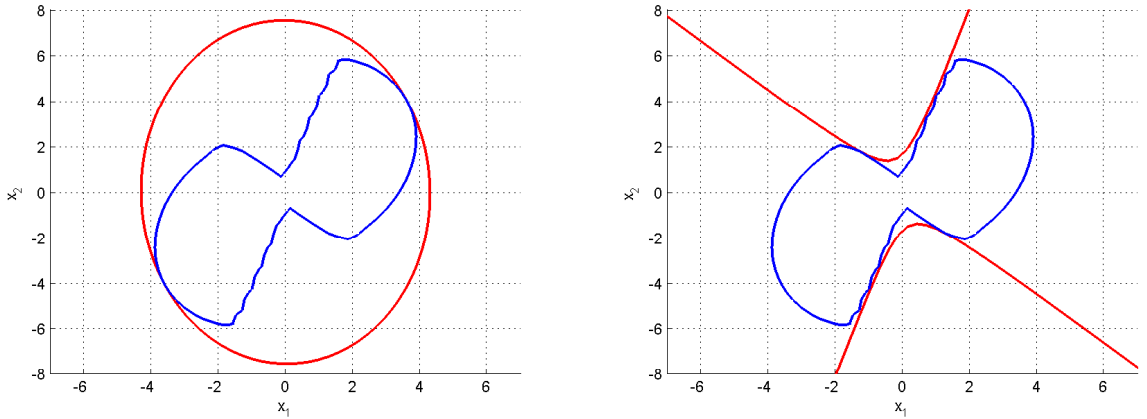


Рис. 2.1: Множество достижимости системы (2.50) и ее внешние оценки в виде множеств уровня квадратичных форм.

Пример 2. Рассмотрим простейшую билинейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ux_1, \\ \dot{x}_2 &= -ux_2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

с управлением $u \in [-1, 1]$. Для данного примера матрица $P(t)$ из гамильтониана

$H(t, x, p)$ имеет вид

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для построения внешней оценки множества достижимости этой системы из единичного круга $\mathcal{X}^0 = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ в виде объединения двух эллипсоидов, будем искать матрицы квадратичных форм в следующем виде:

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{22} & 0 \\ 0 & k_{11} \end{bmatrix}, \quad 0 < k_{11} \leq k_{22}. \quad (2.52)$$

Подобрав матрицы $P_{11}(t)$, $P_{12}(t)$, $P_{21}(t)$ и $P_{22}(t)$, которые удовлетворяют неравенствам (2.35), получаем следующие уравнения для матриц квадратичных форм:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & 0 \\ 0 & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= 0, \\ \begin{bmatrix} \dot{k}_{22} & 0 \\ 0 & \dot{k}_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{11} \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения с начальными условиями $k_{11}(0) = k_{22}(0) = 1$, получаем

$$k_{11}(t) = e^{-2t}, \quad k_{22}(t) = 1.$$

Таким образом, функция

$$w^-(t, x) = \min \{e^{-2t}x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + e^{-2t}x_2^2\}$$

является оценкой снизу для функции цены и определяет внешнюю оценку для множества достижимости данной системы из единичного круга.

Для построения внутренних оценок множества достижимости возьмем матрицы $\mathcal{K}_s$ также в виде (2.52). Соотношения (2.41) будут справедливы, если по-

ЛОЖИТЬ

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & H_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & R_1 &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
 H_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & H_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & R_2 &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
 Q_1 = Q_2^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \gamma_1 = \gamma_2 &= 1,
 \end{aligned}$$

что приводит к следующим уравнениям для k_{11} , k_{22} :

$$\begin{aligned}
 \dot{k}_{11} &= -2k_{11}, \\
 \dot{k}_{22} &= 2k_{22}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$w^-(t, x) = \min \{e^{-2t}x_1^2 + e^{2t}x_2^2, e^{2t}x_1^2 + e^{-2t}x_2^2\}$$

является оценкой сверху для функции цены и определяет внутреннюю оценку для множества достижимости данной системы из единичного круга. Ниже приведены иллюстрации построенных оценок в момент $t = 1$ (рис. 2.2).

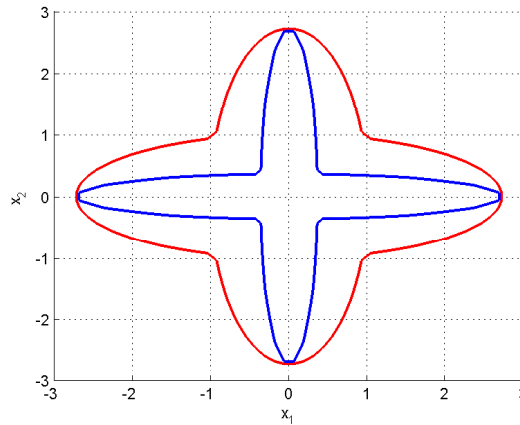


Рис. 2.2: Внутренняя и внешняя оценки множества достижимости системы (2.51) в виде объединений двух эллипсоидов.

Пример 3. Результаты раздела 1.5 позволяют использовать теоремы 13 и 15 для построения аппроксимаций множеств достижимости линейных систем. Покажем, что это приводит к известным формулам эллипсоидального исчисления [62, 22]. Действительно, для линейной системы

$$\dot{x} = u, \quad u \in \mathcal{E}(0, R(t))$$

соответствующая билинейная система имеет вид

$$\dot{y} = Ay, \quad A \in \mathcal{E}(0, P(t)), \quad P(t) = \begin{bmatrix} R(t) & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix}.$$

Для получения внешних оценок можно взять

$$\mathcal{K}_1(t) \equiv \mathcal{K}(t) = \begin{bmatrix} K(t) & 0 \\ 0 & k(t) \end{bmatrix}.$$

Теоремы 13 и 14 приводит к следующему уравнению для матрицы $\mathcal{K}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{K} & 0 \\ 0 & \dot{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu^{-1}(t)K(t)R(t)K(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu(t) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\mu(t) = \sqrt{\langle \bar{x}, KQ(t)K\bar{x} \rangle} = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \bar{l}, Q(t)\bar{l} \rangle}.$$

Заметим, что случай

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u \in \mathcal{E}(0, Q(t))$$

может быть легко приведен к уже рассмотренному.

Учитывая, что функция y_{n+1}^2 является суперрешением соответствующего уравнения ГЯБ, для получения внутренних оценок можно взять

$$\mathcal{K}_1(t) = \begin{bmatrix} K(t) & 0 \\ 0 & k(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_2(t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix}.$$

При $s = 1$ положим

$$H_{1s} \equiv \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{2s} = e_{n+1} e_{n+1}^T, \quad Q_s(t) = \begin{bmatrix} Q(t) & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix} \otimes I_{(n+1) \times (n+1)}.$$

Теорема 15 приводит к следующему уравнению для матрицы $\mathcal{K}_1(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma^{-1}(t) \begin{bmatrix} K(t) R^{\frac{1}{2}}(t) Q^T(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma^{-1}(t) \begin{bmatrix} Q^T(t) R^{\frac{1}{2}}(t) K(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом, для множества достижимости исходной линейной системы получаем включения

$$\mathcal{E}^{-}[t] = \left\{ x \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} w^{+}(t, x, 1 + \varepsilon) \leq 1 \right\} \subseteq \mathcal{X}[t] \subseteq \{x \mid w^{-}(t, x, 1) \leq 1\} = \mathcal{E}^{+}[t],$$

причем множества $\mathcal{E}^{-}[t]$ и $\mathcal{E}^{+}[t]$ (при соответствующем выборе параметров) совпадают с эллипсоидальными оценками, построенными в [62].

Пример 4. Применим подход, представленный в разделе 1.5, к построению внешних оценок множества достижимости системы уравнений динамического уницикла

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= v \cos x_5, \\ \dot{x}_4 &= v \sin x_5, \\ \dot{x}_5 &= \alpha u. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Как и в разделе 1.3 первой главы, здесь v и α — положительные константы, управление u принимает значения из отрезка $[-1, 1]$.

Пусть начальное множество $\mathcal{X}^0$ представляет собой эллипсоид $\mathcal{E}(x^0, (X^0)^{-1})$.

Применяя алгоритм билинеаризации, получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= vx_6, \\ \dot{x}_4 &= vx_7, \\ \dot{x}_5 &= \alpha ux_8, \\ \dot{x}_6 &= -\alpha ux_7, \\ \dot{x}_7 &= \alpha ux_6, \\ \dot{x}_8 &= 0,\end{aligned}$$

которая является билинейной реализацией системы (2.53). При этом

$$L = [I_{5 \times 5}, 0_{5 \times 3}], \quad \varphi(x) = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cos x_5, \sin x_5, 1]^T.$$

В качестве нового начального множества $\tilde{\mathcal{X}}^0$ можно выбрать эллипсоид $\mathcal{E}(0, (\tilde{X}^0)^{-1})$ с матрицей

$$\tilde{X}^0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} X^0 & 0_{5 \times 1} & 0_{5 \times 1} & -X^0 x^0 \\ 0_{1 \times 5} & 1 & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 5} & 0 & 1 & 0 \\ -(X^0 x^0)^T & 0 & 0 & 1 + \langle x^0, X^0 x^0 \rangle \end{bmatrix}.$$

Легко заметить, что

$$\langle \varphi(x), \tilde{X}^0 \varphi(x) \rangle = \frac{1}{3} \langle x - x^0, X^0 (x - x^0) \rangle + \frac{2}{3}.$$

Следовательно, $\varphi(\mathcal{X}^0) \subseteq \tilde{\mathcal{X}}^0$, и, более того, $\varphi(\partial \mathcal{X}^0) \subseteq \partial \tilde{\mathcal{X}}^0$. Запишем гамильтониан этой новой системы:

$$H(t, x, p) = p_1 x_3 + p_2 x_4 + v p_3 x_6 + v p_4 x_7 + \alpha |p_5 x_8 - p_6 x_7 + p_7 x_6| = \langle p, Ax \rangle + |\langle p, Bx \rangle|.$$

Субрешение соответствующего уравнения ГЯБ будем искать в виде $w^-(t, x) = \langle x, \mathcal{K}(t)x \rangle$. Используя схему из раздела 2.2.1, получаем оценку сверху для вели-

чины $H(t, x, w_x^-)$:

$$H(t, x, w_x^-(t, x)) \leq \langle x, (\mathcal{K}A + A^T\mathcal{K} + Q^T \text{Abs}(\Lambda)Q)x \rangle,$$

где

$$\mathcal{K}B + B^T\mathcal{K} = Q^T\Lambda Q.$$

Получаем для матрицы $\mathcal{K}$ уравнение

$$\dot{\mathcal{K}} + \mathcal{K}A + A^T\mathcal{K} + Q^T \text{Abs}(\Lambda)Q = 0.$$

Таким образом, для множества достижимости $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ исходной нелинейной системы (2.53) справедливо включение

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}^+[t] = \{x \mid w^-(t, \varphi(x)) \leq 1\}.$$

Пример 5. Рассмотрим двумерную билинейную систему со скалярным управлением:

$$\dot{x} = uAx, \quad u \in [-1, 1], \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть начальное множество задается следующим образом:

$$\mathcal{X}^0 = \{x \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}.$$

Применим алгоритм построения внутренних оценок из раздела 2.4 при трех различных матрицах A . Полученные далее вязкостные суперрешения $w(t, x)$ соответствующих уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана задают внутреннюю оценку следующим образом:

$$\mathcal{X}^-[t] = \{x \mid w(t, x) \leq 1\}.$$

Пусть

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда функция

$$w(t, x) = \frac{1}{2}|x_1 + (1+t)x_2| + \frac{1}{2}|x_1 - (1+t)x_2| - t|x_2|$$

является *вязкостным решением* уравнения ГЯБ и удовлетворяет начальному условию

$$w(0, x) = |x_1| + |x_2|.$$

Множество достижимости данной системы приведено на рис. 2.3.

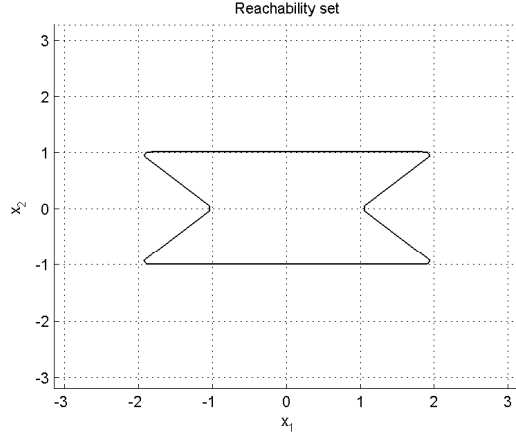


Рис. 2.3: Множество достижимости при $t = 1$ в двумерном примере с матрицей A_1 .

