Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Лапшин Виктор Александрович

Математические модели динамики срочной структуры процентных ставок, учитывающие качественные свойства рынка

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова на кафедре системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент, Смирнов Сергей Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, Хаметов Владимир Минирович
	доктор физико-математических наук, Кулешов Андрей Александрович
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Центральный экономико-математический институт РАН

Защита состоится 21 апреля в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «____» ____________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Захаров Евгений Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Срочная структура процентных ставок, задаваемая, например, при помощи бескупонной кривой доходностей, в развитых странах рассматривается как главный и наиболее информативный индикатор состояния финансового рынка, один из важнейших макроэкономических параметров и эталон для оценки ценных бумаг в других секторах рынка инструментов фиксированной доходности. В связи с этим особую важность имеет задача моделирования кривой доходностей и проблема её соответствия рыночным данным. Общепризнанной модели построения кривой бескупонной доходностей не существует [1], таким образом, разработка моделей срочной структуры процентных ставок является актуальной задачей.

Обычно используемые модели определяют либо всю кривую в один момент времени, работая с «моментальным снимком» рынка, либо временну́ю стохастическую динамику одной – двух точек кривой (обычно — её левого конца, который имеет особый экономический смысл). Тем не менее, в ряде работ [2, 3] показано, что ни одна из используемых на практике параметрических моделей кривой доходностей не может быть снабжена никакой стохастической динамикой при условии отсутствия арбитражных возможностей. В литературе был полностью описан класс параметрических «моделей моментального снимка», допускающих нетривиальную безарбитражную динамику своих параметров, причём этот класс оказался слишком бедным для использования на практике.

С другой стороны, модели, задающие стохастическую динамику левого конца кривой доходностей, называемого также краткосрочной (мгновенной) процентной ставкой, обычно неявно подразумевают нереалистичные формы кривой доходностей (например, с отрицательными или стремящимися к бесконечности процентными ставками).

Для преодоления этих ограничений актуальным и перспективным является использование непараметрических моделей, дающих достаточное количество степеней свободы как для удовлетворения условию отсутствия арбитражных возможностей, так и для обеспечения гибкого отражения сложных форм кривой доходностей, наблюдаемых на реальных финансовых данных. Кроме того, непараметрический подход снимает проблему, связанную с выбором конкретной параметризации, большинство решений которой основываются исключительно на соображениях удобства получения явных аналитических решений, а не на феноменологии предметной области.

Также актуальным является построение моделей, учитывающих такие свойства рынка, как низкая ликвидность и связанные с этим неполнота и недостоверность исходных данных. На развитых рынках в нормальных условиях подобные трудности либо не возникают вообще, либо имеют пренебрежимо малые эффекты. В свете последствий финансового кризиса, а также специфики рынка облигаций России, построение моделей, учитывающих особенности последнего, является актуальной задачей.

Цель диссертационной работы

В связи с вышеизложенным целью диссертационной работы является построение и исследование модели, сочетающей в себе достоинства и общность моделей стохастической динамики с разнообразием форм кривой доходностей в «моментальном снимке», а также учитывающей качественные свойства рынка, связанные с особенностями доступной на нём информации. В соответствии с целью исследования были поставлены следующие конкретные задачи:

- построение непараметрической модели стохастической динамики срочной структуры процентных ставок, учитывающей ликвидность рынка, т.е. работающей в условиях неполной и недостоверной информации, и пригодной для оценки кривой доходностей по «моментальному снимку» рынка.

- Разработка численных методов статистической оценки параметров модели по доступным рыночным данным.

- Демонстрация работоспособности метода и модели в целом путём разработки программного комплекса и проведения расчётов на реальных данных о торгах на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ).

Научная новизна

В работе получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

1. Предложен новый подход к построению непараметрических моделей стохастической динамики срочной структуры процентных ставок, сочетающих в себе достоинства динамических и статических подходов, а также обладающих другими свойствами, желательными для подобных моделей. В рамках этого подхода построены две конкретных модели, исследованы свойства указанных моделей при работе с «моментальным снимком» рынка.

2. Для построенных моделей разработан численный метод оценки параметров по информации о дневных результатах торгов или о внутридневном их ходе. Наблюдения не обязаны быть полными (информация о части бумаг может отсутствовать) и могут быть разделены временны́ми интервалами произвольной, не обязательно равной, длины. Разработанный метод позволяет оценить как собственно компоненты волатильности, так и их количество.

3. Впервые проведены расчёты на данных о ходе торгов на ММВБ как в относительно спокойный период, так и по мере развития кризиса. Получены новые результаты об эффективной размерности шума (многомерного броуновского движения), отвечающей статистике цен облигаций на рынке ММВБ за период в 2006–2008гг.

4. Получена модель, отражающая существующую практику оценки «коротких» денежных потоков (со сроком, меньшим периода начисления

процентов). Показано, что с точки зрения безарбитражной динамики следует оценивать эти потоки несколько другим образом.

