МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Трусов Николай Всеволодович

Математическое моделирование динамики поведения экономических агентов

Специальность 1.2.2.
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена на кафедре системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель	—	**Шананин Александр Алексеевич**, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты	—	**Кабанихин Сергей Игоревич**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор. Директор международного математического центра Института математики им. С.Л. Соболева сибирского отделения российской академии наук.
		Розанова Ольга Сергеевна, доктор физико-математических наук, профессор. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, кафедра дифференциальных уравнений механико-математического факультета.
		Братусь Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор. Российский университет транспорта (МИИТ), кафедра цифровых технологий управления транспортными процессами.

Защита диссертации состоится «12» декабря 2024г в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г.Москва, ул. Ленинские горы, д.1, стр.52, факультет ВМК, ауд.685.

E-mail: ds@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ им. М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д.27) и на портале:
https://dissovet.msu.ru/dissertation/3215

Автореферат разослан «__» __________ 2024г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук — А.В. Ильин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Разработка экономико-математических моделей для среднесрочного анализа основывается на принципах рациональности поведения экономических агентов. В отличие от физических процессов, где частицы подчиняются известным законам, экономические агенты принимают самостоятельные решения, что приводит к задачам управления их поведением. Такие задачи чаще всего возникают при моделировании поведения агентов на рынках. Диссертационная работа посвящена математическому моделированию экономических процессов в отечественной экономике, где ключевую роль играет население. Население является агентом, поведение которого необходимо моделировать в условиях глобальных структурных изменений.

Математические модели поведения населения являются составной частью вычислимых моделей экономического равновесия, используемых для среднесрочного анализа экономических процессов. С учетом специфики отечественной экономики такие модели активно развиваются на протяжении последних 40 лет научной школой академика А.А. Петрова.

Рациональное экономическое поведение населения можно разделить на процессы в соответствии с несколькими ролями, выполняемые в экономике. В диссертационной работе рассматривается экономическое поведение населения на различных рынках. Население в роли домашнего хозяйства является потребителем товаров и услуг, оперирующим в соответствии со своими предпочтениями на рынке кредитов и сбережений. Другими ролями населения, рассматриваемые в диссертационной работе, являются роль субъекта на рынке труда, изменяющего свои профессионально-квалификационные характеристики с целью увеличения заработной платы, роль участника фондовых рынков, оперирующего финансовыми инструментами для извлечения прибыли.

Основополагающей работой математического моделирования экономического поведения домашних хозяйств является работа Ф. Рамсея[1], в которой исследуется поведение рационального репрезентативного экономического агента в условиях совершенного рынка кредитов и депозитов. Исследование экономического поведения рационального репрезентативного домашнего хозяйства на несовершенном рынке кредитов и депозитов мотивировано обстоятельствами российской экономики и занимает важное место в диссертационной работе. Так, на протяжении более десяти лет, отношение процентных ставок по потребительскому кредиту к депозитам варьировалось в диапазоне от 2.5 до 3.5. Проблема задолженности населения по потребительскому кредиту является актуальной. К апрелю 2024г задолженность населения по потребительскому кредиту превысила 16 трлн.руб., что составляет около 10% ВВП. С одной стороны, рост спроса на потребительский кредит отражает формирование «среднего слоя»: домашние хозяйства управляют динамикой своих расходов и соизмеряют свой спрос с величиной процентной ставки по кредиту. С другой стороны, потребительский кредит в России являлся механизмом социальной адаптации: практически каждый третий заемщик является низкодоходным, предъявляющим спрос на кредит в сложных жизненных обстоятельствах. В новых реалиях данный механизм находится под угрозой исчезновения: высокая ключевая ставка центрального банка влечет высокие процентные ставки по потребительскому кредиту, что может приводить к формированию закредитованности населения и образованию финансовой пирамиды. Изучение формирования процентных ставок коммерческими банками по потребительским кредитам является новой задачей в условиях сложившейся экономической ситуации. Моделирование взаимодействия на рынке потребительского кредита коммерческих банков и домашних хозяйств основано на концепции равновесия по Штакельбергу. Коммерческие банки, оценив зависимость спроса на потребительский кредит от процентной ставки, устанавливают процент по потребительскому кредиту на уровне, который максимизирует их прибыль.