Пусть

$$A = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда функция

$$w(t, x) = \frac{1}{3}(e^{-t} + 2e^{2t})|x_1| + \frac{1}{3}(e^{-t} + 2e^{2t})|x_2| - \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} - 1)|x_1 - x_2| - \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} - 1)|x_1 + x_2|$$

является суперрешением уравнения ГЯБ. Соответствующие оценки множества достижимости изображены на рис. 2.4.

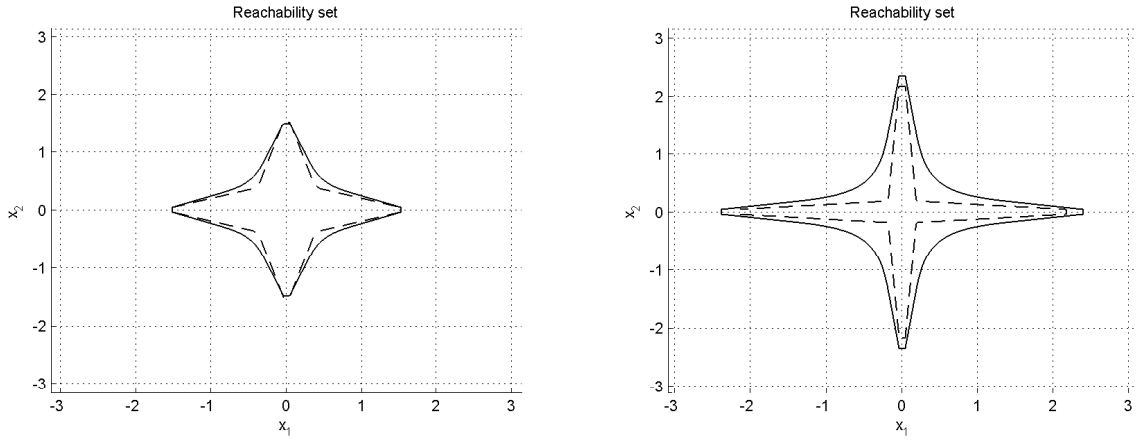


Рис. 2.4: Внутренняя оценка множества достижимости при $t = 1/2$ и $t = 1$ в двумерном примере с матрицей A_2 .

Пусть

$$A = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим величины

$$\alpha_k = \frac{2 \cos^2 t - 1}{\cos^2 t - \sin^2 t}, \quad \beta_k = \frac{2 \cos^2 t - 1}{\cos t + (-1)^{k+1} \sin t} - \cos t.$$

Тогда функция

$$w(t, x) = \alpha_1 |x_1 \cos t - x_2 \sin t| + \alpha_2 |x_1 \sin t - x_2 \cos t| - \\ - \beta_1 |x_1 + x_2| - \beta_2 |x_1 - x_2|$$

является суперрешением уравнения ГЯБ. Соответствующие оценки множества достижимости изображены на рис. 2.5.

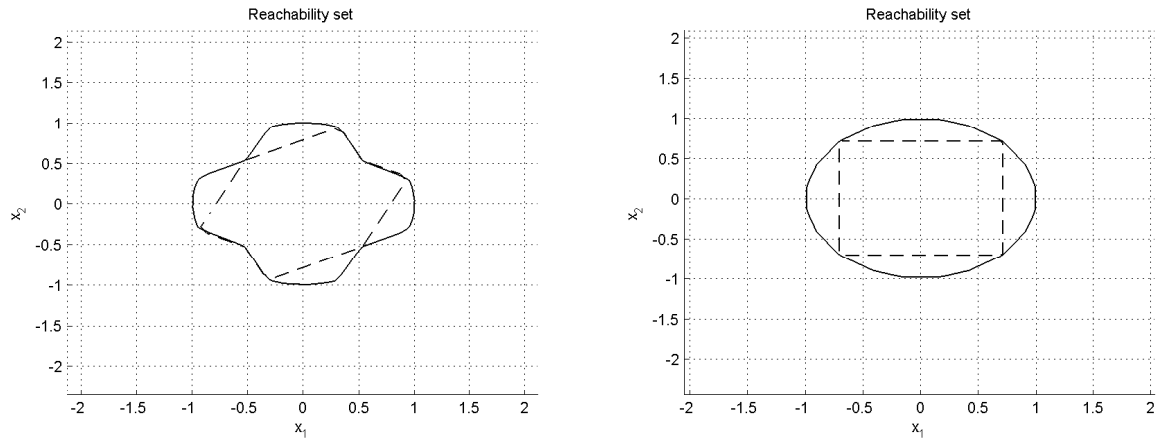


Рис. 2.5: Внутренние оценки множества достижимости при $t = \pi/9$ и $t = \pi/4$ в двумерном примере с матрицей A_3 .

Глава 3

Задачи гарантированного оценивания и синтеза управлений для билинейных систем

3.1 Постановка задач гарантированного оценивания

Рассматривается билинейная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \quad t \in [t_0, t_1], \\ A &\in \mathcal{A}(t), \quad x(t_0) \in \mathcal{X}^0 = \{x \mid \sigma(x) \leq 1\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, множество $\mathcal{A}(t)$ представляет собой неопределенность в динамике системы, а $\mathcal{X}^0$ — неопределенность в начальном состоянии. Многозначное отображение $\mathcal{A}(\cdot)$ предполагается липшицевым. Реализации $A(\cdot)$ неопределенности в динамике системы лежат в классе измеримых функций:

$$A(\cdot) \in L^\infty([t_0, t_1], \mathcal{A}(\cdot)).$$

Ограничения на неопределенность в начальном состоянии и динамике системы рассматриваются в двух вариантах:

1. Неопределенность в начальном состоянии является множеством уровня квадратичной формы, а неопределенность в динамике — параллелепипедом в пространстве матриц:

$$\mathcal{X}^0 = \{x \mid \langle x - x^0, X^0(x - x^0) \rangle \leq 1\}, \quad X^0 = (X^0)^T, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{A}(t) = \{A \mid A(t) = A_0(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_d A_d(t)\}. \quad (3.3)$$

2. Неопределенность в начальном состоянии представляет собой объединение эллипсоидов, а неопределенность в динамике — эллипсоид в пространстве матриц:

$$\mathcal{X}^0 = \left\{x \mid \min_{1 \leq k \leq m} \langle x - x_k^0, X_k^0(x - x_k^0) \rangle \leq 1\right\}, \quad X_k^0 = (X_k^0)^T > 0, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{E}(0, P(t)). \quad (3.5)$$

Уравнение измерений в сформулированных далее задачах гарантированного оценивания также представлено в двух вариантах.

1. Задано уравнение непрерывных измерений состояния системы

$$y(t) = G(t)x(t) + w(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3.6)$$

Здесь известная функция $G(\cdot)$ и неизвестная помеха $w(\cdot)$ предполагаются непрерывными. Величины $w(t)$ удовлетворяют геометрическим ограничениям

$$w(t) \in \mathcal{R}(t) = \{w \in \mathbb{R}^k \mid \langle w(t) - r(t), R(t)(w(t) - r(t)) \rangle \leq 1\}, \quad R(t) = R^T(t).$$

Функция $y(\cdot)$, представляющая собой доступные измерения, предполагается известной.

2. Измерения состояния системы поступают в дискретные заранее заданные моменты времени:

$$y(\tau_i) = y_i = G_i x(\tau_i) + w_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.7)$$

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l \leq t_1.$$

Здесь матрицы G_i считаются известными, неизвестные векторы w_i представляют собой помеху в измерениях. Предполагается, что на величины w_i наложены геометрические ограничения

$$w_i \in \mathcal{R}_i = \{w \in \mathbb{R}^k \mid \langle w - r_i, R_i(w - r_i) \rangle \leq 1\}, \quad R_i = R_i^T.$$

Значения y_i , которые представляют собой доступные измерения, предполагаются известными.

Определение 15 Множество $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ всех состояний $x(t)$ системы (3.1), которые совместимы с уравнением измерений (3.6) и ограничениями на неопределенность $A(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)$, $w(\tau) \in \mathcal{R}(\tau)$, $x(t_0) \in \mathcal{X}^0$, будем называть информационным множеством в задаче с непрерывными измерениями.

Определение 16 Множество $\mathcal{X}^l[t] = \mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ всех состояний $x(t)$ системы (3.1), которые совместимы с уравнением измерений (3.7) и ограничениями на неопределенность $A(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)$, $w_i \in \mathcal{R}_i$, $x(t_0) \in \mathcal{X}^0$, будем называть информационным множеством в задаче с дискретными измерениями.

Задача 10 Построить параметрическое семейство внешних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0), \quad \xi \in \Xi \right\}$$

информационного множества $\mathcal{X}[t]$ системы (3.1), (3.6), (1)

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}_\xi^+[t]$$

при помощи множеств уровня квадратичных форм

$$\mathcal{X}_\xi^+[t] = \{x \mid \langle x, K(t)x \rangle \leq 1\}, \quad K(t) = K^T(t) \quad (3.8)$$

или объединений эллипсоидов

$$\mathcal{X}_\xi^+[t] = \left\{ x \mid \min_{1 \leq s \leq m} \langle x, K_s(t)x \rangle \leq 1 \right\}, \quad K_s(t) = K_s^T(t) > 0. \quad (3.9)$$

Задача 11 Построить параметрическое семейство внешних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^{+,l}(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}$$

информационного множества $\mathcal{X}^l[t]$ системы (3.1), (3.7), (2)

$$\mathcal{X}^l[t] \subseteq \mathcal{X}_\xi^{+,l}[t]$$

при помощи множеств уровня квадратичных форм

$$\mathcal{X}_\xi^{+,l}[t] = \{x \mid \langle x, K(t)x \rangle \leq 1\}, \quad K(t) = K^T(t) \quad (3.10)$$

или объединений эллипсоидов

$$\mathcal{X}_\xi^{+,l}[t] = \left\{ x \mid \min_{1 \leq s \leq m} \langle x, K_s(t)x \rangle \leq 1 \right\}, \quad K_s(t) = K_s^T(t) > 0. \quad (3.11)$$

В соответствии с результатами главы 1 в рассматриваемых задачах, не ограничивая общности, можно считать, что $x^0 = 0$, $x_k^0 = 0$, $r(t) - y(t) = 0$, $r_i - y_i = 0$.

3.2 Решение задачи с дискретными измерениями

При заданных начальной позиции $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$ и измерениях $y_{\leq t}$, информационное множество $\mathcal{X}^l[t]$ будет совпадать с множеством достижимости системы (3.1) из начального множества $\mathcal{X}^0$ при фазовом ограничении

$$x(\tau_i) \in \mathcal{Y}_i = \{x \mid G_i x \in y_i - \mathcal{R}_i\}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Подчеркнем, что измерения y_i поступают в реальном времени в известные моменты времени τ_i . С учетом замечания в конце предыдущего параграфа, можно считать, что множества $\mathcal{Y}_i$ имеют вид:

$$\mathcal{Y}_i = \{x \mid \langle x, Y_i x \rangle \leq 1\}, \quad Y_i = Y_i^T.$$

Для формулировки следующего утверждения нам понадобится понятие множества достижимости $\mathcal{X}(t; \tau, \mathcal{X}_\tau)$, представляющее собой множество всех состо-

яний $x(t)$ системы (3.1), которые совместимы с ограничениями $A(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)$ и $x(\tau) \in \mathcal{X}_\tau$.

Лемма 2 Для каждого $i = 1, \dots, l$ информационное множество $\mathcal{X}^l[\tau_i]$ может быть представлено в виде $\mathcal{X}(\tau_i; \tau_{i-1}, \mathcal{X}^l[\tau_{i-1}]) \cap \mathcal{Y}_i$. При $\tau_{i-1} \leq t < \tau_i$ информационное множество $\mathcal{X}^l[t]$ совпадает с множеством достижимости $\mathcal{X}(t; \tau_{i-1}, \mathcal{X}^l[\tau_{i-1}])$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{X}^l[\tau_i]$. Тогда существует траектория $\bar{x}(\cdot)$ системы (3.1) такая, что $\bar{x}(\tau_i) = x$, $\bar{x}(t_0) \in \mathcal{X}^0$ и $\bar{x}(\tau_j) \in \mathcal{Y}_j$ при $j \leq i$. По определению информационного множества $\bar{x}(\tau_{i-1}) \in \mathcal{X}^l[\tau_{i-1}]$. Следовательно, $\mathcal{X}^l[\tau_i] \subseteq \mathcal{X}(\tau_i; \tau_{i-1}, \mathcal{X}^l[\tau_{i-1}]) \cap \mathcal{Y}_i$.