Практическая значимость

В настоящей работе построена модель срочной структуры процентных ставок, которая может применяться в условиях низкой ликвидности рынка: при недостоверной и неполной информации о сделках и котировках, что даёт аналитикам для исследования и описания рынка удобный инструмент, ранее доступный лишь для высоколиквидных рынков с большим количеством облигаций. С теоретической точки зрения построенная модель является первой моделью стохастической динамики, подразумевающей разумные и гибкие мгновенные формы кривой доходностей и пригодной для оценки кривой доходностей по «моментальному снимку» рынка, а также удовлетворяющей принципу отсутствия арбитражных возможностей, что позволяет использовать модель для решения задачи ценообразования и хеджирования обусловленных обязательств по производным финансовым инструментам на процентную ставку.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Новый подход к построению непараметрических моделей стохастической динамики срочной структуры процентных ставок, сочетающих в себе достоинства динамических и статических подходов, а также обладающие другими свойствами, желательными для подобных моделей.

2. Две конкретных реализации вышеупомянутого метода – модели, частично допускающие аналитическое решение. Для этих моделей разработан численный метод оценки параметров по информации о дневных результатах торгов или о внутридневном их ходе. Наблюдения не обязаны быть полными (информация о части бумаг может отсутствовать) и мо-

гут быть разделены временны́ми интервалами произвольной, не обязательно равной, длины. Разработанный метод позволяет оценить как собственно компоненты волатильности, так и их количество.

3. Разработан трёхуровневый программный комплекс, включающий средства для:
   - оценки параметров используемых моделей;
   - оперативной калибровки параметров по поступающей информации;
   - расчётов по модели;
   - оперативных приближённых расчётов.

   Самая вычислительно ёмкая часть — оценка параметров — реализована с использованием технологий параллельного программирования для повышения быстродействия.

Апробация работы

Результаты работы (в том числе — применительно к предметной области) докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. На международной конференции Ломоносов-2006 (Москва, 2006г.)
2. На научной конференции Тихоновские чтения-2007 (Москва, 2007г.)
3. На международной конференции Международный опыт риск-менеджмента и особенности развивающихся рынков (Москва, 2008г.)
4. На международной конференции Ломоносов-2009 (Москва, 2009г.)
5. На заседании Европейской комиссии по облигациям (Париж, 2009г.)
6. На 52-й научной конференции МФТИ (Долгопрудный, 2009г.)
7. На научном семинаре «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» в ЦЭМИ РАН (Москва, 2009г.)

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них: 2

статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК [A1, A2], 2 статьи в сборниках статей [A3, A4], 3 тезиса докладов [A5, A6, A7] и 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ[A8].

Личный вклад автора

Все описанные результаты получены автором лично. Часть программы [A8], относящаяся к тематике настоящей работы, также написана автором.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из списка обозначений, введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Текст работы изложен на 183 страницах. Библиография включает 214 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения и описана структура диссертации.

В первой главе вводятся основные определения и обозначения, а также излагается современное состояние дел в области.

Функцией дисконтирования $d(x)$ называют стоимость бескупонной облигации с погашением через срок x. Из экономических соображений функция дисконтирования должна обладать следующими свойствами: $d(0) = 1$, $d(\cdot)$ — убывающая функция x, $\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$. Процентная ставка $r(x)$ связана с функцией дисконтирования посредством конвенции о начислении процентов: непрерывное начисление процентов подразумевает связь $d(x) = \exp(-r(x)x)$, а дискретное начисление процентов раз в δ лет подразумевает $d(x) = (1 + r(x)\delta)^{-\frac{x}{\delta}}$. Мгновенная форвардная процентная ставка на срок x — $f(x)$ — связана с процентной ставкой $r(\cdot)$ следующим соотношением $r(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. График функции $r(x)$ называют кривой доходностей, а говоря о «срочной структуре процентных ставок», имеют в виду любую из зависемостей $d(\cdot), r(\cdot), f(\cdot)$. Цена P облигации с выплатами F_s через промежутки времени τ_s, $s = 0, ..., n_s$, принимается равной сумме дисконтированных потоков платежей:

$$P = \sum_{s=0}^{n_s} F_s d(\tau_s). \tag{1}$$

Далее в первой главе приводится обзор по моделированию цен облигаций и процентных ставок с критическим анализом сложившихся к настоящему времени подходов. Динамические модели, то есть модели, описывающие стохастическую динамику цен акций, появились достаточно давно, однако использование этих моделей для описания динамики цен облигаций породило ряд трудностей, связанных с различной природой инструментов. В связи с этим начали появляться модели стохастической динамики процентных ставок. Эти модели, положившие начало целой плеяде так называемых моделей краткосрочной ставки (short rate models), предполагали, что краткосрочная (мгновенная) процентная ставка $r_t = r_t(0)$ имеет стохастическую динамику, описываемую диффузией $\mathrm{d}r_t = \mu(r_t, t)\,\mathrm{d}t + \sigma(r_t, t)\,\mathrm{d}\beta_t$, причём функции μ и σ подбираются так, чтобы получившееся стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) имело (полу-)аналитическое решение.

К сожалению, подобные модели обычно давали нереалистичные (отрицательные или стремящиеся к бесконечности) кривые доходностей, а также — в силу того, что кривая доходностей определена с малым количеством степеней свободы, — не были способны отразить произвольную текущую срочную структуру процентных ставок, наблюдаемую на рынке.

Второе поколение моделей явно включало нестационарность в динамику с целью увеличения количества степеней свободы. Например, функцию $\mu(r_t, t)$ можно выбрать в виде $\mu(r_t, t) = k(\theta(t) - r_t)$, где $\theta(t)$ — неизвестная функция, подлежащая определению путём калибровки к наблюдаемой срочной структуре процентных ставок.