В современной экономике России происходят структурные изменения, связанные с переходом от приоритетного развития капиталоемких отраслей к трудоемким отраслям. Эти изменения вызывают изменения в фондах оплаты труда на отраслевом уровне. Увеличение

[1] Ramsey F.P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. Vol.152. No.38. P.543-559.

фонда оплаты труда открывает две альтернативы. Первая альтернатива заключается в повышении заработной платы работникам отрасли за прежнюю работу в результате конкуренции предприятий на рынке труда. Вторая альтернатива состоит в развитии человеческого капитала работников, которая позволит повысить производительность труда. В диссертационной работе построена и исследована модель рационального репрезентативного работника на рынке труда, который распределяет свои ресурсы между потреблением и повышением своих компетенций.

В условиях нестабильной рыночной ситуации актуальны модели, которые позволяют следить за групповым поведением домашних хозяйств. Исследование группового поведения домашних хозяйств позволяет более качественно отслеживать экономическую динамику. В настоящее время актуальны модели группового поведения экономических агентов на основе концепции игр среднего поля. Математические модели такого рода начали обсуждаться в начале XXI века. Их основоположниками являются Ж.-М. Ласри, П.-Л. Лионс, а также М. Хуанг, П. Каинс, Р.П. Маламэ. С математической точки зрения такие модели представляют систему из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое описывает выбор стратегии поведения агентов, и уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает динамику состояния системы. В случае, например, наличия подражательного поведения экономических агентов (выбора индивидуальной стратегии в зависимости от принятия решений остальных агентов), данная система уравнений является связанной. Условия на функцию распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве из уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка задаются в начальный момент временного интервала, а на функцию цены из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана задаются в конечный момент временного интервала. Такая постановка задачи порождает новые проблемы, связанные с корректностью по Адамару и численными методами решения. В настоящее время существование и единственность решения в такой системе уравнений в частных производных до сих пор является открытым вопросом. Доказано существование решения системы уравнений в частных производных лишь в частных случаях. Разработка численных методов решения задач группового поведения на основе концепции игр среднего поля является актуальной темой, имеющей практическое значение для приложений в различных областях математического моделирования.

Учитывая вышесказанное, актуальной задачей является исследование математических моделей экономического поведения населения, позволяющих проводить среднесрочный анализ, изучать подходы к анализу экономических проблем.

Цель работы. Целью настоящей работы является создание набора математических моделей экономического поведения населения, использование которых позволяет проводить среднесрочный анализ экономических проблем.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **Задачи.**

1. Исследование математического описания экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства на несовершенном рынке потребительского кредита. Построение в форме синтеза решения задачи оптимального управления для модифицированной модели рамсеевского типа.

2. Моделирование взаимодействия на рынке потребительского кредита репрезентативного коммерческого банка и домашних хозяйств.

3. Разработка программного комплекса для идентификации различных социальных слоев населения по данным российской статистики на рынке потребительского кредита. Построение сценарных прогнозов.

4. Моделирование экономического поведения рационального агента как субъекта на рынке труда. Численное построение синтеза задачи оптимального управления. Апробация модели экономического поведения агентов на рынке труда по данным российской статистики.

5. Исследование математического описания группового поведения населения в ролях домашних хозяйств на рынке потребительского кредита, субъектов на рынке труда. Идентификация группового поведения домашних хозяйств на рынке потребительского кредита по данным российской статистики.

6. Исследование математического описания группового поведения населения в роли высокочастотных трейдеров на фондовом рынке. Идентификация группового поведения высокочастотных трейдеров для анализа кризиса на фондовом рынке Китая в 2015г.

Методы исследования. Методологической основой исследования диссертационной работы являются методы динамического программирования и оптимального управления, принцип максимума для задач оптимального управления с негладкой правой частью дифференциального уравнения на фазовые переменные, принцип максимума для задач с бесконечным временным горизонтом, качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы решения дифференциальных уравнений.

