Московский Государственный Университет им.
М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Синяков Владимир Владимирович

Вычислительные методы для задач достижимости и синтеза управлений в условиях нелинейности

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016 г.

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель: **Куржанский Александр Борисович**, доктор физико-математических наук, академик РАН, заведующий кафедрой системного анализа факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Официальные оппоненты: **Овсянников Дмитрий Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории систем управления электрофизической аппаратурой федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

Обросова Наталия Кирилловна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ФИЦ «Информатика и управление» РАН

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского Российской Академии Наук»

Защита состоится 25 мая 2016 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д. 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ, д.1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по адресу: 119192, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан «   »   2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д. 501.001.41,

доктор физико-математических наук, профессор   Е.В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Данная работа посвящена вычислительным методам для задач достижимости, гарантированного оценивания и синтеза управлений для некоторых классов систем управления. Изучаемые управляемые системы описываются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Основное внимание в работе уделено классу билинейных по состоянию и управлению систем. Задача достижимости заключается в построении *множества достижимости*, состоящего из всех точек, в которые можно попасть из заданного *начального множества*, используя допустимые управления, которые удовлетворяют так называемым "жестким" или геометрическим ограничениям. В задаче гарантированного оценивания требуется найти *информационное множество*, которое состоит из всех точек, совместимых с поступающими в реальном времени измерениями и ограничениями на неопределенность в системе и начальном состоянии. Поступающие измерения представляют собой функцию от состояния системы и реализации помехи в *уравнении измерений.* Неопределенность в задачах гарантированного оценивания также удовлетворяет геометрическим ограничениям: значения неопределенных параметров в конкретный момент времени должно принадлежать определенным множествам в пространстве этих параметров. Множества достижимости и информационные множества являются составными частями решения других задач теории управления, в частности, *задачи синтеза.* В исследуемых в данной работе задачах все рассмотрения производятся на конечном отрезке времени. Важными понятиями в этих задачах являются понятия трубки достижимости и информационной трубки, которые представляют собой многозначные отображения, значениями которых в фиксированный момент времени t являются соответственно множества достижимости и информационные множества [1].

К настоящему времени разработан ряд подходов к рассматриваемому кругу задач. Необходимо подчеркнуть, что решение этих задач, как правило, может быть получено только численно и требует большого количества вычислений. Лишь в ряде исключительных случаев решение получено в виде явной формулы.

Основным элементом многих таких вычислительных подходов является использование метода динамического программирования, разработанного Р. Беллманом [2]. Этот метод заключается во введении вспомогательного объекта — функции цены, которая вычисляется как оптимальное значение соответствующего задаче функционала для каждой *позиции* системы. Позицией системы называется пара объектов: момент времени и обобщенное состояние системы. Позиция выбирается таким образом, чтобы функция цены удовлетворяла полугрупповому свойству, которое также называется принципом оптимальности. В таком случае функция цены является решением дифференциального уравнения в частных производных, которое называется уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ). Функция цены часто бывает не всюду гладкой и удовлетворяет уравнению ГЯБ только в точках дифференцируемости, поэтому возникает необходимость использовать различные понятия обобщенных решений уравнения Беллмана. Среди определений обобщенных решений можно выделить обобщенные решения С. Н. Кружкова [3] для выпуклого по импульсной переменной p гамильтониана $H(t, x, p)$, *вязкие решения* [4, 5, 6], построенные при помощи метода исчезающей вязкости, *вязкостные решения*, введенные М. Г. Крэндаллом и П.-Л. Лионсом [7, 8], и *минимаксные решения*, введенные А. И. Субботиным [9, 10]. В случае непрерывной функции цены последние два определения эквивалентны.

Одна группа численных методов, связанная с использованием метода характеристик для уравнений Гамильтона-Якоби, была развита в работах Н.Н. Субботиной [11, 12]. В рамках этого подхода функция цены в задаче достижимости (или в задаче синтеза) аппроксимируется на основе формул метода характеристик.

Другой подход к численному решению задачи достижимости заключается в дискретизации соответствующей функции цены по времени и/или по пространству. В частности, при дискретизации по времени уравнение Гамильтона-Якоби заменяется некоторым оператором, который переводит аппроксимацию решения в момент t в аппроксимацию решения в момент $t + \Delta t$. Решения в рамках этого подхода приведены в работах [13, 14, 15, 16], см. также книги [17, 10].

Третий вычислительный подход заключается в оценивании решений рассматриваемых задач множествами более простой формы. Эти оценки представляют собой внутренние или внешние аппроксимации искомых множеств.