Нестационарность и неустойчивость этих моделей вела к необходимости постоянной перекалибровки, порой влекущей — в силу неустойчивости — весьма значительные изменения параметров.

Параллельно с этим прослеживалась тенденция к увеличению размерности используемых моделей: использовались две, три, N фазовых переменных. Значительно возросшие сложность и требовательность к вычислительным ресурсам не позволили в должной мере улучшить качество моделей, от которых теперь требовалось отражение срочной структуры не только процентных ставок, но и их волатильностей, а также возможность раздельного движения ставок на разных сроках.

Принципиальный шаг вперёд был сделан Heath, Jarrow и Morton в работе [4]. В качестве фазовых переменных рассматриваются $f(t, t')$ — мгновенные форвардные ставки, действующие в момент t на дату t', $0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant T$ (континуум переменных). Предполагается, что динамика этих ставок определяется уравнениями

$$f(t, t') = f(0, t') + \int\limits_0^t \alpha(u, t', \omega)\,\mathrm{d}u + \sum_{s=1}^N \int\limits_0^t \sigma^s(u, t', \omega)\,\mathrm{d}\beta_u^s, \quad 0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant T,$$

где $f(0, t')$ — неслучайная начальная кривая мгновенных форвардных процентных ставок, а функции α, σ^s удовлетворяют обычным условиям измеримости и интегрируемости, необходимым для существования интегралов Ито. Там же было получено условие отсутствия арбитражных возможностей на таком рынке: должна существовать рыночная цена риска, случайная вектор-функция $\lambda = \{\lambda_s\}_{s=1,\ldots,N}$, такие, что

$$\alpha(t, t') = -\sum_{s=1}^N \sigma^s(t, t') \left(\lambda^s - \int_t^{t'} \sigma^s(t, u)\,\mathrm{d}u \right).$$

Этот класс моделей получил название «модели целой кривой доходностей». Позже этот подход был развит в работе [5], где была предложена параметризация $f_t(x) = f(t, t + x)$, позволяющая перейти от бесконечного числа одномерных стохастических дифференциальных уравнений к одному бесконечномерному. Эта модель была уже гораздо лучше, однако вполне традиционное предположение о логнормальной динамике форвардных процентных ставок вело к тому, что стоимость облигации уходила в 0 за конечное время с вероятностью 1. Кроме того, будучи более сложной, модель требовала бо́льших вычислительных ресурсов. Предлагались различные способы решения этой проблемы, однако перелом наступил лишь с появлением рыночных моделей.

Сначала вместо мгновенных процентных ставок были использованы номинальные годовые ставки, связанные с ними соотношением $1 + j(x) = e^{r(x)}$, а в работе [6] анализировалась удачная модель, основанная на эффективных ставках

$$1 + \delta f_{eff}(t, t', \delta) = \exp\left(\int_{t'-t}^{t'-t+\delta} f(t, u)\,\mathrm{d}u\right).$$

После этого появился целый ряд работ, основанных на тех или иных рыночных (отсюда и название класса моделей) ставках. Так, Brace, Gatarek, Musiela [7] и Musiela, Rutkowski [8] моделируют ставку LIBOR, Jamshidian [9] — котировки свопов, Musiela, Rutkowski [10] — форвардные цены облигаций. Модели построены таким образом, что распределение моделируемой рыночной ставки логнормально, что позволяет легко оценивать производные финансовые инструменты, причём в результате получаются формулы в стиле фундаментальной работы Black, Scholes [11], что оправдывает многолетнюю инженерную практику применения этих формул к оценке соответствующих инструментов.

К сожалению, эти модели исключают друг друга: если одна рыночная ставка логнормальна, то остальные не могут обладать этим свойством, так что для оценки разных инструментов нужно использовать разные модели. С другой стороны, в [12] показано, что отличие от логнормальности очень мало, в любом случае, слишком мало, чтобы порождать арбитражные возможности. Brace, Gatarek и Musiela показывают, что их модель эквивалентна подходу Heath, Jarrow, Morton с некоторым специальным выбором функций волатильности, в то время, как в остальных моделях мгновенные процентные ставки могут даже не существовать.

Большинство описанных выше методов предполагало, что текущая срочная структура процентных ставок нам дана извне. В реальности это не так: даны лишь цены облигаций или производных финансовых инструментов на процентную ставку, а зависимость $r(x)$ необходимо вывести из этих данных. Параллельно развивались методы определения срочной структуры процентных ставок по наблюдаемым ценам облигаций, «моментальному снимку» рынка (большей частью, инженерные). Дополнительная сложность, делающая задачу нетривиальной, заключается в том, что среднесрочные и долгосрочные облигации, торгуемые на рынке, как правило имеют купонные платежи, что заставляет использовать косвенные методы оценки.

Задача определения срочной структуры процентных ставок по ценам купонных облигаций обычно является недоопределённой, поэтому требуется регуляризация и/или априорные предположения об этой структуре. В зависимости от этих предположений можно выделить два подхода к решению этой задачи: параметрические (априори предполагающие некоторый параметрический вид кривой доходностей) и сплайновые (предполагающие, что истинная кривая доходностей удовлетворяет какому-нибудь экстремальному свойству, например, свойству максимальной гладкости, формализованному тем или иным образом, — в таком случае решение обычно имеет вид сплайна, что и дало название подходу).