Наоборот, пусть $x \in \mathcal{X}(\tau_i; \tau_{i-1}, \mathcal{X}^l[\tau_{i-1}]) \cap \mathcal{Y}_i$. Тогда существует траектория $\bar{x}(\cdot)$ системы такая, что $\bar{x}(\tau_i) = x$ и $\bar{x}(\tau_{i-1}) \in \mathcal{X}^l[\tau_{i-1}]$, но тогда эту траекторию можно продолжить с выполнением условий $\bar{x}(t_0) \in \mathcal{X}^0$ и $\bar{x}(\tau_j) \in \mathcal{Y}_j$ при $j \leq i-1$, а значит $x \in \mathcal{X}^l[\tau_i]$. $\square$

В соответствии с леммой множество $\mathcal{X}^l[t]$ может быть выражено через множество достижимости $X[t]$ системы (3.1) и операцию пересечения. Кроме того, мы можем определить *информационное состояние системы* $V(t, x)$ как функцию, удовлетворяющую на каждом из интервалов (t_0, τ_1) , (τ_1, τ_2) , $\dots$, (τ_m, t_1) уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$V_t + \max_{A \in \mathcal{A}(t)} \langle V_x, Ax \rangle = 0,$$

начальному условию $V(t_0, x) = \sigma(x)$ и краевым условиям

$$V(\tau_i, x) = \max \{ V(\tau_i - 0, x), \langle x, Y_i x \rangle \}.$$

Применяя лемму 2, получаем соотношение $\mathcal{X}^l[t] = \{x \mid V(t, x) \leq 1\}$.

Используя результаты главы 2, можно в каждом из двух рассматриваемых случаев получить семейства внешних оценок множества достижимости $\mathcal{X}(t; \tau, \mathcal{X}_\tau)$ соответственно в виде множеств уровня квадратичных форм и в виде объединений эллипсоидов. При этом, вместо начального множества $\mathcal{X}^0$ в момент t_0 мы имеем соответствующего вида начальное множество $\mathcal{X}_\tau$ в момент τ . Используем эти оценки множеств достижимости для аппроксимации информационных множеств $\mathcal{X}^l[t]$.

Рассмотрим сначала случай ограничений на неопределенность в виде (3.2), (3.3). Внешние оценки для информационного множества $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ будем искать в виде:

$$\mathcal{X}^{+,l}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid \langle x, K(t)x \rangle \leq 1\}. \quad (3.12)$$

Предположим, что функция $K(\cdot)$ непрерывна на отрезках $[t_0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$, $\dots$, $[\tau_m, t_1]$, непрерывно дифференцируема во внутренних точках этих отрезков и удовлетворяет в этих точках уравнению (2.20) из раздела 2.2:

$$\dot{K} + \sum_{j=1}^d Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) = 0. \quad (3.13)$$

Кроме того, пусть справедливы краевые условия

$$K(t_0) = X^0, \quad K(\tau_i) = (1 - \mu_i)K(\tau_i - 0) + \mu_i Y_i, \quad \mu_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, l}. \quad (3.14)$$

В качестве параметров оценки используется набор чисел μ_i и пара функций $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot))$, которая удовлетворяет характеристическим уравнениям (2.15)-(2.17) на интервалах (t_0, τ_1) , (τ_1, τ_2) , $\dots$, (τ_m, t_1) и краевым условиям

$$\bar{p}(t_0) = 2X^0\bar{x}(t_0), \quad \bar{p}(\tau_i) = 2K(\tau_i)\bar{x}(\tau_i). \quad (3.15)$$

Теорема 18 Множество (3.12) с функцией $K(\cdot)$, определенной в соответствии с условиями (3.13)-(3.15), представляет собой внешнюю оценку информационного множества $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$:

$$\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}^{+,l}(t; t_0, \mathcal{X}^0). \quad (3.16)$$

Доказательство. Ясно, что для любой пары квадратичных форм $\langle x, P_1x \rangle$ и $\langle x, P_2x \rangle$ и любого числа $\mu \in [0, 1]$ из условий

$$\langle x, P_1x \rangle \leq 1, \quad \langle x, P_2x \rangle \leq 1$$

следует неравенство $\langle x, (\mu P_1 + (1 - \mu)P_2)x \rangle \leq 1$. Поэтому из условия

$$\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}^{+,l}(t; t_0, \mathcal{X}^0), \quad t \in [t_0, \tau_i).$$

получаем включение

$$\mathcal{X}^l(\tau_i; t_0, \mathcal{X}^0) = \mathcal{X}^l(\tau_i - 0; t_0, \mathcal{X}^0) \cap Y_i \subseteq \mathcal{X}^{+,l}(\tau_i; t_0, \mathcal{X}^0).$$

В соответствии с леммой 2 и теоремой 10 это приводит нас к утверждению теоремы. $\square$

Перейдем к задаче с ограничениями на неопределенность вида (3.4), (3.5). Внешние оценки для информационного множества $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ будем искать в виде:

$$\mathcal{X}_\xi^{+,l}[t] = \left\{ x \left| \min_{1 \leq s \leq m} \langle x, K_s(t)x \rangle \leq 1 \right. \right\}, \quad K_s(t) = K_s^T(t) > 0. \quad (3.17)$$

Предположим, что функции $K_s(\cdot)$ непрерывны на отрезках $[t_0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$, $\dots$, $[\tau_m, t_1]$, непрерывно дифференцируемы во внутренних точках этих отрезков и удовлетворяют в этих точках уравнению (13) из раздела 2.3:

$$\dot{K}_s + \mu_s^{-1}(t)P_{1s}(t) + \mu_s(t)P_{2s}(t) = 0 \quad (3.18)$$

Кроме того, пусть справедливы краевые условия

$$K_s(t_0) = X_s^0, \quad K_s(\tau_i) = (1 - \mu_i)K_s(\tau_i - 0) + \mu_i Y_i, \quad \mu_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, l}. \quad (3.19)$$

В качестве параметров оценки используется набор чисел μ_i и функции P_{1s} , P_{2s} , которые выбираются из соотношения (2.35) раздела 2.3.

Теорема 19 Множество (3.17) с функциями $K_s(\cdot)$, определенными в соответствии с условиями (3.18)-(3.19), представляет собой внешнюю оценку информационного множества $\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$:

$$\mathcal{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0) \subseteq \mathcal{X}^{+,l}(t; t_0, \mathcal{X}^0). \quad (3.20)$$

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 18.

3.3 Решение задачи с непрерывными измерениями

Этот параграф посвящен решению задачи 10. С учетом замечания в конце пункта 3.1, можно считать, что уравнение измерений (3.6) эквивалентно фазовому ограничению:

$$x(\tau) \in \mathcal{Y}(t) = \{x \mid \langle x, Y(t)x \rangle \leq 1\}, \quad Y(t) = Y^T(t).$$

Докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 3 Пусть множества $\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2, 3$ являются звездными с центрами в точке 0. Кроме того, пусть множества $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ ограничены, а функция Минковского множества $\mathcal{X}_3$ является липшицевой с константой L . Тогда справедлива оценка

$$h(\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_3) \leq (1 + LK)h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2),$$

в котором $K = \sup_{x \in \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2} \|x\|$.

Доказательство. Пусть $z \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_3$, тогда существует вектор $y \in \mathcal{X}_2$ такой, что $\|z - y\| \leq h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$. Пусть $\mu(x)$ — функция Минковского множества $\mathcal{X}_3$. Заметим, что справедливо тождество

$$\mathcal{X}_3 = \{x \mid \mu(x) \leq 1\}.$$

Используя условия леммы, получаем оценку

$$\mu(\alpha y) \leq \mu(\alpha z) + \alpha L\|z - y\| \leq \alpha(1 + Lh(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)).$$

Таким образом, $\mu(\alpha y) \leq 1$ при $\alpha = (1 + Lh(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2))^{-1}$. Тогда имеет место неравенство

$$\|y - \alpha y\| = \|(1 - \alpha)y\| \leq \left(1 - (1 + Lh(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2))^{-1}\right) K \leq LKh(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2).$$

В результате, $\alpha y \in \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_3$ и справедлива оценка

$$\|z - \alpha y\| \leq (1 + LK)h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2),$$

из которой получаем утверждение леммы. □

Предположение 4 1. Множество $\mathcal{A}(t)$ содержит 0.

2. Для любых $t, s \in [t_0, t_1]$, $t \geq s$ выполняются неравенства

$$0 < Y(t) \leq Y(s).$$

3. Либо множество $\text{graph } \mathcal{Y}$ выпукло, либо $Y(\cdot)$ непрерывно дифференцируема.

Следующая теорема позволяет аппроксимировать решение задачи 10 с помощью решений задач 11 в случае ограниченной неопределенности в уравнении измерений. Доказательство следует схемам, предложенным в работах [39, 61] для утверждений такого типа.

Теорема 20 Рассмотрим последовательность задач вида 11, параметризованных числом l , в которых

$$\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}(\tau_i), \quad Y_i = Y(\tau_i), \quad \tau_i = i(t_1 - t_0)/(l + 1), \quad i = 1, \dots, l.$$

Пусть множества $\mathcal{X}^l[t]$ являются решениями этих задач, а множество $\mathcal{X}[t]$ — решением соответствующей задачи 10. Кроме того, пусть выполняется предположение 4. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[t] &\subseteq \mathcal{X}^l[t], \\ h(\mathcal{X}^l[t], \mathcal{X}[t]) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

причем сходимость равномерна по $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Пусть траектория $x(\cdot)$ системы (3.1) такова, что $x(t) \in \mathcal{X}[t]$. Тогда

$$x(\tau_i) \in \mathcal{Y}(\tau_i) = \mathcal{Y}_i, \quad \tau_i \in [t_0, t].$$

Таким образом, $x(t) \in \mathcal{X}^l[t]$, откуда получаем включение (20). Введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma &= (t_1 - t_0)/(l + 1), \\ z_i &= h(\mathcal{X}[\tau_{i+1}], \mathcal{X}^l[\tau_{i+1}]). \end{aligned}$$

Пусть число $L_1 > 0$ таково, что $h(\mathcal{F}(t, x), \mathcal{F}(t, y)) \leq L_1 \|x - y\|$. Здесь $\mathcal{F}(t, x) = \{Ax | A \in \mathcal{A}(t)\}$. Следовательно, для любого $y \in \mathcal{E}(0, I)$ и любого числа $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{F}(t, x + \varepsilon y) \subseteq \mathcal{F}(t, x) + \varepsilon L_1 \mathcal{E}(0, I).$$

На множестве компактов $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^n$ определим отображение $C = C_{\sigma, i}$:

$$C(\mathcal{X}) = \{(x, u) | x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{F}(\tau_i, x), x + \sigma u \in \mathcal{Y}(\tau_i + \sigma)\}.$$

Докажем, что существует такие числа $L > 0$, $H^* > 0$, что из соотношений $h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) < H^*$, $\text{diam } C(\mathcal{X}_i) < D^*$ следует неравенство

$$h(C(\mathcal{X}_1), C(\mathcal{X}_2)) \leq Lh(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2). \quad (3.21)$$

Здесь для простоты будем использовать норму

$$\|(x, u)\| = \|x\| + \|u\|.$$

Пусть $z = (x, u) \in C(\mathcal{X}_1)$. Выберем

$$y = (1 - \alpha)(\tilde{x}, \tilde{u}),$$

где $\tilde{x} \in \mathcal{X}_2$, $\tilde{u} \in \mathcal{F}(\tau_i, \tilde{x})$, $\|x + \sigma u - \tilde{x} - \sigma \tilde{u}\| \leq (1 + \sigma L_1)h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$. Пусть $\mu(x)$ — функция Минковского множества $\mathcal{Y}(\tau_i + \sigma)$, а L_2 — оценка ее константы Липшица. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mu((1 - \alpha)(\tilde{x} + \sigma \tilde{u})) &\leq (1 - \alpha)\mu(x + \sigma u) + L_2(1 - \alpha)(1 + \sigma L_1)h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \leq \\ &\leq (1 - \alpha)(1 + (1 + \sigma L_1)L_2h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)). \end{aligned}$$

Положим

$$H^* = \frac{1}{(1 + (t_1 - t_0)L_1)L_2}, \quad \alpha = (1 + \sigma L_1)L_2h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \leq 1.$$

Тогда выполняется включение $(1 - \alpha)(\tilde{x} + \sigma\tilde{u}) \in \mathcal{Y}(\tau_i + \sigma)$, а значит $y \in C(\mathcal{X}_2)$.
При этом по построению

$$\begin{aligned} \|z - y\| &\leq \|(x, u) - (\tilde{x}, \tilde{u})\| + \alpha\|(\tilde{x}, \tilde{u})\| \leq \\ &\leq (1 + L_1)h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + (1 + \sigma L_1)L_2(1 + L_1)D^*h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \leq Lh(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2), \end{aligned}$$

что означает справедливость неравенства (3.21).