В работах А.Б. Куржанского [18, 19] был разработан аппарат эллипсоидального исчисления, в рамках которого для линейных систем строятся внешние и внутренние оценки множеств достижимости в виде эллипсоидов (см. также [20, 21]). При этом объединение всех внутренних оценок, как и пересечение всех внешних оценок, совпадает с точным множеством достижимости. Сходная теория для оценок в виде параллелотопов была позже построена в работах Е.К. Костоусовой [22, 23].

Данный подход можно реализовать различными способами. В указанных выше работах оценки получены индуктивным методом (также см. [24]). Другой способ, называемый принципом сравнения для уравнений Гамильтона-Якоби, предложен в работе А.Б. Куржанского [25]. Он сводит задачу к нахождению верхних и нижних оценок функции цены, которые конструируются путем оценивания гамильтониана в уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана. Этот способ, в частности, применен в работе [26].

В данной работе также используется именно этот подход. Его применение приводит к алгоритмам аппроксимации, в которых оценки задаются с помощью решений задач Коши для некоторых специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти задачи Коши для различных оценок независимы друг от друга и решаются численно. Независимость позволяет при этом эффективно использовать параллельные вычисления. Полученные в результате наборы оценок могут быть использованы для построения более точных внешних и внутренних аппроксимаций искомых множеств с помощью операций пересечения и объединения.

Имеются работы, в которых было получено точное аналитическое представление множеств достижимости для конкретных нелинейных управляемых систем (см., в частности, [27, 28]).

Одними из ключевых понятий в теории гарантированного оценивания, разработанной А.Б. Куржанским [29, 30, 31, 32, 33], являются понятия информационного множества и *информационного состояния* системы, которые являются различными вариантами формализации доступной к некоторому моменту времени информации о состоянии системы и связаны между собой определенными соотношениями. Информационное множество оказывается решением соответствующего эволюционного уравнения [34], а информационное состояние, в зависимости от определения, является решением уравнения или вариационного неравенства типа Гамильтона-Якоби [35, 33]. Использование этих различных формализаций доступной информации позволяет применять при решении задач гарантированного оценивания как теорию многозначного анализа и дифференциальных включений, так и теорию уравнений Гамильтона-Якоби.

В теории, разработанной Н.Н. Красовским и его сотрудниками [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43], предложена формализация дифференциальных игр и подробно исследована их структура. При этом, в частности, указано, каким образом можно построить синтезирующую стратегию управления, удерживающую траекторию системы внутри слабоинвариантных множеств, несмотря на действия второго игрока, и обеспечивающую таким образом попадание на целевое множество в требуемый момент времени.

Важным свойством, которое зачастую имеется у множеств достижимости нелинейных систем, является их невыпуклость даже для выпуклых начальных множеств. Однако, при использовании только лишь выпуклых оценок для построения внешних аппроксимаций невозможно получить более точное решение, чем выпуклая оболочка множества достижимости. В связи с этим представляется важным рассмотреть новые классы невыпуклых оценок, аппроксимируя множества достижимости более точным образом. В настоящей работе, в частности, рассматриваются такие классы невыпуклых оценок, как оценки в виде множеств уровня квадратичных форм и в виде объединений эллипсоидов.

Билинейные по управлению и состоянию системы представляют собой важный класс нелинейных управляемых систем, благодаря некоторым их особенностям [44, 45, 46, 47, 34, 48, 49, 50]. Во-первых, нелинейность такого типа, пожалуй, можно считать одной из самых простых. Таким образом, эти системы служат хорошим примером для испытания новых аналитических конструкций и алгоритмов. Во-вторых, билинейная система может рассматриваться как линейная система с неопределенностью в коэффициентах матрицы системы, а такие модели часто встречаются в прикладных задачах. В-третьих, в работах А. Кренера, Р.В. Брокетта, А. Исидори, П.М. Пардалоса и В. Яценко (см., например, [44, 45, 46, 48]) была развита теория билинеаризации нелинейных систем, которая посвящена вопросам локальной и глобальной эквивалентности нелинейных систем соответствующим билинейным системам. В данной работе результаты этой теории применяются для распространения полученных результатов на более широкий класс нелинейных систем.

Целью работы является построение решений задач аппроксимации множеств достижимости, информационных множеств и задачи синтеза для определенных классов нелинейных систем, которые могут быть реализованы в виде эффективных численных алгоритмов.