Среди параметрических моделей особое распространение получили методы Nelson, Siegel [13] и Svensson [14], в то время как разнообразие непараметрических (сплайновых) методов гораздо больше.

К сожалению, использование методов «моментального снимка» при определении кривой процентных ставок для нужд динамических моделей целой кривой доходностей некорректно, если сделки по некоторым облигациям могут периодически отсутствовать, что демонстрируется на простом примере: исчезновение одной котировки на коротком конце может значительно изменить оценку кривой доходностей, даже если сама кривая не изменилась. Модификация же методов «моментального снимка» путём приписывания их параметрам стохастической динамики практически всегда влечёт появление арбитражных возможностей, что показано в работе [3].

Это показывает, что учёт природы и структуры реально наблюдаемых данных должен быть гораздо более тесно интегрирован в модель: так, было бы разумно ожидать, что метод «запомнит» вчерашнее значение цены облигации или вчерашнее значение кривой доходностей и очередная оценка не будет сильно отличаться от предыдущей в случае отсутствия цены .

Также существующие методы не учитывают качественных особенностей доступной информации: предполагается, что наблюдаются всегда истинные значения величин, притом без ошибок. В действительности же наблюдаемые цены облигаций отражают не только суммарную приведённую стоимость платежей, но также кредитное качество эмитента, премию за ликвидность и прочие факторы, которые можно интерпретировать как ошибку при наблюдениях. Кроме того, некоторые сделки проводятся на договорной основе или совершаются с целью манипулирования рынком; в этих случаях их цены определяются отнюдь не рыночными механизмами.

На основании проведённого обзора цель работы формулируется как построение модели стохастической динамики срочной структуры процентных ставок (модели целой кривой доходностей в приведённой выше классификации), которая, во-первых, не допускала бы арбитражных возможностей, во-вторых, давала бы реалистичные мгновенные формы кривых доходностей и была бы совместима с некоторым разумным статическим методом, а в-третьих, учитывала бы то, какая именно информация реально доступна (цены купонных облигаций), а также некоторые качественные особенности рынка: неполноту наблюдаемой информации и её возможную недостоверность.

Решение первой проблемы будет получено путём использования методологии Heath-Jarrow-Morton (HJM), в рамках которой известно необходимое и достаточное условие безарбитражности.

Решение второй проблемы будет достигнуто путём построения непараметрической (бесконечномерной) модели. Такая модель будет обладать достаточным количеством степеней свободы, чтобы одновременно удовлетворять критерию отсутствия арбитражных возможностей и давать достаточно богатое семейство мгновенных кривых доходностей.

И, наконец, решение третьей проблемы будет использовать байесовский подход к наблюдениям и понятие меры достоверности информации (credibility).

В первом параграфе второй главы приводятся необходимые факты из теории стохастических процессов и функционального анализа: основные определения и теоремы теории стохастического интегрирования СДУ в гильбертовых пространствах из [15], формулируются теорема Гирсанова, стохастическая теорема Фубини и формула Ито. Затем кратко пересказываются основные результаты работы [16], которые являются основой для дальнейшего изложения. Под бесконечномерным броуновским движением в работе понимается последовательность независимых одномерных броуновских движений, заданных на одном и том же вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$:

$$W = \{\beta^s\}_{s\in\mathbb{N}}.$$

Это соответствует цилиндрическому винеровскому процессу в терминологии [15].

Мягким решением (mild solution) уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$

$$\begin{cases} dX_t &= (DX_t + F(t, X_t))dt + \Sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t, \\ X_0 &= h_0, \end{cases}$$

где D — линейный (возможно, неограниченный) оператор $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, инфинитезимальный генератор полугруппы $S(t)$, $\Sigma(t, X)$ для каждого значения (t, X) — оператор Гильберта-Шмидта $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $F(t, X)$ — некоторая функция, называется такой $\mathcal{H}$-значный предсказуемый процесс, что

$$X_t = S(t)h_0 + \int\limits_0^t S(t-u)F(u, X_u)\,\mathrm{d}u + \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_0^t S(t-u)\sigma^s(u, X_u)\,\mathrm{d}\beta_u^s, \quad \mathbb{P} - \text{п.н.}, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Далее описываются технические требования к пространству $\mathcal{H}$, операторам D, Σ и функции F, чтобы указанное уравнение имело единственное мягкое решение. К сожалению, мягкое решение СДУ в гильбертовом пространстве не является полумартингалом, поэтому к нему неприменимо дифференциальное исчисление Ито, что затрудняет дальнейший анализ.

Бесконечномерное расширение модели HJM в работе [16] с учётом условия отсутствия арбитражных возможностей имеет вид

$$\begin{cases} \mathrm{d}f_t &= (Df_t + F_{HJM}(t, f_t))\,\mathrm{d}t + \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_t^s(t, f_t)\,\mathrm{d}\beta_t^{\mathbb{Q},s} \\ f_0 &= h_0, \end{cases}$$

где $F_{HJM}(t, \omega, h) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{S}\sigma^s(t, \omega, h)$, $(\mathcal{S}f)(x) = f(x)\int_0^x f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ и динамика записана в риск-нейтральной мере $\mathbb{Q}$.