Далее введем отображение $M = M_{\sigma, i}$:

$$M(\mathcal{X})[\xi] = \bigcup \{x + \xi u \mid x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{F}(t, x), x + \sigma u \in \mathcal{Y}(\tau_{i+1})\}.$$

Справедливо неравенство [39]:

$$h(M(\mathcal{X}_1)[\sigma], M(\mathcal{X}_2)[\sigma]) \leq h(M(\mathcal{X}_1)[0], M(\mathcal{X}_2)[0]) + \sigma h(C(\mathcal{X}_1), C(\mathcal{X}_2)). \quad (3.22)$$

Кроме того, имеют место оценки

$$\begin{aligned} h\left(\mathcal{X}[\tau_{i+1}], \bigcup \{x + \sigma \mathcal{F}(t, x) \mid x \in \mathcal{X}[\tau_i]\} \cap \mathcal{Y}(\tau_{i+1})\right) &\leq \frac{1}{2}\sigma\psi(\sigma), \\ h\left(\mathcal{X}^l[\tau_{i+1}], \bigcup \{x + \sigma \mathcal{F}(t, x) \mid x \in \mathcal{X}^l[\tau_i]\} \cap \mathcal{Y}(\tau_{i+1})\right) &\leq \frac{1}{2}\sigma\psi(\sigma), \end{aligned}$$

в которых $\psi(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$. Доказательство справедливости первого неравенства в условиях теоремы приведено в работе [61]. Второе неравенство следует из эволюционного уравнения для множества достижимости и леммы 3.

В результате, мы приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} z_i &= h(\mathcal{X}[\tau_{i+1}], \mathcal{X}^l[\tau_{i+1}]) \leq h(M(\mathcal{X}[\tau_i])[\sigma], M(\mathcal{X}^l[\tau_i])[\sigma]) + \\ &\quad + h\left(\mathcal{X}[\tau_{i+1}], \bigcup \{x + \sigma \mathcal{F}(t, x) \mid x \in \mathcal{X}[\tau_i]\} \cap \mathcal{Y}(\tau_{i+1})\right) + \\ &\quad + h\left(\mathcal{X}^l[\tau_{i+1}], \bigcup \{x + \sigma \mathcal{F}(t, x) \mid x \in \mathcal{X}^l[\tau_i]\} \cap \mathcal{Y}(\tau_{i+1})\right) \leq \\ &\leq (1 + L\sigma)h(\mathcal{X}[\tau_i], \mathcal{X}^l[\tau_i]) + \sigma\psi(\sigma) \leq e^{L\sigma}z_{i-1} + \sigma\psi(\sigma), \quad z_0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, существует число $\sigma^* > 0$ такое, что для любого $\sigma \in (0, \sigma^*]$ выполняются соотношения

$$z_k \leq (1 + e^{L\sigma} + e^{2L\sigma} + \dots + e^{kL\sigma})\sigma\psi(\sigma) \leq \sigma k e^{L\sigma k} \psi(\sigma) \leq (t_1 - t_0)e^{L(t_1 - t_0)}\psi(\sigma) \rightarrow 0$$

при $\sigma \rightarrow 0$. □

Данное утверждение позволяет аппроксимировать информационное множество $\mathcal{X}[t]$, используя оценки, построенные по тем же формулам, что и оценки для информационного множества $\mathcal{X}^l[t]$. Заметим также, что теорема 20 может быть обобщена на случай неравномерной сетки моментов измерений $\{\tau_i, i = \overline{1, l}\}$.

3.4 Пример: несвязное информационное множество двумерной билинейной системы

Рассмотрим систему вида (3.1) на отрезке $[0, 1]$ с матрицами ($d = 1$)

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Возьмем начальное множество $\mathcal{X}^0$ из (3.2) при

$$K^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad x^0 = 0$$

и уравнение измерений (3.7) с параметрами

$$\begin{aligned} G_k &= I, \quad R_k = \frac{1}{4}k \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \\ r_k &= 0, \quad k = 1, 2, \\ \tau_1 &= 0.4, \quad \tau_2 = 0.6. \end{aligned}$$

Предположим, что поступили следующие измерения:

$$y_k = \frac{3k}{8} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

При таких измерениях информационное множество $\mathcal{X}^m[1]$ получается несвязным. Изображенная на рисунке 3.1 внешняя оценка информационного множе-

ства отвечает параметрам

$$l = [-1.4123, 0.0105]^T, \quad L(t) = I.$$

$$\mu_1 = 0.1673, \quad \mu_2 = 0.7109.$$

Соответствующая оценка информационной трубки $\mathcal{X}^m[\cdot]$ представлена на рисунке 3.2.

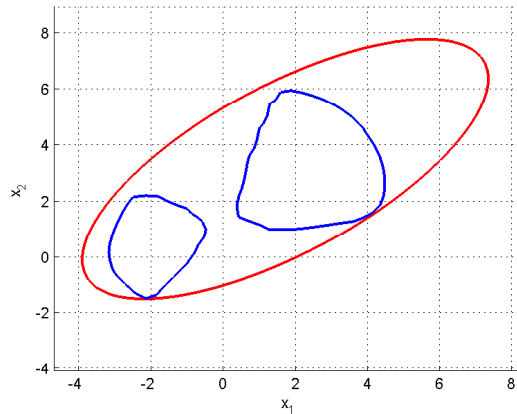


Рис. 3.1: Информационное множество и его внешняя оценка при $t = 1$.

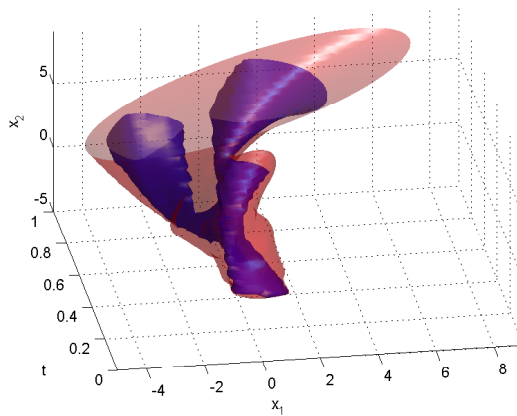


Рис. 3.2: Информационная трубка и ее внешняя оценка.

3.5 Пример: определение ориентации объекта по неточным измерениям

В этом параграфе рассматривается пример построения гарантированной оценки состояния конкретной нелинейной системы. Изложенная выше теория

применяется к задаче определения ориентации объекта (твердого тела) в пространстве, заданной с помощью кватерниона — вектора $q \in \mathbb{R}^4$. Изменение ориентации подчиняется системе уравнений, так называемому кинематическому уравнению для кватернионов (см., например, [4, 41]):

$$\dot{q} = \frac{1}{2}A(\omega)q = \frac{1}{2}[\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3]q, \quad t \in [0, T]. \quad (3.23)$$

Здесь $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ — вектор угловой скорости, а матрицы A_i заданы следующим образом:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Стохастическому аналогу этой задачи посвящена обширная литература (см., в частности, [41]). При такой постановке считается, что ошибки измерений кватерниона q и ошибки измерений угловой скорости ω имеют определенное статистическое описание. Здесь же рассматривается задача гарантированного оценивания, в которой предполагается, что вся доступная информация о векторе ω содержится во включении

$$\omega \in \Omega = \{\omega \mid |\omega_i| \leq 1\}. \quad (3.24)$$

Кроме того, пусть начальное состояние $q(0)$ содержится во множестве

$$\mathcal{Q}^0 = \{q \mid \min \{\|q - q^0\|_2, \|q + q^0\|\} \leq r_0^2, \|q\| = 1\}, \quad (3.25)$$

где $r_0 < 1$, $\|q^0\| = 1$. Выбор такого начального множества обусловлен тем, что кватернионы вида αq при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ отвечают одной и той же ориентации, что и кватернион q .

Будем считать, что $L^\infty([t_0, t]; [-1, 1]^3)$ является множеством допустимых реализаций угловой скорости $\omega(\cdot)$.

Предположим, что в известные дискретные моменты времени τ_i поступают

измерения состояния системы с векторами ошибки w_i :

$$y_i = q(\tau_i) + w_i, \quad \|y_i\| = 1, \quad i = \overline{1, l} \quad (3.26)$$

О векторах w_i известно лишь, что они содержатся в шаре

$$\mathcal{R}_i = \{w \mid \|w\|_2 \leq r_i^2\}. \quad (3.27)$$

Информационное множество

$$\mathcal{Q}[t] = \{q \mid q(0; t, q) \in \mathcal{Q}^0, y_i - q(\tau_i) \in \mathcal{R}_i, \tau_i \in [0, t]\}$$

всех состояний системы, совместимых с измерениями и ограничениями на неопределенность, является в данном случае замкнутым подмножеством единичной сферы в $\mathbb{R}^4$. Будем предполагать, что множество $\mathcal{Q}[t]$ в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ имеет внутреннюю относительно единичной сферы точку. В результате мы получаем к следующую задачу гарантированного оценивания.

Задача 12 Построить внешнюю аппроксимацию информационного множества $\mathcal{Q}[t]$ системы (3.23)-(3.27).

Для решения этой задачи приведем ее к виду задачи 10 из раздела 3.1. Во-первых, необходимо заменить множество возможных начальных значений $\mathcal{Q}^0$ на компактное, звездное и симметричное относительно нуля множество $\mathcal{X}^0$, которое может быть выбрано следующим образом:

$$\mathcal{X}^0 = \{q \mid \langle q, X^0 q \rangle \leq 1\}, \quad (3.28)$$

$$X^0 = S^T \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} S, \quad S^T S = I_4, \quad S q^0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\alpha = \beta - (\beta - 1) \left(1 - \frac{1}{2} r_0^2\right)^{-2}, \quad 1 < \beta < \frac{4}{3}.$$

Покажем, что $\mathcal{X}^0$ является эллипсоидом, который удовлетворяет включениям

$\mathcal{Q}^0 \subseteq \mathcal{X}^0$ и $\partial \mathcal{Q}^0 \subseteq \partial \mathcal{X}^0$. Действительно, так как $0 < r_0 < 1$, то

$$1 < \left(1 - \frac{1}{2}r_0^2\right)^{-2} < 4.$$

Следовательно, $\alpha(\beta) > \alpha(\frac{4}{3}) = 0$. Более того, с одной стороны при $\|q\| = 1$ имеем

$$\langle q, X^0 q \rangle = (\alpha - \beta) \langle q, q^0 (q^0)^T q \rangle + \beta \leq 1 \Leftrightarrow |\langle q, q^0 \rangle| \geq \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta - \alpha}} = 1 - \frac{1}{2}r_0^2. \quad (3.29)$$

С другой стороны, если $q \in \mathcal{Q}^0$, то выполняется одно из соотношений:

$$\begin{aligned} \langle q - q^0, q - q^0 \rangle &= -2\langle q, q^0 \rangle + 2 \leq r_0^2, \\ \langle q + q^0, q + q^0 \rangle &= 2\langle q, q^0 \rangle + 2 \leq r_0^2, \end{aligned}$$

что эквивалентно выполнению неравенства

$$|\langle q, q^0 \rangle| \geq 1 - \frac{1}{2}r_0^2.$$

Сравнивая это неравенство с соотношением (3.27), получаем справедливость указанных выше включений.

Применив аналогичную процедуру к множествам $y_i + \mathcal{R}_i$, которые задают фазовое ограничение в момент τ_i , получаем включения

$$q(\tau_i) \in \mathcal{Y}_i = \{q \mid \langle q, Y_i q \rangle \leq 1\}, \quad Y_i > 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.30)$$

Определим информационное множество

$$\mathcal{X}[t] = \{q \mid q(0; t, q) \in \mathcal{X}^0, q(\tau_i; t, q) \in \mathcal{Y}_i, \tau_i \in [0, t]\}.$$

По построению имеет место равенство

$$\mathcal{Q}[t] = \mathcal{X}[t] \bigcap \{q \mid \|q\| = 1\}. \quad (3.31)$$

Мы приходим к следующей постановке задачи.