Научная новизна работы. Полученные результаты являются новыми. В диссертации рассмотрены малоизученные задачи численной аппроксимации множеств достижимости и информационных множеств нелинейных систем с помощью семейств оценок простой формы. В частности, настоящая работа продолжает исследования [34, 51, 50] задач достижимости для класса билинейных по состоянию и управлению/возмущению систем. Среди построенных семейств оценок можно выделить численные оценки в виде множеств уровня квадратичных форм и в виде объединений эллипсоидов, которые являются различными обобщениями эллипсоидальных оценок для линейных систем, представленных в работах [18, 19, 25, 33]. В указанном выше классе методов численной аппроксимации построенные в работе методы дают одни из первых примеров *невыпуклых* оценок.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет, в основном, теоретический характер. Полученные в диссертации результаты по численной аппроксимации множеств достижимости и информационных множеств билинейных и билинеаризуемых систем могут представлять интерес для дальнейших исследований. В частности, представляется важным вопрос о получении точного представления множества достижимости произвольной билинейной системы в виде пересечения внешних оценок простой формы. В то же время, схемы построения аппроксимаций, приведенные во второй и третьей главах, могут быть реализованы в виде численных алгоритмов и, таким образом, решать задачу до конца. Эти алгоритмы могут быть применены при решении практических задач в таких прикладных областях, как автоматизация транспортных средств, робототехника, навигация, исследование и управление механическими системами. При нахождении аппроксимаций могут эффективно использоваться параллельные вычисления, так как отдельные оценки простой формы для множеств достижимости и информационных множеств строятся независимо.

Методы исследования. Для достижения поставленной цели используется описанный выше подход на основе принципа сравнения для уравнений Гамильтона-Якоби, известные результаты из негладкого анализа, теории гарантированного оценивания, теории позиционных дифференциальных игр, методов глобальной билинеаризации.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены в виде докладов на научно-исследовательских семинарах кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ (рук. академик А.Б. Куржанский), ежегодной научной конференции “Тихоновские чтения” (Москва, МГУ, ф-т ВМК, октябрь 2013 г. и октябрь 2014 г.) и международной конференции по нелинейным системам управления NOLCOS (Тулуза, сентябрь 2013 г.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 работы, из них 2 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. Работы из журналов, рекомендованных ВАК, подготовлены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 115 страниц. Библиография включает 79 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении ставятся цели работы, обосновывается ее актуальность, а также кратко излагаются основные результаты, полученные в диссертации.

Первая глава диссертации посвящена описанию ряда методов, которые могут быть использованы для решения поставленных в этой главе задач аппроксимации.

В разделе 1.1 представлены общие постановки исследуемых в диссертации задач достижимости, гарантированного оценивания и синтеза управлений. В задаче достижимости рассматривается нелинейная управляемая система

$$\begin{gathered}\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) \in \mathcal{X}^0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}^k$ — управление. Предполагается, что управление стеснено “жестким” или геометрическим ограничением

$u \in U$, в котором U — выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{R}^d$. Ставится задача построения семейств внутренних и внешних оценок множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0; \mathcal{X}^0)$.

В задаче гарантированного оценивания рассматривается система (1), в которой $u \in U$ — неопределенность в динамике системы, а $x(t_0) \in \mathcal{X}^0$ — неопределенность в начальном состоянии. Задано также уравнение наблюдений, которое может быть дискретным или непрерывным. Дискретное уравнение наблюдений имеет вид

$$
\begin{gathered}
y(\tau_i) = y_i = g_i(x(\tau_i)) + w_i, \quad i = 1, \ldots, l, \\
w_i \in \mathscr{R}_i, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_l \leq t_1.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Ставится задача внешней аппроксимации информационного множества $\mathscr{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ системы (1) и уравнением наблюдения (2). Уравнение наблюдения в непрерывном случае выглядит следующим образом:

$$
y(t) = g(t, x) + w(t), \quad w(t) \in \mathscr{R}(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3}
$$

Для системы (1), (3) также ставится задача внешней аппроксимации информационного множества $\mathscr{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$.

Наконец, в задаче синтеза управлений рассматривается нелинейная система

$$
\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{4}
$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}^k$ — управление, стесненное “жестким ограничением” $u \in U$, где $U \in \mathrm{comp}\mathbb{R}^k$, $v \in Q \subseteq \mathbb{R}^l$ — неизвестное возмущение. Задача заключается в том, чтобы построить внутреннюю оценку $\mathcal{W}^-[t]$, также иногда называемую стабильным мостом (см., например, [10]), множества разрешимости и предъявить позиционную стратегию $u(t, x)$, которая для любого состояния системы $x(\tau) \in \mathcal{W}^-[\tau]$ и любой допустимой реализации помехи $v(t)$ приводит замкнутую систему в состояние $x(t_1) \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — целевое множество. Здесь используется указанная выше формализация позиционных дифференциальных игр, предложенная в работах Н.Н. Красовского и его сотрудников (см., например, [43]).