Во втором и третьем параграфах второй главы описывается рассматриваемая модель. Для спецификации стохастической динамики в рамках выбранного подхода достаточно указать пространство $\mathcal{H}$, функцию Σ и рыночную цену риска (связь риск-нейтральной меры, в которой записано уравнение динамики в модели HJM, и объективной меры).

При построении модели уделяется особое внимание обоснованности и разумности делаемых предположений; при прочих равных выбирается максимально простой подход.

В качестве пространства $\mathcal{H}$ в работе выбрано пространство Соболева W_2^1, чтобы отразить экономическое соображение о гладкости кривой мгновенных форвардных процентных ставок. Известно [17, 18], что для экономически осмысленных постановок задачи существует предел $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Так как реальные данные заданы на конечном и вполне определённом отрезке $[0,\, T]$, мы, в отличие от подхода, предложенного в [16], предположим, что $f(x) = f(T)$ для $x > T$. Это означает, что де-факто мы будем работать с конечным горизонтом, так что эффективное пространство наших кривых — $W_2^1[0,\, T]$. Полугруппа сдвигов $S(t)$ будет действовать следующим образом: $(S(t)h)(x) = h((x+t) \wedge T)$, что весьма разумно с экономической точки зрения: есть все основания постулировать, что за горизонтом моделирования форвардные ставки постоянны. Далее доказывается, что так выбранное пространство отвечает требованиям теоремы существования и единственности мягкого решения СДУ.

Функция волатильности $\Sigma(t, X) = \{\tilde{\sigma}^s(t, X)\}_{s\in\mathbb{N}}$ берётся локально линейной: $\sigma^s(t, h)(x) = \sigma^s(x)h(x)$, а рыночная цена риска по каждому из случайных факторов предполагается постоянной и равной $\{\gamma^s\}_{s\in\mathbb{N}}$.

Таким образом, динамика мгновенной форвардной процентной ставки в реальной мере $\mathbb{P}$ описывается следующим уравнением:

$$\begin{cases} \mathrm{d}f_t &= \left(Df_t + \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{S}(\sigma^s f_t) - \sum_{s=1}^{\infty} \gamma^s \sigma^s f_t\right) \mathrm{d}t + \sum_{s=1}^{\infty} \sigma^s f_t \,\mathrm{d}\beta_t^s \\ f_0 &= f_0. \end{cases}$$

Далее описывается формализация наблюдений, т.е. того, как модель «усваивает» поток новой информации. Предполагается, что наблюдения (сделки) происходят в известные (неслучайные) моменты времени t_i. Информация, заключённая в наблюдении, состоит из:

- цен облигаций P_k^i, $k = 1, ..., n_k^i$;
- котировок спроса и предложения на них b_k^i, a_k^i, $k = 1, ..., n_k^i$;
- статической информации об облигациях, т.е. о расписании τ_s^i, $s = 0, ..., n_s^i$ и объёмах $F_{s,k}^i$, $s = 0, ..., n_s^i$, $k = 1, ..., n_k^i$ платежей.

В этих предположениях уравнение ценообразования облигаций будет выглядеть так:

$$P_k^i = \sum_{s=0}^{n} F_{s,k}^i \exp\left[-\int_0^{\tau_s^i} f_{t_i}(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

Предполагается, что достоверность информации, содержащейся в наблюдаемых рыночных данных, ставится под сомнение. Степень достоверности (credibility) этой информации может зависеть от различных факторов:

- от разницы котировок спроса и предложения (т.н. bid-ask спрэду) — обратно пропорционально;
- от объёма сделки/котировки — нелинейная зависимость: тем достовернее, чем ближе к среднему объёму, характерному для рынка;
- от любых других параметров.

Чтобы учесть это в модели, предполагается, что величины P_k наблюдаются с нормально распределённым шумом $\epsilon_k \sim N(0, \delta_k^2)$. Такой подход соответствует логической интерпретации вероятности: вероятность — степень достоверности утверждения.

Ещё одно предположение относительно наблюдений заключается в том, что кривые доходностей, используемые участниками рынка для расчёта цены сделки, являются достаточно гладкими. Подобно статистической механике, предполагается, что правдоподобность того, что восприятие рынком сделки приведёт к кривой h, будет пропорциональна $e^{-\alpha E(h)}$, где $E(h)$ - некоторая мера негладкости кривой h. Если предположить, что у участников рынка есть среднее мнение относительно того, насколько гладкой должна быть форвардная кривая, то наше предположение соответствует распределению негладкости с максимальной энтропией при фиксированном среднем значении α^{-1}. Функционал $E(h)$ может быть выбран произвольным образом, чтобы отразить наше представление о желаемой кривой доходностей. Удобно выбрать в качестве меры негладкости величину $E(h) = \|(\sqrt{h})'\|_{L_2}^2$, чтобы получить ключевое совпадение в дальнейшем, однако возможны любые другие формализации негладкости.