Научная новизна.

1. В работе предложено исследование спроса на потребительский кредит в условиях несовершенного рынка для модифицированной модели рамсеевского типа. Модель формализована в виде задачи оптимального управления на конечном временном горизонте и имеет ряд особенностей: негладкость правой части дифференциального уравнения на фазовую переменную, некомпактность управления. С помощью теоремы Комлоша[1] доказана теорема о существовании решения. Получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка[2]. Построен синтез оптимального управления на бесконечном временном горизонте, допускающий особые режимы.

2. Разработана и исследована новая модель формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков. Коммерческие банки оценивают риски дефолта заемщиков. По формуле Фейнмана–Каца учет рисков невозврата потребительского кредита сводится к решению краевой задачи для уравнения с частными производными. Установив связь с уравнением Абеля, удается свести решение краевой задачи к задаче Коши для уравнения теплопроводности с внешним источником и получить оценку рисков в аналитической форме. Модели экономического поведения домашних хозяйств на рынке потребительского кредита и поведения коммерческих банков идентифицированы по данным российской статистики.

3. Разработан специализированный программный комплекс для анализа спроса на потребительский кредит. С его помощью проанализированы проблемы рынка потребительского кредитования в России.

4. Разработана и исследована модель поведения репрезентативного работника на рынке труда в виде задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте. Доказана теорема о существовании решения, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Модель идентифицирована по данным российской статистики в различных социальных слоях населения.

[1] Komlos J. A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1967, Vol.18. P.217-229.

[2] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ // М.: Наука, 1988, 280с.

5. Групповое поведение экономических агентов моделируется на основе концепции игр среднего поля. Модель состоит из системы уравнений в частных производных: уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, эволюционирующего в обратном времени и описывающее стратегии агентов, и уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, эволюционирующего в прямом времени и описывающее изменение плотности распределения агентов по фазовым координатам. В диссертационной работе разработаны численные методы для решения задачи группового поведения экономических агентов.

Автору диссертационной работы была присуждена золотая медаль РАН с премией для молодых ученых России за работу «Численные методы решения задачи среднего поля при наличии магистрального эффекта и их приложение к анализу кризиса на фондовом рынке» (см. Постановление президиума РАН от 25 мая 2021г, с.8, п.2.1.)

Теоретическая значимость. Построение моделей, описывающих поведение репрезентативных рациональных экономических агентов в виде задач оптимального управления, доказательство существования решения задач оптимального управления, построение синтеза. Построение модели формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков. Исследование моделей группового поведения экономических агентов на рынках на основе концепции игр среднего поля.

Практическая значимость. Создание инструментов для среднесрочного анализа поведения экономических агентов на рынках. Данные инструменты могут использоваться при анализе сценариев, принятии управленческих решений, влияющие на социально-экономические проблемы населения.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликована 21 печатная работа, в том числе 12 из списка Web of Science/Scopus, 1 работа из списка журналов, рекомендованных ВАК, 8 работ в сборниках трудов конференций, 3 свидетельства о регистрации в Реестре программ для ЭВМ.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования были апробированы на 75 конференциях и научных семинарах. Основные доклады:

- Тема доклада: Математическое моделирование некоторых последствий пандемии COVID-19 для экономики России. Четвертый Российский экономический конгресс (РЭК-2020), Москва, Россия, 21-25 декабря 2020.

- Тема пленарного доклада: The household behavior modeling based on modified Ramsey and Mean Field Games approaches. Научная конференция: Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications (QIPA2021), Сириус, Сочи, Россия, 23-29 августа 2021.

- Тема доклада: Математическое моделирование экономического поведения домашних хозяйств в России. Семинар Банка России под руководством заместителя председателя Банка России К.В. Юдаевой и редакционной коллегии журнала «Деньги и кредит», Россия, 6 июля 2021.

- Тема доклада: Анализ экономического положения домашних хозяйств в России в условиях санкций. Городской экономический семинар (ВШЭ, ЕУСПБ, ПОМИ), Россия, 7 апреля 2022.