В разделе 1.2 приведен ряд теорем об аппроксимации множеств достижимости. Внешние и внутренние аппроксимации конструируются методами гамильтонова формализма с использованием таких понятий, как вязкостные субрешения и вязкостные суперрешения соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Сформулированные в этом разделе теоремы служат в последующих главах основными инструментами для получения конкретных вычислительных алгоритмов аппроксимации. В частности, теоремы 2 и 4 используются в дальнейшем для получения соответственно внешних и внутренних оценок множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0; \mathcal{X}^0)$, границы которых пересекаются с границей множества достижимости. В некоторых случаях удается получить достаточно богатое семейство таких оценок, что для множества достижимости оказывается справедливо представление

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \bigcup_{\xi} \mathcal{X}^-_{\xi}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$$

или, соответственно,

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \bigcap_{\xi} \mathcal{X}^+_{\xi}(t; t_0, \mathcal{X}^0).$$

Раздел 1.3 посвящен одному примеру аппроксимации множества достижимости для конкретной нелинейной системы, так называемого динамического уницикла, который описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= v \cos x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= v \sin x_5, \\ \dot{x}_5 &= \alpha u. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь u — управление, принимающая значения из отрезка $[-1, 1]$, а v и α — положительные константы. Теоремы 1 и 2 из предыдущего раздела используются здесь при построении эллипсоидальных оценок множества достижимости этой системы из эллипсоидального начального множества $\mathcal{X}^0$.

Наряду с алгоритмами аппроксимации для конкретных нелинейных систем, имеет смысл исследовать возможность построения однотипных оценок множеств достижимости для целых классов нелинейных управляемых систем. В диссертации рассматривается класс билинейных по состоянию и управлению систем, которые в общем виде могут быть записаны в следующем виде:

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{6}$$

$$A \in \mathscr{A}(t), \quad x(t_0) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^0. \tag{7}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — управление, $\mathscr{A}(t)$ — геометрическое ограничение на управление, $\boldsymbol{\mathcal{X}}^0$ — множество начальных состояний системы. Выбор этого класса обусловлен некоторыми его свойствами. В частности, в разделе 1.4 приведена теорема о глобальной билинеаризации, которая была доказана в работе [48]. Согласно этой теореме для достаточно широкого класса нелинейных систем существуют соответствующие билинейные системы, так называемые *билинейные реализации*. Билинейная реализация позволяет преобразовывать постановку задачи для нелинейной системы в постановку задачи для соответствующей билинейной системы.

В разделе 1.5 для сформулированных в начале главы задач производится преобразование постановок задач к их билинейным аналогам. Здесь обосновывается возможность решения исходной задачи путем решения соответствующей задачи для билинейных систем. При исследовании задач для билинейных систем оказывается важным понятие *звездного множества*. Множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется звездным с центром $\in \mathbb{R}^n$, если из условия $x \in A$ следует, что $c + \lambda(x - c) \in A$ для любого числа λ из отрезка $[0, 1]$. В задачах для билинейных систем имеет смысл в качестве множеств начальных состояний системы рассматривать звездные множества с центром в точке 0. Именно к таким множествам приводятся начальные множества из исходных постановок. В этом случае множества достижимости также являются звездными множествами с центром в нуле. Аналогичное утверждение оказывается справедливым и в задаче гарантированного оценивания. Необходимо заметить, что простые по форме оценки множеств достижимости или информационных множеств билинеаризованной системы могут переходить в соответствующие оценки для исходной системы, имеющие весьма сложную форму. Эта форма напрямую зависит от характера нелинейностей в правой части уравнений системы. Таким образом, получение оценок фиксированного вида с помощью приведенных в этом разделе схем билинеаризации, вообще говоря, затруднительно. Однако, данные схемы позволяют использовать одни и те же формулы вычисления оценок (полученные в следующих главах) для большого числа нелинейных систем.

Вторая глава посвящена задаче аппроксимации множеств достижимости для класса билинейных управляемых систем с геометрическим ограничением на управление. Предполагается, что начальное множество в рассматриваемой задаче является центрально симметричным и звездным относительно нуля.

В разделе 2.1 приведены постановки исследуемых в этой главе задач. Рассматриваются различные варианты геометрических ограничений на управление, а именно: ограничения в виде эллипсоидов или параллелепипедов в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$. В постановках задач используются начальные множества трех видов: множество уровня положительно однородной липшицевой функции, множество уровня квадратичной формы и объединение эллипсоидов. Формулируются три задачи аппроксимации множества достижимости билинейной системы (6), (7). В первой задаче необходимо получить внешние и внутренние аппроксимации множества достижимости в виде множеств уровня квадратичных форм. Во второй задаче производится поиск внешних и внутренних аппроксимаций в виде объединений эллипсоидов. Наконец, в третьей задаче требуется получить внутренние аппроксимации множества достижимости в виде множеств уровня следующих функций:

$$w(t,x) = \sigma(S^{-1}(t_0)S(t)x) + \gamma(t)\psi(S(t)x). \tag{8}$$

Здесь $\sigma(x)$ — липшицевая положительно однородная функция, которая задает начальное множество $\mathcal{X}^0$.