Условное распределение наблюдаемой цены P_k при известной кривой мгновенных форвардных ставок $f(\cdot)$ будет равно

$$P_k \sim N\left(\sum_{s=0}^{n} F_{s,k} \exp\left[-\int\limits_0^{\tau_s} f(x)\,\mathrm{d}x\right], \quad a_k - b_k\right),$$

где a_k, b_k — соответственно котируемые цены продавца и покупателя k-ой облигации. Таким образом, наблюдение формализуется в терминах функции правдоподобия следующим образом:

$$-\ln \frac{\mathrm{d}P_{f_{t_i}}}{\mathrm{d}P_{f_{t_i-0}}} \propto \sum_{k=1}^{N} w_k \left(\sum_{s=0}^{n} F_{s,k} \exp\left[-\int\limits_0^{\tau_s} f_{t_i}(x)\,\mathrm{d}x\right] - P_k\right)^2 + +\alpha \int\limits_0^{T} \left[(\sqrt{f_{t_i}}(x))'\right]^2 \mathrm{d}x,$$

где $w_k = (a_k - b_k)^{-1}$. Единственный параметр, подлежащий заданию, — α, мера желаемой гладкости кривой, некоторый аналог температуры в приведённой выше интерпретации в терминах статистической физики. Мы будем считать его заданным извне, например, пользователем системы, но можно оценить его и на основании статистических данных.

Это предположение, по сути, является регуляризацией по Тихонову некорректно поставленной задачи оценки бесконечномерной сущности (кривой доходностей) по конечномерным наблюдениям, где регуляризатором является слагаемое $\alpha \int_0^T \left[(\sqrt{f_{t_i}}(x))'\right]^2 \mathrm{d}x$, а α — параметр регуляризации.

Для реализации практического метода оценки кривой доходностей и параметров её динамики проводится следующая часть регуляризации с использованием кратномасштабного анализа: в пространстве $\mathcal{H}$ вводится вейвлет-базис, а регуляризация состоит в откидывании детализации и рассмотрении только аппроксимации заранее выбранного порядка (этот порядок и есть параметр регуляризации). Таким образом, рассматриваются только достаточно гладкие функции, где желаемая степень гладкости определяется конкретным выбором вейвлета и порядком аппроксимации, после чего все выражения для динамики плотностей вероятности переписываются в выбранном базисе.

Путём замены переменных уравнение динамики сводится к почти линейному: с постоянным коэффициентом диффузии. Различные численные методы позволяют либо работать с нелинейным коэффициентом сноса, либо линеаризовать его с контролируемой погрешностью.

Оценка кривой доходностей по наблюдениям производится методом максимального правдоподобия — путём максимизации функции правдоподобия, однако для случаев, когда важно быстродействие, приводится приближённый алгоритм, являющийся вариацией фильтра Калмана.

Далее в этом же параграфе описывается аналогичная рыночная модель, основанная на дискретно начисляемой раз в δ форвардной процентной ставке $L_t(x)$: $1 + \delta L_t(x) = \exp\left(\int_x^{x+\delta} f_t(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$. Её фундаментальное отличие от известных рыночных моделей — в подходе к оценке облигаций со сроком до погашения, меньшим δ. Ранее динамика цен таких облигаций предполагалась детерминированной, несмотря на нереальность этого предположения. Предлагаемая модель учитывает сложившуюся практику оценки рынком таких коротких облигаций, однако побочным эффектом является потеря свойства безарбитражности. Показано, что арбитражные возможности возникают исключительно из-за некорректности сложившейся практики оценки коротких облигаций и предъявляется выражение для справедливой стоимости облигации, подразумеваемое этой некорректной практикой, то есть показано, что рынок, так оценивающий короткие облигации, на самом деле, подразумевает цену облигации, равную

$$P = \exp\left(-\int_0^{t'-t}\left[f_t(x) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{s=1}^{\infty}\theta^s(\min(x,\delta))^2\right]\,\mathrm{d}x\right),$$

где $\theta^s(x) = \int_0^x \sigma^s(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, то есть показывается, что при такой оценке коротких облигаций именно эта величина, будучи дисконтированной, является мартингалом.

В четвёртом параграфе второй главы описывается численный метод оценки параметров обеих моделей (между ними нет различий, существенных для этого этапа). Оценка параметров столь сложных нелинейных и существенно многомерных моделей не описана в литературе, поэтому сначала приводится краткий обзор различных общих методов, используемых для оценки параметров стохастических дифференциальных уравнений, затем мотивируется выбор конкретного метода, после этого описывается применение выбранного метода — метода Монте-Карло для марковских цепей (Markov Chain Monte-Carlo) — к построенным моделям, кратко описывается применение предварительных и параллельных вычислений для ускорения расчётов.

В пятом параграфе второй главы доказывается, что при выполнении некоторых естественных условий и ряда технических ограничений юпостроенная оценка является состоятельной. Доказывается состоятельность при стремлении количества облигаций, наблюдаемых за один раз, к бесконечности, а промежутка времени между наблюдениями — к нулю. Также показано, что при стремлении модели размерности к бесконечности оценка стремится к истинным бесконечномерным значениям соответствующих параметров.