- Тема доклада: Анализ спроса на потребительский кредит в России в условиях санкций. Семинар Банка России под руководством заместителя председателя Банка России А.Б. Заботкина, Россия, 30 июня 2022.

- Тема доклада: Математическое моделирование экономического поведения домашних хозяйств в России в условиях пандемии COVID-19. Общемосковский семинар Института Проблем Управления им. В.А. Трапезникова РАН под руководством Ф.Т. Алескерова, В.В. Подиновского, Б.Г. Миркина, Россия, 10 марта 2021.

- Тема доклада: Анализ экономического положения домашних хозяйств в условиях санкций. Городской экономический семинар (совместный семинар ЕУСПб и НИУ ВШЭ), Россия, 7 апреля 2022.

- Тема доклада: Numerical study into stock market crises based on Mean Field Games approach. Научная конференция: XIV международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Новосибирск, Академгородок, Россия, 24-27 декабря 2022.

- Тема доклада: Математическое моделирование спроса на потребительский кредит в условиях санкций. Научная конференция: Международная конференция «Современные проблемы обратных задач», Новосибирск, Академгородок, Россия, 19-23 декабря 2022.

- Тема пленарного доклада: Математическое моделирование экономического поведения: анализ рынка потребительского кредита в условиях санкций. КЭФ-2022, Красноярск, Россия, 20 октября 2022.

- Тема доклада: Анализ влияния санкций на экономическое положение домашних хозяйств в России. Международный экономический форум государств — участников СНГ, Центр Международной Торговли, Россия, 18 марта 2022.

- Тема доклада: Mathematical modeling of the household behavior in the labor market. Научная конференция: MOTOR-2023, Екатерибург, Россия, 2-8 июля 2023.

- Тема доклада: Математическая модель динамики человеческого капитала. Научный семинар по математической экономике (рук. В.И. Данилов, В.М. Полтерович), ЦЭМИ РАН, Москва, Россия, 19 марта 2024.

- Научные семинары ФИЦ ИУ РАН, МГУ, МФТИ, ЦЭМИ РАН, ЕУСПБ.

Полученные результаты использовались в работах, проводимых в рамках проектов РФФИ (грант 17-07-00507, 20-07-00285), РНФ (16-11-10246, 23-21-00281, 24-11-00329).

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. А.А. Шананина. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и трех приложений. Общий объем диссертации составляет 195 страниц, включая 92 рисунка и 4 таблицы, 8 страниц цитируемой и авторской литературы. Список литературы содержит 108 наименований.

Содержание работы

Во введении описан объект исследования, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, отражены методы исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы. Приведены апробация и список основных публикаций по теме диссертационной работы.

Глава 1 посвящена описанию модели экономического поведения рационального домашнего хозяйства на несовершенном рынке потребительского кредита.

В **параграфе 1.1** моделирование экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства основывается на модифицированной модели рамсеевского типа в форме задачи оптимального управления. Пусть доходы S_0 репрезентативного домашнего хозяйства растут с темпом $\gamma \in \mathbb{R}$, т.е. $S_0(t) = Se^{\gamma t}$, $S > 0$. Обозначим через $M_0(t)$ ликвидные средства домашнего хозяйства, которые описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{dM_0(t)}{dt} = S_0(t) - p(t)C(t) + H_L(t) - H_D(t), \tag{1}$$

где $C(t)$ — осуществляемые расходы домашним хозяйством, $p(t)$ — индекс потребительских цен, $p(t) = p_0 e^{jt}$, $p_0 > 0$, j — ожидаемый домашним хозяйством темп роста цен. Функции $H_L(t)$ и $H_D(t)$ характеризуют взаимодействие домашнего хозяйства с рынками потребительского кредитования и сбережений в форме депозитов соответственно. Если функция $H_L(t) > 0$, то домашнее хозяйство осуществляет займ по потребительскому кредиту у коммерческого банка. Если $H_L(t) < 0$, то домашнее хозяйство осуществляет платеж по кредитной задолженности. Аналогично, если $H_D(t) > 0$, то домашнее хозяйство увеличивает депозитарный счет. Если $H_D(t) < 0$, то происходит снятие ликвидных средств с депозитарного счета. Обозначим $L(t) \geqslant 0$ — счет кредитной задолженности, $D(t) \geqslant 0$ — сбережения в форме депозитов. Изменение кредитной задолженности описывается уравнением