В разделе 2.2 производится построение оценок множества достижимости, которые представляют собой множества уровня квадратичных форм:

$$\mathcal{X}^+(t;t_0,\mathcal{X}^0) = \left\{x \,\middle|\, \left\langle x, K^+(t)x\right\rangle \le 1\right\},\ \mathcal{X}^-(t;t_0,\mathcal{X}^0) = \left\{x \,\middle|\, \left\langle x, K^-(t)x\right\rangle \le 1\right\}.$$

Это одна из простейших форм оценок, включающая в себя эллипсоиды и гиперболоиды. Из того условия, что квадратичная форма является вязкостным субрешением или суперрешением соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, выведены дифференциальные уравнения для матриц квадратичных форм. В этих уравнениях присутствуют параметры, выбор которых определяет конкретное субрешение или суперрешение соответственно.

Далее в разделе 2.3 исследуется более сложный класс оценок, так называемые кусочно-квадратичные оценки, которые представляют собой объединения конечного числа эллипсоидов. Такие оценки, наряду с параллелепипедами [51], являются одними из простейших примеров оценок, которые могут быть определены как множества уровня негладких функций. Уравнения параметров оценок из этого класса значительно сложнее, чем аналогичные уравнения для оценок из раздела 2.2. Объединение эллипсоидов $\cup_{i=1}^{m}\mathscr{E}_i$ может быть представлено как множество уровня следующей функции:

$$w(t,x) = \min_{1\le i\le m} \big\langle x, K_i(t)x \big\rangle.$$

Важно подчеркнуть, что отдельные квадратичные формы $\big\langle x, K_i(t)x \big\rangle$ сами могут не являться вязкостными суб- или суперрешениями. Это означает, что кусочно-квадратичные оценки представляют собой более богатый класс оценок, чем оценки в виде эллипсоидов. Данный пример оценок показывает, как можно из оценок более простого вида получать более сложные оценки. Однако, новые оценки описываются значительно более сложными уравнениями.

Наконец, в разделе 2.4 рассматривается весьма широкий класс внутренних оценок множеств достижимости вида (8), которые также строятся с помощью теорем сравнения. В отличие от оценок из других классов, построенных ранее в этой главе, эти оценки определяются как множества уровня некоторых положительно однородных функций довольно общего вида. Задача по построению суперрешений уравнения Гамильтона-Якоби в этом случае сводится к оценке константы Липшица некоторой функции. При этом сконструированные в этом параграфе семейства оценок позволяют аппроксимировать множество достижимости изнутри с произвольной точностью.

В разделе 2.5 представлено несколько примеров, иллюстрирующих предложенные в этой главе алгоритмы аппроксимации множеств достижимости.

Третья глава диссертации посвящена задаче гарантированного оценивания для билинейных систем, а также задаче синтеза управлений при неопределенности. Здесь алгоритмы аппроксимации, представленные в главе 2, используются для решения указанных задач.

В разделе 3.1 приведена постановка задачи гарантированного оценивания для билинейной система (6). Здесь множество $\mathcal{X}^0$ представляет собой неопределенность в начальном состоянии системы. Рассматриваются два варианта уравнения измерений, представляющие собой частные случаи уравнений (2) и (3). Дискретное уравнение измерений имеет вид

$$\begin{gathered} y(\tau_i) = y_i = G_i x(\tau_i) + w_i, \quad i = 1, \dots, l, \\ w_i \in \mathscr{R}_i, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l \le t_1. \end{gathered} \tag{9}$$

Предполагается, что множество $\mathscr{R}_i$ является эллипсоидом. По аналогии непрерывное уравнение измерений записывается следующим образом:

$$y(t) = G(t)x(t) + w(t), \quad w(t) \in \mathscr{R}(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{10}$$

Здесь множество $\mathscr{R}(t)$ также является эллипсоидом. Формулируется задача построения семейств внешних оценок информационных множеств $\mathscr{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ и $\mathscr{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$.

Раздел 3.2 посвящен решению задачи аппроксимации информационного множества $\mathscr{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ при дискретных измерениях. В этом параграфе алгоритмы внешней аппроксимации множеств достижимости, приведенные во второй главе, модифицируются таким образом, чтобы их можно было применить к рассматриваемой задаче гарантированного оценивания и получить соответствующие внешние оценки информационного множества.

В этой задаче множество $\mathscr{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ может иметь весьма сложную структуру. В частности, оно может состоять из нескольких компонент связности. Однако, применяя предложенный в главе 1 подход, эту задачу можно преобразовать в задачу со звездным информационным множеством, что позволяет использовать оценки той же формы, что и в главе 2.