В первом параграфе третьей главы рассмотрены некоторые частные вопросы, самым важным из которых является модель «моментального снимка», к которой сводится рассматриваемая динамическая модель при условии, что доступно лишь одно наблюдение: цены нескольких облигаций в один единственный момент времени («моментальный снимок» рынка). Если предположить некоторое специальное несобственное априорное распределение (распределение с максимальной энтропией) для кривой форвардных ставок, то условная функция правдоподобия будет определяться выражением

$$-\ln L(f) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_k} w_k \left(\sum_{s=0}^{n_s} F_{s,k} \exp\left[-\int_0^{\tau_s} f(x)\,\mathrm{d}x\right] - P_k\right)^2 + \alpha\int_0^T \left(\left(\sqrt{f(x)}\right)'\right)^2 \mathrm{d}x \to \min .$$

Благодаря специальному выбору функционала негладкости, это выражение с точностью до постоянного множителя совпадает с полученным из других соображений функционалом, минимизацией которого был получен непараметрический метод оценки кривой доходностей в [19] и [A3].

Далее приводится решение вышеуказанной задачи путём сведения её к задаче оптимального управления и применения принципа максимума Понтрягина.

Во втором параграфе третьей главы введено понятие полосы разрешимости (feasibility band), впервые введённое в [19]. Если для каждой бумаги из n_k вместо цены указана котировка спроса b_k и предложения a_k, $k = 1, ..., n_k$, то систему уравнений ценообразования (уравнение (1) для каждой бумаги) можно будет переписать в виде системы двойных неравенств:

$$b_k \leqslant \sum_{s=0}^{n_s} F_s d(\tau_s) \leqslant a_k.$$

Вкупе со свойствами функции дисконтирования, получаем следующую систему, описывающую множество допустимых значений $d(x)$.

$$\begin{cases} b_k & \leq & \sum_{s=0}^{n_s} F_{s,k} d(\tau_s) & \leq & a_k \\ d(0) & = & 1, \qquad d(t) & > & 0 \\ d(t) & & \text{не возрастает.} & & \end{cases}$$

В предыдущей системе положим $d_s = d(\tau_s)$, $s = 1, ..., n_s$. Для определения границ множества, в котором будут лежать решения $d_1, ..., d_{n_s}$ этой системы, решим $2n_s$ задач линейного программирования:

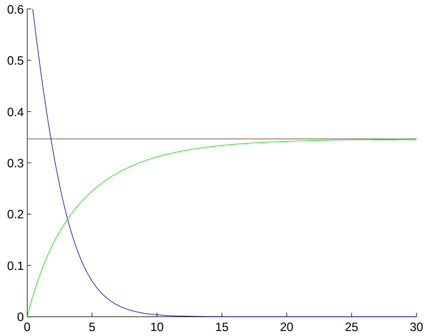
$$\begin{cases} d_s & \to & \min, \max \\ b_k & \leq & \sum_{s=0}^{n_s} F_{s,k} d_s \quad \leq \ a_k,\ k = 1, ..., n_k, \\ d_0 & = & 1, \\ d_s & > & 0,\ i = 1, ..., n_s \\ d_{s-1} & \geq & d_s \end{cases}, \quad s = 1, ..., n_s. \tag{2}$$

Здесь для значения $d(\tau_s)$ в каждый момент τ_s мы находим теоретически максимальное значение. Таким же образом можно найти и минимально возможное значение. Разумеется, это не означает, что кривая $d(t)$ может проходить где угодно внутри полученного коридора, который и называют полосой разрешимости для функции дисконтирования. Если же зафиксировать конвенцию связи между значением функции дисконтирования к какому-либо сроку и соответствующей процентной ставкой, получим полосу разрешимости для процентных ставок. Эта оценка, вообще говоря, довольно груба, однако и приведённые ограничения могут оказаться слишком сильными, в таком случае говорят, что полоса разрешимости пуста.

Далее описаны причины, которые могу вызвать пустоту полосы разрешимости, т.е. несовместность системы (2), и поставлена задача поиска минимального количества бумаг, которые необходимо исключить из выборки, чтобы система стала совместной. Кратко описываются известные результаты по схожей задаче поиска максимальной совместной подсистемы, после чего доказывается NP-эквивалентность задачи в нашей постановке. Затем в этом же параграфе приводятся два приближённых жадных алгоритма для решения этой задачи.

В четвёртой главе приведены описания численных экспериментов, проведённых как на модельных, так и на реальных исторических данных о ходе торгов на бирже ММВБ за 3 периода: 10 января — 14 апреля 2006 года (200 измерений), спокойный рынок; 1 августа — 28 сентября 2007 года (132 измерения), самое начало кризиса; и 26 сентября — 30 декабря 2008 года (200 измерений), разгар кризиса. На модельных данных наблюдается хорошая идентификация параметров модели (см. рис. 1), а на реальных данных результаты разумны, экономически интерпретируемы и превосходят по качеству существующий аналог («G-кривую», собственную разработку ММВБ для решения этой же задачи). Кроме того, на спокойном рынке данные не позволяют отвергнуть гипотезу о том, что наблюдаемые цены были порождены рассматриваемой моделью.

В заключении подведён краткий итог изложению, очерчено место диссертационной работы в контексте текущего развития моделирования срочной структуры процентных ставок, перечислены направления, представляющие-



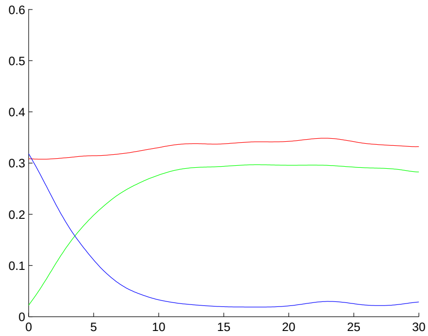


Рис. 1. Модельные (слева) и оценённые (справа) параметры σ^s.