Задача 13 Построить параметрическое семейство внешних оценок

$$\left\{ \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0), \xi \in \Xi \right\}$$

информационного множества $\mathcal{Q}[t]$ системы (3.23)-(3.27)

$$\mathcal{Q}[t] \subseteq \mathcal{X}_\xi^+[t] \cap \{q \mid \|q\| = 1\}$$

при помощи множеств уровня квадратичных форм

$$\mathcal{X}_\xi^+[t] = \{x \mid \langle x, K(t)x \rangle \leq 1\}, \quad K(t) = K^T(t). \quad (3.32)$$

В отличие от общего случая перехода к стандартной постановке задачи гарантированного оценивания для билинейной системы, который был описан в разделе 1.5, мы здесь учитываем специфику исходной задачи. А именно, то ее свойство, что информационное множество лежит на единичной сфере. Как было указано в параграфе 3.2, информационное множество связано с информационным состоянием $V(t, q)$ соотношением $\mathcal{X}[t] = \{q \mid V(t, q) \leq 1\}$, причем на каждом интервале $(t_0, \tau_1), \dots, (\tau_n, t_1)$ функция $V(t, q)$ является вязкостным решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$V_t + \sum_{j=1}^3 |\langle V_q, A_j(t)q \rangle| = 0.$$

Кроме того, $V(t, q)$ удовлетворяет начальному условию

$$V(t_0, q) = \langle q, X^0 q \rangle \quad (3.33)$$

и краевым условиям

$$V(\tau_i, q) = \max \{V(\tau_i - 0, q), \langle q, Y_i q \rangle\}. \quad (3.34)$$

Пусть теперь $w(t, q)$ — гладкое на каждом из интервалов $(t_0, \tau_1), \dots, (\tau_n, t_1)$ субрешение уравнения

$$V_t + \sum_{j=1}^3 |\langle V_q, A_j(t)q \rangle| + \nu(t) (V(t, q) - \|q\|^2) = 0, \quad (3.35)$$

удовлетворяющее условиям (3.33), (3.34). Здесь $\nu(t)$ — произвольная непрерывная функция. Тогда справедливо включение

$$\mathcal{Q}[t] = \{q \mid V(t, q) \leq 1\} \cap \{q \mid \|q\| = 1\} \subseteq \{q \mid w(t, q) \leq 1\} \cap \{q \mid \|q\| = 1\}. \quad (3.36)$$

Действительно, если $q(\cdot)$ — произвольная траектория системы (3.23), удовлетворяющая начальному условию $q(t_0) \in \mathcal{Q}^0$ и фазовым ограничениям (3.30), то, рассматривая последовательно каждый из указанных выше интервалов, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w(t, q(t)) &= w_t + \frac{1}{2}\langle w_q, A(\omega)q(t) \rangle \leq w_t + \sum_{j=1}^3 |\langle w_q, A_j(t)q(t) \rangle| \leq \\ &\leq \nu(t) (1 - w(t, q(t))) \leq 0. \end{aligned}$$

Используя индукцию, получаем соотношения $w(t, q(t)) \leq w(t, q(t_0)) \leq 1$.

Таким образом, для решения поставленной задачи мы можем искать такие множества $\mathcal{X}_\xi^+[t]$ вида (3.37), что функции $w(t, q) = \langle q, K(t)q \rangle$ являются субрешениями уравнения (3.35) на каждом из интервалов $(t_0, \tau_1), \dots, (\tau_n, t_1)$. Как и в параграфе 3.2, предполагаем, что функция $K(\cdot)$ непрерывна на отрезках $[t_0, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_m, t_1]$, непрерывно дифференцируема во внутренних точках этих отрезков, а краевые условия имеют вид

$$K(t_0) = X^0, \quad K(\tau_i) = (1 - \mu_i)K(\tau_i - 0) + \mu_i Y_i, \quad \mu_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, l}. \quad (3.37)$$

Для того, чтобы получить дифференциальное уравнение для функции $K(t)$ на интервалах $(t_0, \tau_1), \dots, (\tau_n, t_1)$, мы оцениваем слагаемые $|\langle V_q, A_j(t)q \rangle|$ таким же образом, как это было сделано в разделе 2.2.1. Тогда, подставляя $w(t, q) = \langle q, K(t)q \rangle$ в неравенство из определения субрешения, получаем

$$\begin{aligned} \langle q, \dot{K}(t)q \rangle + \sum_{j=1}^3 |\langle q, (K A_j(t) + A_j^T(t)K)q \rangle| + \nu(t) \langle q, (K - I)q \rangle &\leq \\ &\leq \langle q, \dot{K}(t)q \rangle + \sum_{j=1}^3 \langle q, Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t)q \rangle + \nu(t) \langle q, (K - I)q \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо, если выполняется уравнение

$$\dot{K} + \sum_{j=1}^3 Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) + \nu(t)(K(t) - I) = 0. \quad (3.38)$$

При этом, если $|\langle \bar{q}(t), (K A_j(t) + A_j^T(t) K) \bar{q}(t) \rangle| < \varepsilon$ для некоторого заранее выбранного числа $\varepsilon > 0$, то соответствующую матрицу $Q_j(t)$ будем вычислять не для вектора $\bar{q}(t)$, а для такого вектора $\tilde{q}(t)$, который обеспечивает выполнение соотношений

$$\varepsilon = \langle \bar{q}(t), Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) \bar{q}(t) \rangle \leq \langle \tilde{q}(t), Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) \tilde{q}(t) \rangle.$$

При такой модификации можно обеспечить непрерывность слагаемых $Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t)$ в уравнении (3.38) по совокупности переменных (t, K) . Число ε здесь может быть выбрано произвольно.

Покажем, что функция $\nu(t)$ может быть выбрана таким образом, что существует положительно определенное решение $K(t) > 0$ уравнений (3.37), (3.38) на отрезке $[t_0, t_1]$. Во-первых, заметим, что если $K(\tau) \geq 0$ при $\tau \in [t_0, t)$, то величина $\|K(t)\|$ ограничена. Это непосредственно вытекает из условия существования внутренней точки. Выберем далее функцию $\nu(\cdot)$ следующим образом:

$$\nu(t) = \lambda_{\max} \left(\sum_{j=1}^3 Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) \right). \quad (3.39)$$

Здесь выражение $\lambda_{\max}(A)$ обозначает максимальное собственное значение матрицы $A = A^T$. Так определенная функция $\nu(\cdot)$ непрерывно зависит от (t, K) , а значит при $K(t) \geq 0$ она ограничена сверху некоторым числом $\nu^* > 0$. Таким образом, при $\nu(t) \leq \nu^*$ имеем неравенства

$$\dot{K} \geq -\nu^* K(t), \quad K(t_0) > 0,$$

которые вместе с ограниченностью $\|K(t)\|$ при $K(t) \geq 0$ обеспечивают существование положительно определенного решения уравнений (3.37), (3.38).

В качестве параметров оценки используется набор чисел $\mu_i \in [0, 1]$, величина $\varepsilon > 0$ и траектория системы $\bar{q}(\cdot)$, которая отвечает управлению, выбранному в соответствии с теоремой 2 на каждом из интервалов (t_0, τ_1) , (τ_1, τ_2) , $\dots$, (τ_m, t_1) .

Из вышесказанного следует существование оценки, отвечающей каждому такому набору параметров на всем отрезке $[t_0, t_1]$. Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 21 Множество (3.37) с функцией $K(\cdot)$, определенной в соответствии с условиями (3.37), (3.38), представляет собой внешнюю оценку информационного множества $\mathcal{Q}[t]$:

$$\mathcal{Q}[t] \subseteq \mathcal{X}_\xi^+(t; t_0, \mathcal{X}^0) \bigcap \{q \mid \|q\| = 1\}.$$

Такая оценка определена на всем интервале $[t_0, t_1]$.

Такая форма аппроксимации информационного множества позволяет эффективно выяснять принадлежность конкретной точки q к множеству $\mathcal{Q}[t]$. Однако, использование оценок в таком виде для решения других практических задач может быть не всегда удобным из-за операции пересечения с единичной сферой. В связи с этим имеет смысл рассмотреть следующую задачу.

Задача 14 Вычислить проекции $\text{Pr}_k \mathcal{Q}$ множества

$$\mathcal{Q} = \{q \mid \langle q, Kq \rangle \leq 1\} \bigcap \{q \mid \|q\| = 1\}, \quad K > 0 \quad (3.40)$$

на отдельные координатные оси q_k , $k = \overline{1, 4}$.

Приведем решение для $k = 1$. Предполагаем, что $K - I \not\geq 0$ и $K - I \not\leq 0$. Таким образом, множество $\mathcal{Q}$ представляет собой двумерную поверхность. Пусть вектор q представлен в виде $q = [x, \bar{x}^T]^T$, $x \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$. Проекция на ось x симметрична относительно точки $x = 0$. Поэтому далее рассмотрим случай $x \geq 0$. Тогда из условия $\|q\| = 1$ следует, что

$$x = \sqrt{1 - \|\bar{x}\|^2}. \quad (3.41)$$

Подставляя это выражение в неравенство $\langle q, Kq \rangle \leq 1$, получаем

$$\langle \bar{x}, K_2 \bar{x} \rangle + 2\sqrt{1 - \|\bar{x}\|^2} \langle k_{12}, \bar{x} \rangle + k_1(1 - \|\bar{x}\|^2) \leq 1, \quad (3.42)$$

где

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_{12}^T \\ k_{12} & K_2 \end{bmatrix}, \quad k_1 \in \mathbb{R}, \quad k_{12} \in \mathbb{R}^3, \quad K_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Сделав замену $z = \bar{x} / \sqrt{1 - \|\bar{x}\|^2}$, получаем, что при $\|\bar{x}\| \neq 1$ неравенство (3.42) эквивалентно условию

$$\langle z, (K_2 - I)z \rangle + 2\langle k_{12}, z \rangle + k_1 \leq 1.$$

Заметим, что искомая проекция имеет вид $[-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. В силу соотношения (3.41) число $x_{\max}$ соответствует вектору $\bar{x}$, который удовлетворяет неравенству (3.42) и минимизирует величину $\|\bar{x}\|$. В силу указанной выше эквивалентности получаем задачу оптимизации

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\longrightarrow \min, \\ \langle z, (K_2 - I)z \rangle + 2\langle k_{12}, z \rangle + k_1 &\leq 1. \end{aligned}$$

Тогда $x_{\max} = 1/\sqrt{1 + \tilde{\gamma}_{\min}}$, где $\tilde{\gamma}_{\min}$ — решение указанной задачи оптимизации. Случай $x_{\max} = 0$ невозможен, так как $K > 0$. Аналогичным образом, если $x_{\min} > 0$, то справедливо равенство $x_{\min} = 1/\sqrt{1 + \tilde{\gamma}_{\max}}$, в котором число $\tilde{\gamma}_{\max}$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\longrightarrow \max, \\ \langle z, (K_2 - I)z \rangle + 2\langle k_{12}, z \rangle + k_1 &\leq 1. \end{aligned}$$

Если же $x_{\min} = 0$, то существует вектор $\bar{x}$ такой, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $\langle \bar{x}, K_2 \bar{x} \rangle \leq 1$. Откуда следует, что неравенство $K_2 > I$ не выполняется. Указанные две задачи могут быть сведены к стандартным задачам выпуклой оптимизации (см., например [43]):

$$\gamma_{\min} = \min \operatorname{tr} Z, \tag{3.43}$$

$$\operatorname{tr}((K_2 - I)Z) + 2\langle k_{12}, z \rangle + k_1 \leq 1, \tag{3.44}$$

$$\begin{bmatrix} Z & z \\ z^T & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.45}$$

и

$$\gamma_{\max} = \max \operatorname{tr} Z, \quad (3.46)$$

$$\operatorname{tr}((K_2 - I)Z) + 2\langle k_{12}, z \rangle + k_1 \leq 1, \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} Z & z \\ z^T & 1 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.48)$$

Окончательно получаем, что решение задачи 14 определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pr_k \mathcal{Q} &= [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}], \\ x_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_{\min}}}, \\ x_{\min} &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_{\max}}}, & \gamma_{\max} < +\infty, \\ 0, & \gamma_{\max} = +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Ниже приведем иллюстрации проекций аппроксимации информационного множества на координатные оси при случайной помехе w_i в уравнении измерений для двух случаев: $m = 10$ и $m = 100$. Для этих иллюстраций были выбраны следующие параметры системы:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.5, \quad r_0 = r_i = 1/16, \quad i = \overline{1, m}.$$

На рисунках 3.3-3.6 изображены проекции аппроксимации информационного множества на координатные оси q_1 , q_2 , q_3 и q_4 соответственно при $m = 10$. Аналогичные проекции для случая $m = 100$ приведены на рисунках 3.7-3.10.