Существуют различные подходы к решению задачи гарантированного оценивания с непрерывными измерениями, сформулированной в разделе 3.1. Один из таких подходов, как было указано выше, заключается в использовании понятия информационного состояния системы $V(t,x)$, которое связано с информационным множеством соотношением

$$\mathscr{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x \mid V(t,x) \le c\}$$

для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$. Информационное состояние может быть определено различными способами, что приводит к различным уравнениям или вариационным неравенствам типа Гамильтона-Якоби [32, 35, 33]. В разделе 3.3 применяется несколько иной подход, в котором уравнение измерений дискретизируется, что позволяет воспользоваться результатами предыдущего параграфа для решения задачи аппроксимации информационного множества при непрерывных измерениях. Основным результатом этого раздела является теорема 20, в которой утверждается, что рассматриваемую задачу гарантированного оценивания с непрерывными измерениями при некоторых дополнительных предположениях можно представить как последовательность задач с дискретными измерениями. При этом последовательность информационных множеств $\left\{\mathscr{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)\right\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к множеству $\mathscr{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$.

В разделе 3.4 приведен простой пример задачи гарантированного оценивания для двумерной билинейной системы, в которой информационное множество $\mathscr{X}^l(t; t_0, \mathcal{X}^0)$, как и построенные для него оценки $\mathscr{X}^{l,+}_{\xi}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ представляют собой несвязные множества. Эллипсоидальные оценки информационного множества и информационной трубки для этого примера изображены на рисунке 1.

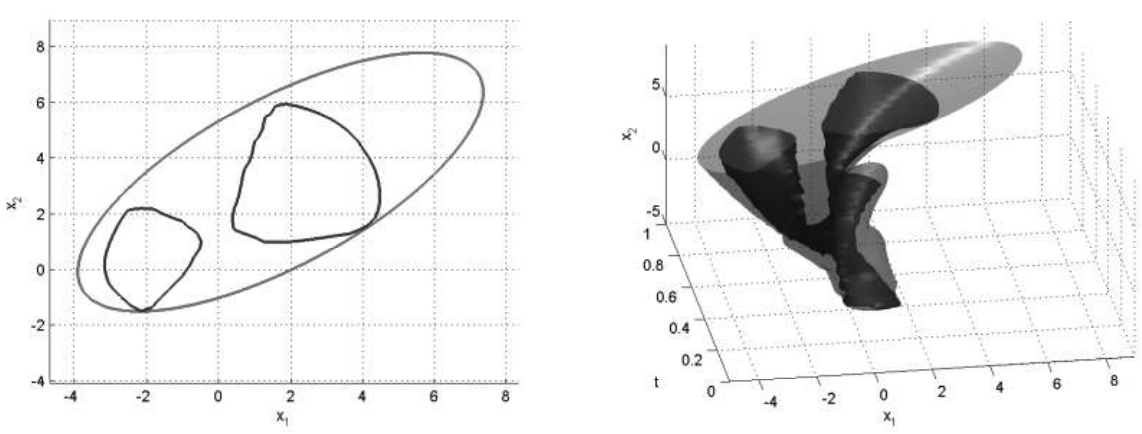

Рис. 1: Информационное множество и его внешняя оценка при $t = 1$ (слева). Информационная трубка и ее внешняя оценка (справа).

Далее в разделе 3.5 рассматривается пример задачи гарантированного оценивания для четырехмерной билинейной системы, называемой кинематическим уравнением для кватернионов (см., например, [52, 53])

$$\dot{q} = \frac{1}{2}A(\omega)q = \frac{1}{2}\left[\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3\right] q, \quad t \in [0, T], \tag{11}$$

в котором в качестве неизвестной помехи выступает вектор угловой скорости ω. Стохастическому аналогу этой задачи посвящена обширная литература (см., в частности, [52]). Для построенных оценок информационных множеств далее формулируется и решается задача их проецирования на координатные оси, что позволяет получить более грубые, но простые по форме, оценки.

Наконец, в разделе 3.6 исследуется задача синтеза управлений для билинейных систем при неопределенности, частный случай задачи из раздела 1.1 первой главы. Здесь рассматривается система вида

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + Bx, \quad t \in [t_0, t_1], \\ A(t) \in \mathscr{A}(t), \quad B(t) \in \mathscr{B}(t), \end{gathered} \tag{12}$$

в которой A — это помеха, а B — управление. Решение рассматриваемой задачи синтеза дается в виде стратегии, экстремальной к слабоинвариантным множествам $\mathscr{W}^-(t)$, которые строятся с помощью вязкостных суперрешений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса

$$V_t + \max_{A \in \mathscr{A}(t)} \big\langle V_x, Ax \big\rangle + \min_{B \in \mathscr{B}(t)} \big\langle V_x, Bx \big\rangle = 0.$$

В данном разделе мы ограничиваемся поиском кусочно-квадратичных суперрешений вида $w(t,x) = \min_s \big\langle x, K_s(t)x \big\rangle$. Алгоритм конструирования этих суперрешений строится с использованием формул оценивания соответствующих гамильтонианов, полученных во второй главе.