ся перспективными для дальнейших изысканий, приведены основные результаты работы, выносимые на защиту.

Цитированная литература

[1] *А. Балабушкин, Г. Гамбаров, И. Шевчук.* Оценка срочной структуры процентных ставок // *Рынок ценных бумаг.* — 2004. — № 11. — С. 44–52.

[2] *D. Filipović.* Exponential-Polynomial Families and the Term Structure of Interest Rates // *Bernoulli.* — 2000. — Vol. 6, no. 6. — Pp. 1081–1107.

[3] *T. Björk, L. Svensson.* On the existence of finite-dimensional realizations for nonlinear forward rate models // *Mathematical Finance.* — 2001. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 205–243.

[4] *D. Heath, R. Jarrow, A. Morton.* Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation // *Econometrica.* — 1992. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 77–105.

[5] *A. Brace, M. Musiela.* A multifactor Gauss Markov implementation of Heath, Jarrow, and Morton // *Mathematical Finance.* — 1994. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 259–283.

[6] *K.R. Miltersen, K. Sandmann, D. Sondermann.* Closed Form Solutions for

Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates // *The Journal of Finance.* — 1997. — Vol. 52, no. 1. — Pp. 409–430.

[7] *A. Brace, D. Gatarek, M. Musiela.* The market model of interest rate dynamics // *Mathematical finance.* — 1997. — Vol. 7, no. 2. — Pp. 127–155.

[8] *M. Musiela, M. Rutkowski.* Continuous-time term structure models: Forward measure approach // *Finance and Stochastics.* — 1997. — Vol. 1, no. 4. — Pp. 261–291.

[9] *F. Jamshidian.* Libor and swap market models and measures // *Finance and Stochastics.* — 1997. — Vol. 1, no. 4. — Pp. 293–330.

[10] *M. Rutkowski, M. Musiela.* Martingale methods in financial modeling. — Springer New York, 1997.

[11] *F. Black, M. Scholes.* The pricing of options and corporate liabilities // *Journal of political economy.* — 1973. — Vol. 81, no. 3. — Pp. 637–654.

[12] *R. Rebonato.* Interest Rate Option Models, 2nd edition. — Wiley, 1998.

[13] *C.R. Nelson, A.F. Siegel.* Parsimonious modeling of yield curves // *Journal of business.* — 1987. — Vol. 60, no. 4. — Pp. 473–489.

[14] *L.E.O. Svensson.* Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992 - 1994: Working Paper 4871: National Bureau of Economic Research, 1994. — September. `http://www.nber.org/papers/w4871`.

[15] *G. Da Prato, J. Zabczyk.* Stochastic equations in infinite dimensions. — Cambridge University Press, 1992.

[16] *D. Filipović.* Consistency problems for Heath-Jarrow-Morton interest rate models. — Springer, 2001.

[17] *P.H. Dybvig, J.E. Ingersoll Jr, S.A. Ross.* Long Forward and Zero-Coupon Rates Can Never Fall // *The Journal of Business.* — 1996. — Vol. 69, no. 1. — Pp. 1–25.

[18] *M. Livingston, S. Jain.* Flattening of Bond Yield Curves for Long Maturities // *Journal of Finance.* — 1982. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 157–167.

[19] *S.N. Smirnov, A.V. Zakharov.* A Liquidity-Based Robust Spline Fitting of Spot Yield Curve Providing Positive Forward Rates: Tech. rep.: European Bond Commission Working Paper, 2003.

Список публикаций

[A1] *В.А. Лапшин.* Определение срочной структуры процентных ставок // *Вестн. моск. ун-та . Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика.* — 2009. — № 4. — С. 37–43.

[A2] *В.А. Лапшин.* Непараметрическая модель стохастической динамики процентных ставок // *Вестн. РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика.* — 2009. — № 4. — С. 25–37.

[A3] *В.А. Лапшин.* О задачах, связанных с определением срочной структуры процентных ставок // Вестник молодых ученых “Ломоносов”. — М.: Макс-пресс, 2006. — Т. 3. — С. 66–71.

[A4] *В.А. Лапшин.* Построение бескупонной кривой доходности // Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ. — М.: Изд. отд. ф-та ВМиК МГУ, 2006. — Т. 3. — С. 92–98.

[A5] *В.А. Лапшин.* Об определении временной структуры процентных ставок // Материалы XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”. — М.: Изд. отд. ф-та ВМиК МГУ, 2006. — С. 33–34.

[A6] *В.А. Лапшин.* Непараметрическая модель динамики срочной структуры процентных ставок // Материалы XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”. — М.: Изд. отд. ф-та ВМиК МГУ, 2009. — С. 46.

[A7] *В.А. Лапшин.* Построение практической непараметрической модели динамики срочной структуры процентных ставок // Труды 52-й научной конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”. — Т. 1. — М.: МФТИ, 2009. — С. 43–45.

[A8] *С.Н. Смирнов, А.В. Косьяненко, В.А. Лапшин.* Программный комплекс построения бескупонных кривых доходности по группе облигаций различного кредитного качества // *Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2007614749 от 17.11.2007 г.*