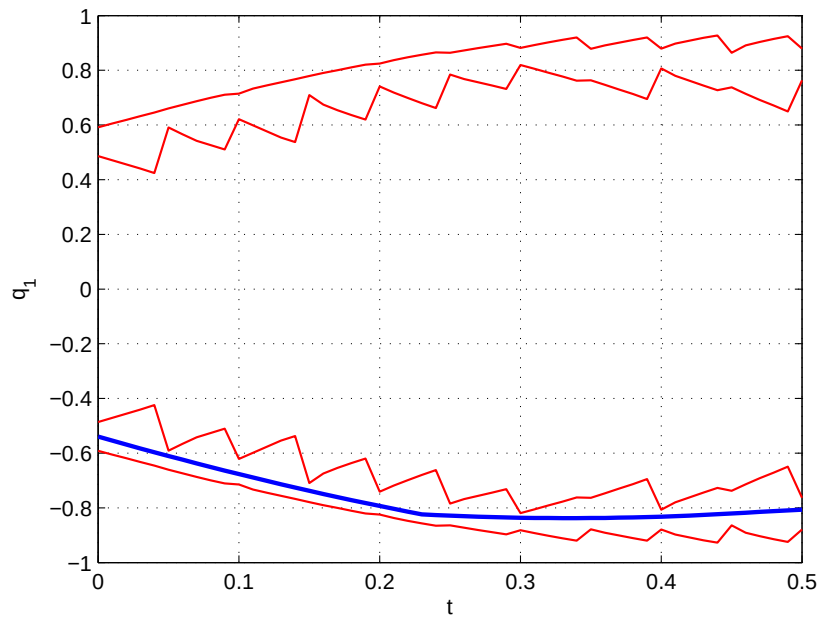


Рис. 3.3: Динамика проекции аппроксимации информационного множества на ось q_1 . Случай $m = 10$.

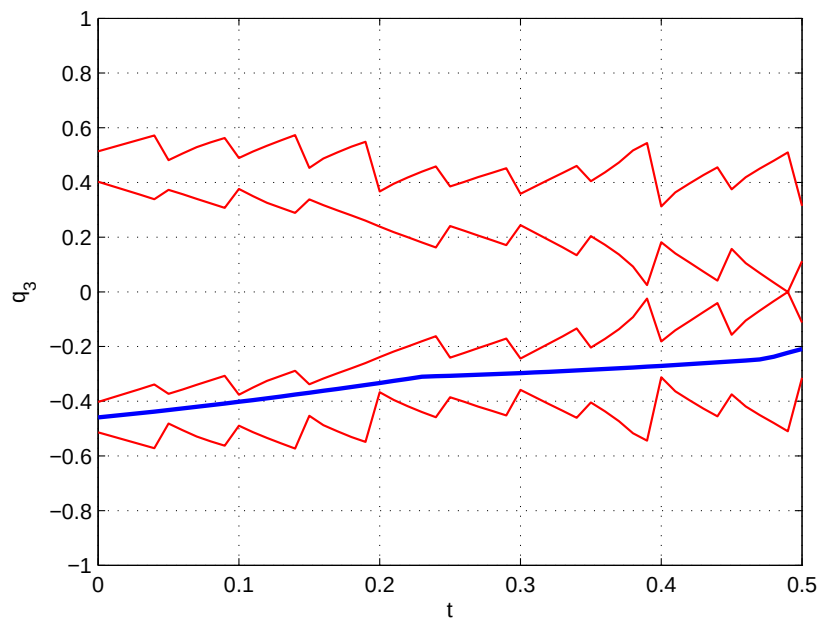


Рис. 3.4: Динамика проекции аппроксимации информационного множества на ось q_2 . Случай $m = 10$.

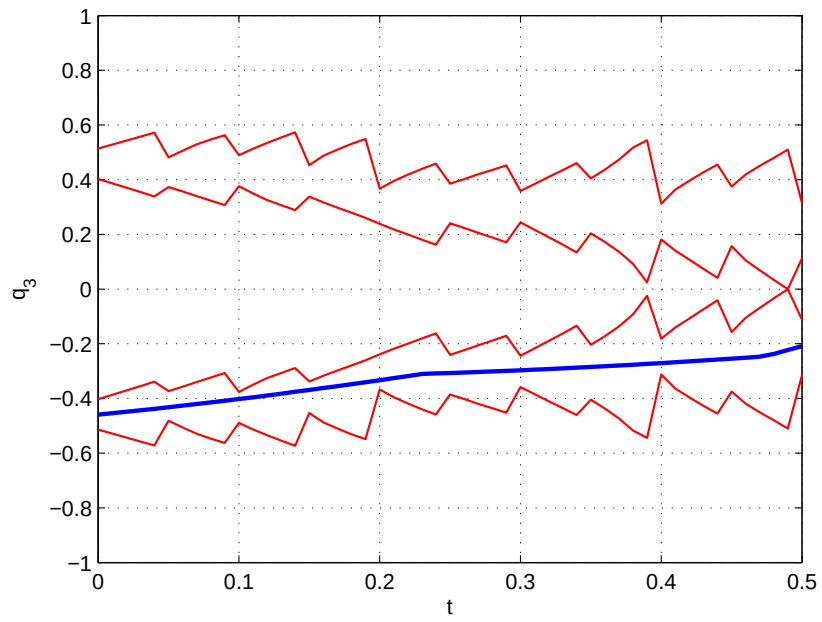


Рис. 3.5: Динамика проекции аппроксимации информационного множества на ось q_3 . Случай $m = 10$.

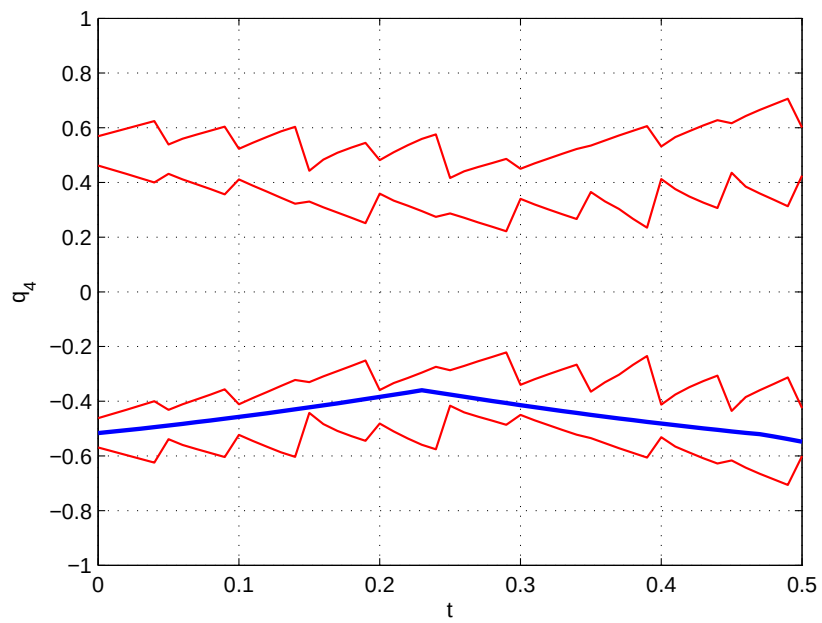


Рис. 3.6: Динамика проекции аппроксимации информационного множества на ось q_4 . Случай $m = 10$.

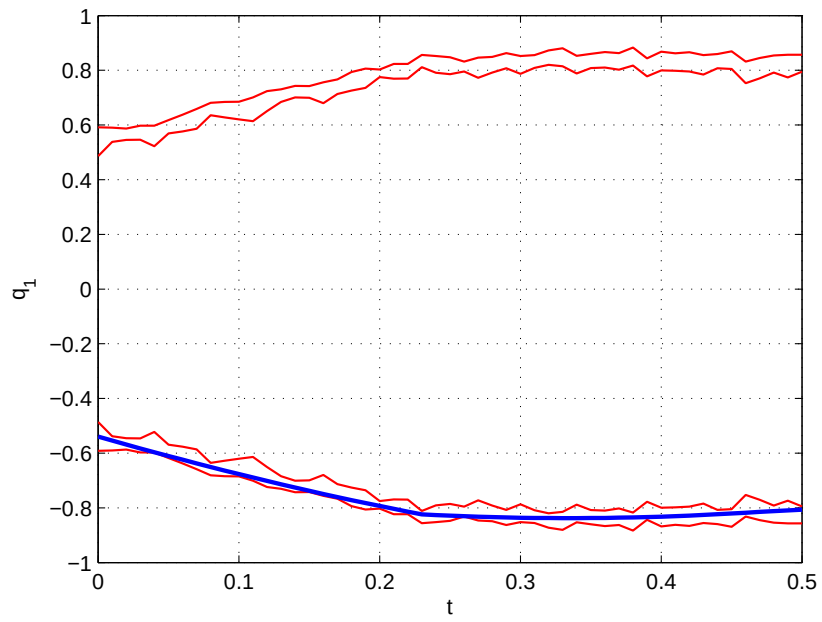


Рис. 3.7: Динамика проекции аппроксимации информационного множества на ось q_1 . Случай $m = 100$.

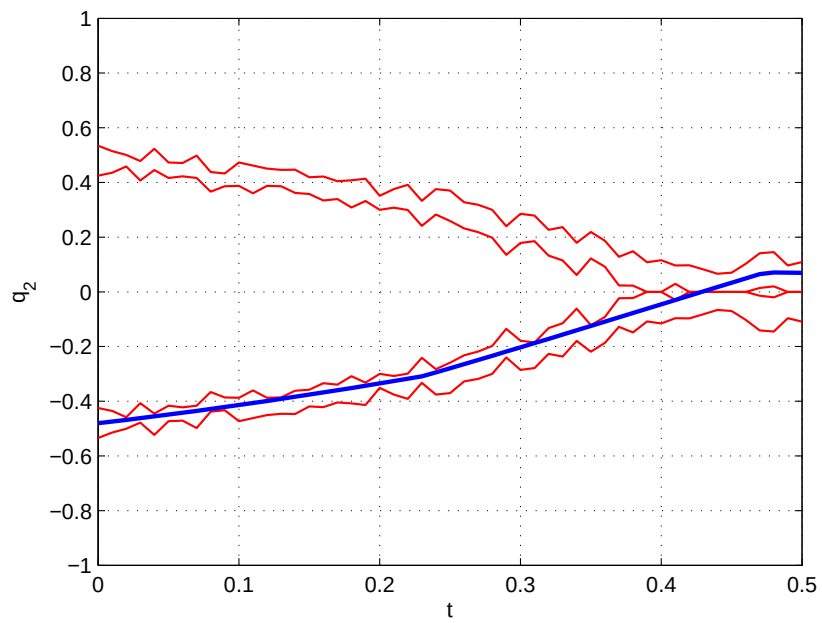


Рис. 3.8: Динамика проекции аппроксимации информационного множества на ось q_2 . Случай $m = 100$.

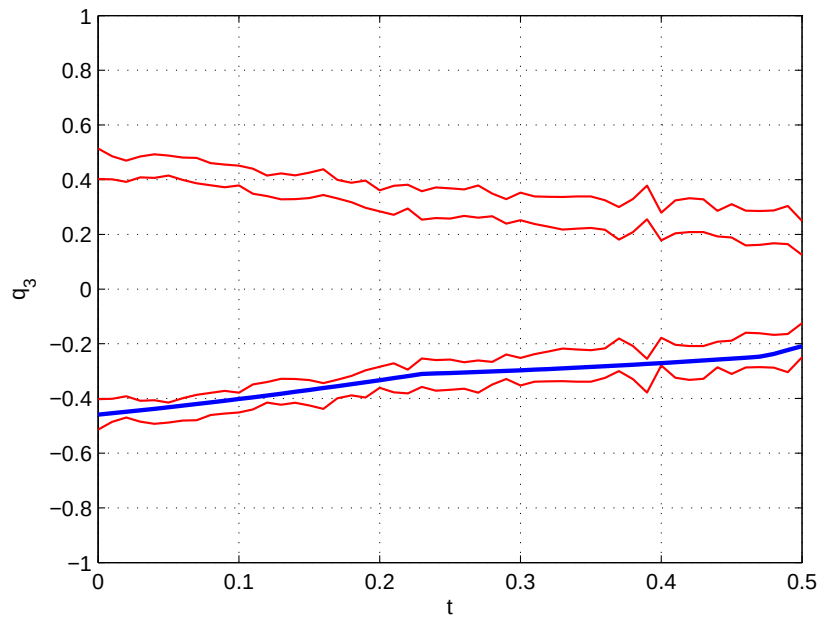


Рис. 3.9: Динамика проекции аппроксимации информационного множества на ось q_3 . Случай $m = 100$.