В соответствии с результатами первой главы к системам вида (12) благодаря процедуре билинеаризации можно отнести также класс линейных управляемых систем с неопределенностью в матрице системы

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax + B(t)u, \quad t \in [t_0, t_1], \\ A(t) \in \mathscr{A}(t), \quad u(t) \in \mathscr{E}(0, P(t)),\end{gathered} \tag{13}$$

которому посвящена обширная литература (см., в частности, [34, 50]). Решение задачи эллипосоидального синтеза для таких систем приведено в разделе 3.7.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построены семейства внешних и внутренних численных аппроксимаций множеств достижимости для билинейных систем.

2. Предложен алгоритм решения задач аппроксимации множеств достижимости, информационных множеств и задачи синтеза управлений для класса нелинейных глобально билинеаризуемых систем.

3. Построено семейство внешних численных аппроксимаций множества достижимости для системы уравнений динамического уницикла.

Изложенные в настоящей работе методы оценивания множеств достижимости и информационных множеств для билинейных и билинеаризуемых систем могут быть использованы при конструировании конкретных алгоритмов численного решения задач достижимости, гарантированного оценивания и синтеза управлений для указанного класса систем. Эти результаты могут быть также использованы в качестве составной части решения более сложных задач управления таких, как задача синтеза управлений при неполных измерениях. Дальнейшие исследования могут быть нацелены на уточнение построенных в настоящей работе аппроксимаций.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Борисовичу Куржанскому за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы. Также автор благодарит коллектив кафедры системного анализа, на которой он обучался сначала в качестве студента, а затем аспиранта.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-2692.2014.1).

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В. В. Синяков. О внешних и внутренних аппроксимациях множеств достижимости билинейных систем // *Доклады Академии Наук.* 2014, том 458, № 1, с. 27-31.

2. В. В. Синяков. Метод вычисления внешних и внутренних аппроксимаций множеств достижимости билинейных дифференциальных систем // *Дифференциальные уравнения.* 2015, том 51, № 8, с. 1101-1114.

Список литературы

[1] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation.* Birkhauser, 2014.

[2] Р. Беллман. *Динамическое программирование.* М.: ИЛ, 1960.

[3] С. Н. Кружков. Обобщенные решения нелинейных уравнений со многими независимыми переменными, 1 // *Математический сборник.* 1966, том 70, №3, с. 394-416.

[4] Н. В. Крылов. Управляемые процессы диффузионного типа. М., Наука, 1977.

[5] О. А. Олейник. Разрыные решения нелинейных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.* 1957, том 12, № 3, с. 3-73.

[6] W. H. Fleming. The Cauchy problem for a nonlinear first-order partial differential equation // *J. Differential Equations.* 1969. V. 5, N. 3, p. 515-536.

[7] M. G. Crandall, P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // *Transactions of American Mathematical Society.* 1983. V. 277. p. 1-41.

[8] M. G. Crandall, L. C. Evans, and P. L. Lions. Some properties of solutions of Hamilton-Jacobi equations // *Transactions of American Mathematical Society.* 1984. V. 282. N. 2. p. 487-502.

[9] А. И. Субботин. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби.* М.: Наука, 1991.

[10] А. И. Субботин. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[11] Н. Н. Субботина. Метод характеристик для уравнений Гамильтона—Якоби и его приложения в динамической оптимизации. *Современная математика и ее приложения.* Институт Кибернетики, Академия Наук Грузии, Тбилиси, 2004.

[12] Н. Н. Субботина, Т. Б. Токманцев. Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза. *Дифференциальные уравнения и топология. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина.* Тр. МИАН, 271, МАИК, М., 2010, 259–277.

[13] Х. Г. Гусейнов, А. Н. Моисеев, В. Н. Ушаков. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // *Прикл. математика и механика.* 1998, том 62, № 2, с. 179-187.

[14] А. М. Тарасьев. Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона—Якоби // *ПММ.* 1994, том 58, № 2, с. 22–36.

[15] А. М. Тарасьев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков. Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби // *Изв. РАН. Техн. Киберн.* 1994, № 3, с. 173–185.

[16] P. E. Souganidis. Approximation Schemes for Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // *J. Diff. Eqns.* 1989. V. 59, p. 1–43.

[17] Ф. П. Васильев. *Методы оптимизации.* М.: МЦНМО, 2011.

[18] A. B. Kurzhanski and I. Valyi. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control.* SCFA. Birkhauser, Boston, 1997.

[19] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I: External appoximations. Part II: Internal appoximations. Box-valued constraints // *Optim. Methods Software*, 17(2):177-237, 2002.