$$\frac{dL(t)}{dt} = H_L(t) + r_L L(t), \tag{2}$$

где r_L — процентная ставка по потребительскому кредиту. Изменение сбережений в форме депозитов описывается уравнением

$$\frac{dD(t)}{dt} = H_D(t) + r_D D(t), \tag{3}$$

где r_D — процентная ставка по депозитам.

Отсутствие арбитража на рынке потребительского кредита и сбережений предполагает, что $r_L > r_D > 0$. Запас ликвидных средств $M_0(t)$, необходимый домашнему хозяйству для осуществления потребительских расходов $p(t)C(t)$, моделируется законом Фишера $M_0(t) = \theta p(t)C(t)$, где $\frac{1}{\theta} > 0$ — скорость обращения денег на рынке потребительских расходов. Для дальнейшего изложения удобно ввести величину, характеризующую финансовое состояние домашнего хозяйства $X(t) = M_0(t) + D(t) - L(t)$. Из рациональности поведения домашнего хозяйства следует, что оно не осуществляет займы по потребительскому кредиту и не сберегает в форме депозитов одновременно, поэтому $L(t) = (M_0(t) - X(t))_+$, $D(t) = (X(t) - M_0(t))_+$, где $(a)_+ = \max\{a, 0\}, \forall a \in \mathbb{R}$. В силу уравнений (1), (2), (3), динамика финансового состояния домашнего хозяйства описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dX}{dt} = S - \frac{1}{\theta} M_0 - r_L (M_0 - X)_+ + r_D (X - M_0)_+, \quad X(0) = x_0. \tag{4}$$

Домашнее хозяйство стремится максимизировать дисконтированное потребление с коэффициентом дисконтирования $\delta_0 > 0$ и постоянным отвращением к риску $\rho > 0$ на временном интервале $[0, T]$, управляя потребительскими расходами, т.е.

$$\int_0^T \frac{(C(t))^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-\delta_0 t} dt \to \max_{C \geqslant 0}.$$

Замечание 1. *Предельный случай* $\rho = 1$ *основан на том, что предел* $\lim\limits_{\rho\to 1}\frac{C^{1-\rho}-1}{1-\rho} = \ln C$. *Этому пределу соответствует функционал* $\int\limits_0^T \ln C e^{-\delta t} dt \to \max\limits_{C\geqslant 0}$.

Будем говорить, что финансовое состояние $X(t)$ является ликвидным, если существует управление $M_0(t)$, обеспечивающее выполнение условия $X(T) \geqslant 0$. Иными словами, к конечному моменту времени домашнее хозяйство должно расплатиться со своими кредитами. Пусть $x(t) = X(t)e^{-\gamma t}$, $M(t) = M_0(t)e^{-\gamma t}$, $\delta = \delta_0+(1-\rho)j$. Также, предположим, что $r_L > r_D > (\gamma)_+$, $\delta > ((1-\rho)r_L)_+$. Учитывая связь потребительских расходов с ликвидными средствами, задача оптимального управления на конечном временном горизонте формулируется в следующем виде

$$\int\limits_0^T \frac{M^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} dt \to \max_M, \tag{5}$$

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta}M - r_L\,(M-x)_+ + r_D\,(x-M)_+\,, \tag{6}$$

$$x(0) = x_0, x(T) \geqslant 0, \tag{7}$$

$$M(t) \geqslant 0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть* $S + (r_L - \gamma)x_0 > 0$, $T > \left(\frac{1}{r_L}\ln\left(\frac{S}{S+(r_L-\gamma)\,x_0}\right)\right)_+$. *Тогда задача оптимального управления (5), (6), (7), (8) имеет решение.*