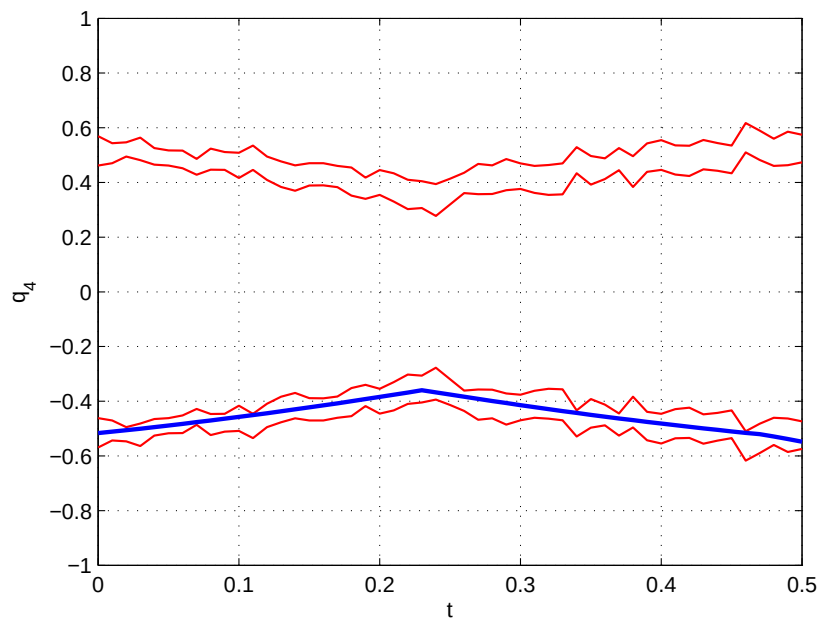


Рис. 3.10: Динамика проекции аппроксимации информационного множества на ось q_4 . Случай $m = 100$.

3.6 Задача синтеза управлений

В этом разделе рассмотрим задачу управления билинейной системой при неопределенности:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bx, \quad t \in [t_0, t_1], \\ A(t) &\in \mathcal{A}(t), \quad B(t) \in \mathcal{B}(t). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — помеха, а $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — управление. Множества $\mathcal{A}(t)$ и $\mathcal{B}(t)$, представляющие собой “жесткие” или “геометрические” ограничения на помеху и управление соответственно, являются эллипсоидами или параллелепипедами в пространстве матриц. Задано целевое множество в виде эллипсоида:

$$x(t_0) \in \mathcal{M} = \mathcal{E}(0, M).$$

Управление B рассматривается в классе позиционных стратегий $U(t, x)$, которые принимают значения в множестве $\mathcal{B}(t)$. Символом Δ обозначим некоторое разбиение

$$\Delta = \{\tau_i, i = \overline{0, l+1}\}, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l+1} = t_1.$$

Пусть функция $B(t)$ определена по следующему правилу с помощью стратегии $U(t, x)$:

$$B(t) = U(\tau_i, x(\tau_i)), \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \quad i = \overline{0, l}.$$

Решение уравнения замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + B(t)x \quad (3.50)$$

существует, единственно и продолжимо при любой реализации неопределенности $A(\cdot) \in \mathcal{V}(t) = L^\infty([t, t_1], \mathcal{A}(\cdot))$.

Определим функцию цены $V(t, x)$ по следующей формуле

$$V(t, x) = \inf_{U, \Delta} \sup_{A(\cdot) \in \mathcal{V}(t)} \left\{ \langle (x(t_0), Mx(t_0)) \rangle \mid x(t) = x \right\}.$$

Данная функция является решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса [14, 30]

$$V_t + \max_{A \in \mathcal{A}(t)} \langle V_x, Ax \rangle + \min_{B \in \mathcal{B}(t)} \langle V_x, Bx \rangle = 0 \quad (3.51)$$

с краевым условием

$$V(t_1, x) = \langle x, Mx \rangle. \quad (3.52)$$

Далее мы приведем способ построения внутренних оценок $\mathcal{W}^-[t]$ множества разрешимости, которые затем используем для построения позиционных стратегий $U(t, x)$, гарантирующих в указанном ниже смысле, что из любого состояния системы $x(\tau) \in \mathcal{W}^-[\tau]$ и любой допустимой реализации помехи $A(t)$ можно перевести систему в момент t_1 в состояние $x(t_1) \in \mathcal{M}$.

Справедливо следующее утверждение (см., например [30]).

Теорема 22 *Предположим, что функция $w \in C([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям*

$$q + H(t, x, p) \leq 0 \quad \forall (q, p) \in D^+ w(t, x), \quad (3.53)$$

$$w(t_1, x) = \langle x, Mx \rangle. \quad (3.54)$$

Тогда $w(t, x) \geq V(t, x)$, $t \in [t_0, t_1]$, и множество

$$\mathcal{W}^-[t] = \{x \mid w(t, x) \leq 1\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$.

Для определенности будем рассматривать $\mathcal{A}(t)$ в виде параллелепипеда, а $\mathcal{B}(t)$ — в виде эллипсоида $\mathcal{E}(0, P(t))$. В этом случае уравнение (3.51) приобретает вид

$$V_t + \sum_{k=1}^{d_1} |\langle V_x, A_k x \rangle| - \sqrt{\langle V_x \otimes x, P(V_x \otimes x) \rangle} = 0 \quad (3.55)$$

Внутреннюю оценку $\mathcal{W}^-[t]$ построим в виде объединений эллипсоидов:

$$\mathcal{W}^-[t] = \bigcup_{s=1}^m \{x \mid \langle x, K_s(t)x \rangle \leq 1\}, \quad K_s(t) > 0. \quad (3.56)$$

В соответствии с теоремой 22, функцию $w(t, x) = \min_s \langle x, K_s x \rangle$ будем искать

в виде суперрешения уравнения (3.55). Чтобы получить уравнения для набора матриц $K_s(\cdot)$ оценим слагаемые $\sum_{k=1}^{d_1} \langle w_x, A_k x \rangle$ и $\sqrt{\langle w_x \otimes x, P(w_x \otimes x) \rangle}$ по аналогии с тем, как это было сделано соответственно в пунктах 2.2.1 и 2.3.2 главы 2. Используя формулы (2.20) и (2.37)-(2.40), приходим к следующим уравнениям:

$$\dot{K}_s + \sum_{j=1}^d Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) - \gamma_s^{-1} R_s = 0, \quad K_s(t_1) = M.$$

Для полноты изложения приведем далее формулы так называемых экстремальных стратегий для множества $\mathcal{W}^-[t]$. Будем использовать следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0^-(t, x) &= \text{Arg} \min_{y \in \mathcal{W}[t]} \|x - y\|, \\ S^0(t, x) &= \{p = y^0 - x : y^0 \in \mathcal{W}_0^-(t, x)\}. \end{aligned}$$

Выберем произвольный вектор $s^0(t, x) \in S^0(t, x)$. Тогда позиционную стратегию $U(t, x)$ можно определить следующим образом

$$U(t, x) \in \text{Arg} \max_{B \in \mathcal{B}(t)} \langle s^0(t, x), Bx \rangle. \quad (3.57)$$

Символом $X(\tau, y, U, \Delta)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций $x(\cdot)$, которые удовлетворяют начальному условию $x(\tau) = y$ и дифференциальному включению

$$\dot{x} \in \{(A + B(t))x : A \in \mathcal{A}(t)\}$$

для почти всех $t \in [\tau, t_1]$, в котором

$$B(t) = U(\tau_i, x(\tau_i)), \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \quad i = \overline{0, l}.$$

Кроме того, введем множество $X(\tau, y, U) = \limsup_{\text{diam} \Delta \rightarrow 0} X(\tau, y, U, \Delta)$. С использованием этих обозначений можно сформулировать следующую теорему [30].

Теорема 23 Пусть множество $\mathcal{W}^-[t]$ вычислено по формулам (3.56), а позиционная стратегия U выбрана в соответствии с условием (3.57). Пусть,

кроме того, $x_\tau \in \mathcal{W}^-[\tau]$. Тогда

$$x(t) \in \mathcal{W}^-[t], \quad \forall x(\cdot) \in X(\tau, x_\tau, U), \quad \forall t \in [\tau, t_1],$$

и, в частности, $x(t_1) \in \mathcal{M}$.

3.7 Пример: задача синтеза для линейной системы с неопределенностью в матрице

В этом пункте приведем пример синтеза управления для линейной системы с неопределенностью в коэффициентах матрицы. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(t)u, \quad t \in [t_0, t_1], \\ A(t) &\in \mathcal{A}(t), \quad u(t) \in \mathcal{E}(p_u(t), P(t)), \end{aligned} \quad (3.58)$$

в которой о матрице A известно лишь то, что она содержится в множестве

$$\mathcal{A} = \{A \mid A(t) = A_0(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_d A_d(t)\}, \quad (3.59)$$

а u представляет собой управление, ограниченное эллипсоидом $\mathcal{E}(p_u(t), P(t))$. Предположим, что целевое множество имеет вид

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}(0, M). \quad (3.60)$$

Задача 15 Построить внутреннюю оценку $\mathcal{W}^-[t]$ множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$ и предъявить позиционную стратегию $U(t, x)$, которая для любого состояния системы $x(\tau) \in \mathcal{W}^-[\tau]$ и любой допустимой реализации неопределенности в коэффициентах (t) приводит замкнутую систему в состояние $x(t_1) \in \mathcal{M}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса в данном случае имеет вид

$$V_t + \sum_{k=1}^{d_1} |\langle V_x, A_k x \rangle| - \sqrt{\langle V_x, B(t)P(t)B(t)^T V_x \rangle} = 0.$$

Будем искать внутреннюю оценку $\mathcal{W}^-[t]$ в виде эллипсоида:

$$\mathcal{W}^-[t] = \{x \mid w(t, x) = \langle x, K(t)x \rangle \leq 1\}.$$

Применяя формулы пункта 2.2.1 и примера 3 из раздела 2.5, получаем дифференциальное уравнение для матрицы $K(t)$

$$\begin{aligned} \dot{K} + \sum_{j=1}^d Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) - \\ - \gamma^{-1}(t) \left[K(t) (B(t)P(t)B(t)^T)^{\frac{1}{2}} S^T(t) + S^T(t) (B(t)P(t)B(t)^T)^{\frac{1}{2}} K(t) \right] = 0 \end{aligned}$$

с краевым условием $K(t_1) = M$. Здесь

$$Q_j^T(t) \text{Abs}(\Lambda_j(t)) Q_j(t) = K(t) A_j(t) + A_j^T(t) K(t), \quad S(t) S^T(t) = I.$$

Ниже приведены иллюстрации для следующих значений параметров системы:

$$\begin{aligned} d = 1, \quad A_1(t) = 0.3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = 5I, \\ P(t) = I, \quad p_u(t) = 0, \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1. \end{aligned}$$

На основе построенной эллипсоидальной оценки $\mathcal{W}^-[t]$ был проведен синтез управления для траектории, выпущенной из точки $x^0 = [4.81, 0.67]^T$ при кусочно постоянной реализации помехи $v(t)$. На рисунке 3.11 изображено соответствующее синтезированное управление (красным цветом компонента u_1 и синим цветом компонента u_2).