[20] F. L. Chernousko. *State Estimation for Dynamic Systems.* CRC Press, Boca Raton, 1994.

[21] F. C. Schweppe. Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs // *IEEE Trans. Aut. Cont.* AC-13, 1968.

[22] E. K. Kostousova. State Estimation for Dynamic Systems via Parallelotopes: Optimization and Parallel Computations // *Optim. Methods Software*, 9(4):269–306, 1998.

[23] E.K. Kostousova. On Tight Polyhedral Estimates for Reachable Sets of Linear Differential Systems // *AIP Conf. Proc.* 1493, p. 579-586, 2012.

[24] Т. Ф. Филиппова. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2010, том 16, № 1, с. 223–232.

[25] А. Б. Куржанский. Принцип сравнения для уравнения типа Гамильтона-Якоби в теории управления // *Труды Института Математики и Механики УРО РАН.* 2006, том 12, № 1, стр. 173-183.

[26] М. И. Гусев. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // *Труды ИММ УрО РАН.* 2009, том 15, № 4, с. 82–94.

[27] V. S. Patsko, S. G. Pyatko, and A. A. Fedotov. Three-dimensional Reachability Set for a Nonlinear Control System // *Journal of Computer And Syst. Sci. Intern.*, 42(3):320–328, 2003.

[28] И. В. Рублев. Множество достижимости трехмерной каскадной системы управления // *Дифференциальные уравнения.* 2006, том 42, № 12, стр. 1672-1679.

[29] А. Б. Куржанский. О двойственности задач оптимального управления и наблюдения // *Прикладная математика и механика.* 1970, том 34, № 3, с. 429-439.

[30] А. Б. Куржанский. Дифференциальные игры наблюдения // *Доклады АН СССР.* 1972, том 207, № 3, с. 527-530.

[31] А. Б. Куржанский. К теории позиционного наблюдения. Общие соотношения // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика.* 1973, № 5, с. 20-30.

[32] А. Б. Куржанский. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[33] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. A Comparison Principle for Equations of the Hamilton-Jacobi Type in Set-Membership Filtering // *Communications in Information and Systems.* 2006. V. 6, N. 3, p. 179-192.

[34] A. B. Kurzhanski, T. F. Filippova. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // *Advances in Nonlinear Dynamics and Control.* Ser. PSCT 17. Boston: Birkhauser. 1993. p. 122-188.

[35] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. On Some Nonstandard Dynamic Programming Problems of Control Theory // *Variational Methods and Applications.* N.Y.: Kluwer, 2004. p. 613-627.

[36] Н. Н. Красовский. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

[37] Н. Н. Красовский. *Игровые задачи о встрече движений.* М.: Наука, 1970.

[38] Н. Н. Красовский. Минимаксное поглощение в игре сближения // *ПММ.* 1971, том 35, № 6, с. 945-951.

[39] Н. Н. Красовский. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // *Математический сборник.* 1978, том 107(149), № 4(12), с. 541-571.

[40] Н. Н. Красовский. *Управление динамической системой.* М.: Наука, 1985.

[41] Н. Н. Красовский., А. И. Субботин. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

[42] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, В. Н. Ушаков. Минимаксная дифференциальная игра // *Доклады АН СССР.* 1972, том 206, № 2, с. 277-280.

[43] N. N. Krasovski and A. I. Subbotin. *Game-theoretical Control Problems.* Springer-Verlag, N.Y., Berlin, Heidelberg, 1988.

[44] A. J. Krener. Bilinear and Nonlinear Realisations of Input-Output Maps // *SIAM J. Control.* 1975. V. 13, N. 4, p. 827-834.

[45] R. W. Brockett. Volterra series and geometric control theory // *Automatica*, 12:167–176, 1976.

[46] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems: An Introduction.* Springer, 1985.

[47] R. R. Mohler. *Nonlinear Systems: v.II Application to Bilinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[48] P. M. Pardalos, V. Yatsenko. *Optimization and Control of Bilinear Systems*. Springer, 2008.

[49] D. L. Elliot. *Bilinear Control Systems*. Springer, 2009.

[50] С. С. Мазуренко. Дифференциальное уравнение на калибровочную функцию Минковского звездного множества достижимости дифференциального включения // *Доклады Академии Наук. Математика*. 2012, том 445, № 2, с. 139-142.

[51] E. K. Kostousova. On Polyhedral Estimates for Reachable Sets of Discrete-Time Systems with Bilinear Uncertainty // *Automation and Remote Control*, 2011, V. 72, N. 9, p. 1841-1851.

[52] l. Y. Bar-Itzhack, Y. Oshman. Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation // *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*. 1985. V. AES-21, N. 1. p. 128-136.

[53] Ю. Ф. Голубев. *Основы теоретической механики*. 2-е изд., М.: Изд-во МГУ, 2000.