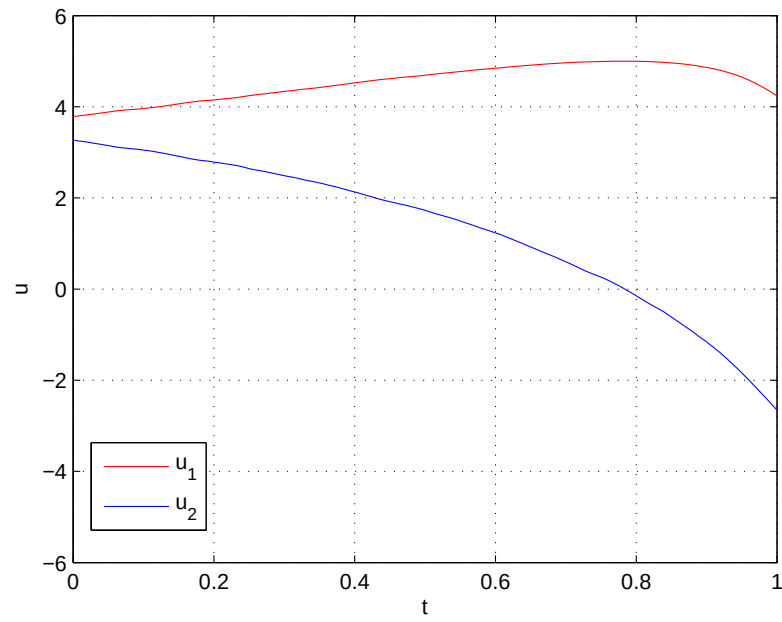


Рис. 3.11: Синтезированное управление. Компонента u_1 изображена красным цветом, а компонента u_2 — синим.

Заключение

В заключение кратко сформулируем основные результаты, полученные в диссертации.

1. Построены семейства внешних и внутренних численных аппроксимаций множеств достижимости для билинейных систем.
2. Предложен алгоритм решения задач аппроксимации множеств достижимости, информационных множеств и задачи синтеза управлений для класса нелинейных глобально билинеаризуемых систем.
3. Построено семейство внешних численных аппроксимаций множества достижимости для системы уравнений динамического уницикла.

Изложенные в настоящей работе методы оценивания множеств достижимости и информационных множеств для билинейных и билинеаризуемых систем могут быть использованы при конструировании конкретных алгоритмов численного решения задач достижимости, гарантированного оценивания и синтеза управлений для указанного класса систем. Эти результаты могут быть также использованы в качестве составной части решения более сложных задач управления таких, как задача синтеза управлений при неполных измерениях. Дальнейшие исследования могут быть нацелены на уточнение построенных в настоящей работе аппроксимаций.

Литература

- [1] Р. Беллман. *Динамическое программирование*. М.: ИЛ, 1960.
- [2] Ф. П. Васильев. *Методы оптимизации*. М.: МЦНМО, 2011.
- [3] Ф. Р. Гантмахер. *Теория матриц*. 5-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [4] Ю. Ф. Голубев. *Основы теоретической механики*. 2-е изд., М.: Изд-во МГУ, 2000.
- [5] М. И. Гусев. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // *Труды ИММ УрО РАН*. 2009, том 15, № 4, с. 82–94.
- [6] Х. Г. Гусейнов, А. Н. Мойсеев, В. Н. Ушаков. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // *Прикл. математика и механика*. 1998, том 62, № 2, с. 179–187.
- [7] А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский. Параллельный алгоритм вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределённых возмущениях // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013, том 53, № 1, с. 47–57.
- [8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа*. 7-е изд. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- [9] Н. Н. Красовский. *Теория управления движением*. М.: Наука, 1968.
- [10] Н. Н. Красовский. *Игровые задачи о встрече движений*. М.: Наука, 1970.
- [11] Н. Н. Красовский. Минимаксное поглощение в игре сближения // *ПММ*. 1971, том 35, № 6, с. 945–951.
- [12] Н. Н. Красовский. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // *Математический сборник*. 1978, том 107(149), № 4(12), с. 541–571.
- [13] Н. Н. Красовский. *Управление динамической системой*. М.: Наука, 1985.
- [14] Н. Н. Красовский., А. И. Субботин. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, 1974.
- [15] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, В. Н. Ушаков. Минимаксная дифференциальная игра // *Доклады АН СССР*. 1972, том 206, № 2, с. 277–280.

- [16] С. Н. Кружков. Обобщенные решения нелинейных уравнений со многими независимыми переменными, 1 // *Математический сборник*. 1966, том 70, №3, с. 394-416.
- [17] Н. В. Крылов. Управляемые процессы диффузионного типа. М., Наука, 1977.
- [18] А. Б. Куржанский. О двойственности задач оптимального управления и наблюдения // *Прикладная математика и механика*. 1970, том 34, № 3, с. 429-439.
- [19] А. Б. Куржанский. Дифференциальные игры наблюдения // *Доклады АН СССР*. 1972, том 207, № 3, с. 527-530.
- [20] А. Б. Куржанский. К теории позиционного наблюдения. Общие соотношения // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1973, № 5, с. 20-30.
- [21] А. Б. Куржанский. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [22] А. Б. Куржанский. Принцип сравнения для уравнения типа Гамильтона-Якоби в теории управления // *Труды Института Математики и Механики УРО РАН*. 2006, том 12, № 1, стр. 173-183.
- [23] С. С. Мазуренко. Дифференциальное уравнение на калибровочную функцию Минковского звездного множества достижимости дифференциального включения // *Доклады Академии Наук. Математика*. 2012, том 445, № 2, с. 139-142.
- [24] О. А. Олейник. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук*. 1957, том 12, № 3, с. 3-73.
- [25] И. В. Рублев. Множество достижимости трехмерной каскадной системы управления // *Дифференциальные уравнения*. 2006, том 42, № 12, стр. 1672-1679.
- [26] В. В. Синяков. Внутренние оценки множеств достижимости билинейных систем // *Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ*. 2013, стр. 215-233.
- [27] В. В. Синяков. О внешних и внутренних аппроксимациях множеств достижимости билинейных систем // *Доклады Академии Наук*. 2014, том 458, № 1, с. 27-31.
- [28] В. В. Синяков. Метод вычисления внешних и внутренних аппроксимаций множеств достижимости билинейных дифференциальных систем // *Дифференциальные уравнения*. 2015, том 51, № 8, с. 1101-1114.
- [29] А. И. Субботин. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби*. М.: Наука, 1991.
- [30] А. И. Субботин. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

- [31] Н. Н. Субботина. Метод характеристик для уравнений Гамильтона—Якоби и его приложения в динамической оптимизации. *Современная математика и ее приложения*. Институт Кибернетики, Академия Наук Грузии, Тбилиси, 2004.
- [32] Н. Н. Субботина, Т. Б. Токманцев. Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза. *Дифференциальные уравнения и топология. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина*. Тр. МИАН, 271, МАИК, М., 2010, 259–277.
- [33] А. М. Тарасьев. Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона—Якоби // *ПММ*. 1994, том 58, № 2, с. 22–36.
- [34] А. М. Тарасьев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков. Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби // *Изв. РАН. Техн. Киберн.* 1994, № 3, с. 173–185.
- [35] Е. Е. Тыртышников. *Матричный анализ и линейная алгебра*. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007.
- [36] Е. Е. Тыртышников. *Методы численного анализа*. М.: Издательский центр "Академия". 2007.
- [37] А. Ф. Филиппов. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М.: Наука, 1985.
- [38] Т. Ф. Филиппова. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2010, том 16, № 1, с. 223–232.
- [39] Z. Artstein. A Calculus for Set-Valued Maps and Set-Valued Evolution Equations // *Set-Valued Analysis*. 3: 213-261, 1995.
- [40] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1995.
- [41] I. Y. Bar-Itzhack, Y. Oshman. Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation // *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*. 1985. V. AES-21, N. 1. p. 128-136.
- [42] R. W. Brockett. Volterra series and geometric control theory // *Automatica*, 12:167–176, 1976.
- [43] S. P. Boyd, L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press. 2004.
- [44] F. L. Chernousko. *State Estimation for Dynamic Systems*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [45] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [46] M. G. Crandall, P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // *Transactions of American Mathematical Society*. 1983. V. 277. p. 1-41.

- [47] M. G. Crandall, L. C. Evans, and P. L. Lions. Some properties of solutions of Hamilton-Jacobi equations // *Transactions of American Mathematical Society*. 1984. V. 282. N. 2. p. 487-502.
- [48] A. De Luca, G. Oriolo, and C. Samson. Feedback Control of a Nonholonomic Car-Like Robot. In J.-P. Laumond, editor, *Robot Motion Planning and Control*, p. 171-249. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1998.
- [49] D. L. Elliot. *Bilinear Control Systems*. Springer, 2009.
- [50] W. H. Fleming. The Cauchy problem for a nonlinear first-order partial differential equation // *J. Differential Equations*. 1969. V. 5, N. 3, p. 515-536.
- [51] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. N.Y.: Springer, 2006.
- [52] R. Isaacs. *Differential Games*. John Wiley, New York, 1965.
- [53] H. Ishii. Uniqueness of Unbounded Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations // *Indiana U. Math. J.* 1984. V. 33. N. 5. p. 721-748.
- [54] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Springer, 1985.
- [55] N. N. Krasovski and A. I. Subbotin. *Game-theoretical Control Problems*. Springer-Verlag, N.Y., Berlin, Heidelberg, 1988.
- [56] B. H. Krogh, O. Stursberg. Efficient Representation and Computation of Reachable Sets for Hybrid Systems. In O. Maler and A. Pnueli, editors, *Hybrid Systems: Computation and Control HSCC'03*, LCNS 2623, p. 482-497. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2003.
- [57] E. K. Kostousova. State Estimation for Dynamic Systems via Parallelotopes: Optimization and Parallel Computations // *Optim. Methods Software*, 9(4):269-306, 1998.
- [58] E. K. Kostousova. On Polyhedral Estimates for Reachable Sets of Discrete-Time Systems with Bilinear Uncertainty // *Automation and Remote Control*, 2011, V. 72, N. 9, p. 1841-1851.
- [59] E.K. Kostousova. On Tight Polyhedral Estimates for Reachable Sets of Linear Differential Systems // *AIP Conf. Proc.* 1493, p. 579-586, 2012.
- [60] A. J. Krener. Bilinear and Nonlinear Realisations of Input-Output Maps // *SIAM J. Control*. 1975. V. 13, N. 4, p. 827-834.
- [61] A. B. Kurzhanski, T. F. Filippova. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // *Advances in Nonlinear Dynamics and Control*. Ser. PSCT 17. Boston: Birkhauser. 1993. p. 122-188.
- [62] A. B. Kurzhanski and I. Valyi. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. SCFA. Birkhauser, Boston, 1997.

- [63] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. Dynamic Optimization for Reachability Problems // *Journal of Optim. Theory and Appl.*, 108(2):227–251, 2001.
- [64] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // *Optim. Methods Software*, 17(2):177-237, 2002.
- [65] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. On Some Nonstandard Dynamic Programming Problems of Control Theory // *Variational Methods and Applications*. N.Y.: Kluwer, 2004. p. 613-627.
- [66] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. A Comparison Principle for Equations of the Hamilton-Jacobi Type in Set-Membership Filtering // *Communications in Information and Systems*. 2006. V. 6, N. 3, p. 179-192.
- [67] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation*. Birkhauser, 2014.
- [68] E. B. Lee, L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. Wiley, 1967.
- [69] J. Lygeros, C. Tomlin, and S. Sastry. Controllers for reachability specifications for hybrid systems // *Automatica*. 1999. V. 35. N. 3. p. 349-370.
- [70] R. R. Mohler. *Nonlinear Systems: v.II Application to Bilinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [71] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [72] S. Osher, R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer-Verlag, 2002.
- [73] P. M. Pardalos, V. Yatsenko. *Optimization and Control of Bilinear Systems*. Springer, 2008.
- [74] V. S. Patsko, S. G. Pyatko, and A. A. Fedotov. Three-dimensional Reachability Set for a Nonlinear Control System // *Journal of Computer And Syst. Sci. Intern.*, 42(3):320–328, 2003.
- [75] I. V. Roublev. A Numerical Algorithm for Construction of Three-Dimensional Projections for Reachability Sets // *Proc. 8th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2010)*, p. 993–998, Bologna, 2010.
- [76] F. C. Schweppe. Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs // *IEEE Trans. Aut. Cont.* AC-13, 1968.
- [77] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge Univ. Press, 1999.
- [78] V. Sinyakov, I. V. Roublev. Approximation of reachability sets for nonlinear unicycle control system using the comparison principle // *Proc. 9th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2013)*, p. 688–692, Toulouse, 2013.

- [79] P. E. Souganidis. Approximation Schemes for Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // *J. Diff. Eqns.* 1989. V. 59, p. 1–43.