Замечание 2. *Чтобы обеспечить выполнение условия* $x(T) \geqslant 0$, *необходимо выполнение неравенства* $x > -\frac{S}{r_L-\gamma}$. *При* $T \to +\infty$ *выполнение данного неравенства является не только необходимым, но и достаточным. В случае* $x \leqslant \frac{S}{r_L-\gamma}$, *домашнее хозяйство не имеет возможности расплатиться с кредитами и образуется финансовая пирамида.*

В силу негладкости правой части дифференциального уравнения (6) применяется принцип максимума Понтрягина в форме Ф. Клакра. С его помощью выделяются три режима экономического поведения домашнего хозяйства: заимствования, не взаимодействия с банковской системой и сбережения в форме депозитов в зависимости от финансового состояния домашнего хозяйства и параметров экономической конъюнктуры. Результаты сформулированы в Теореме 2.

Теорема 2. *Если* $\{x(t), M(t)|\, t \in [0,T]\}$ *решение задачи оптимального управления (5), (6), (7), (8), то существует абсолютно непрерывная функция* $\{\varphi(t)|\, t\in[0,T]\}$, *такая что*

1. *Если* $x^\rho(t)\varphi(t) < \frac{\theta}{1+\theta r_L}$, *то оптимальное управление* $M(t) = \left[\frac{\theta}{(1+\theta r_L)\,\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{\rho}}$, *и*

$$\frac{dx}{dt} = S + (r_L-\gamma)x - \frac{1+\theta r_L}{\theta}\left(\frac{\theta}{(1+\theta r_L)\varphi}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{9}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - r_L)\,\varphi. \tag{10}$$

2. *Если* $\frac{\theta}{1+\theta r_L} < x^\rho(t)\varphi(t) < \frac{\theta}{1+\theta r_D}$, *то оптимальное управление* $M(t) = x(t)$, *и*

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1+\theta\gamma}{\theta}x, \tag{11}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - u(t))\,\varphi, \quad r_D \leqslant u(t) \leqslant r_L. \tag{12}$$

3. *Если* $x^{\rho}(t)\varphi(t) > \dfrac{\theta}{1+\theta r_D}$, *то оптимальное управление* $M(t) = \left[\dfrac{\theta}{(1+\theta r_D)\,\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{\rho}}$, *и*

$$\frac{dx}{dt} = S + (r_D - \gamma)x - \frac{1+\theta r_D}{\theta}\left(\frac{\theta}{(1+\theta r_D)\varphi}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{13}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - r_D)\,\varphi. \tag{14}$$

Кроме того, выполняется условие трансверсальности $x(T) = 0$.

Фазовый портрет на плоскости (x, φ) состоит из трех областей, соответствующих трем различным режимам поведения домашнего хозяйства. В области $\frac{(1-\rho)\theta}{1+\theta r_L} > x^{\rho}\varphi$ динамика описывается дифференциальными уравнениями (9), (10). В этой области домашние хозяйства осуществляют займы по потребительским кредитам. В области $\frac{(1-\rho)\theta}{1+\theta r_L} < x^{\rho}\varphi < \frac{(1-\rho)\theta}{1+\theta r_D}$, динамика описывается дифференциальными уравнениями (11), (12). В этой области домашние хозяйства не осуществляют займы по потребительским кредитам и не сберегают в форме депозитов. В области $\frac{(1-\rho)\theta}{1+\theta r_D} < x^{\rho}\varphi$ динамика описывается дифференциальными уравнениями (13), (14). В этой области домашние хозяйства сберегают в форме депозитов.

В классической модели Рамсея рассматривается совершенный рынок потребительского кредита, когда процентные ставки по кредитам и депозитам совпадают ($r_L = r_D$). В этом случае отсутствует область, в которой население не взаимодействует с коммерческими банками, правая часть дифференциального уравнения (6) становится гладкой. В исследуемой задаче процентные ставки по кредитам отличаются от процентный ставок по депозитам. Дополнительное управление $u(t)$ следует выбирать из допустимой области $u(t) \in [r_D, r_L]$ таким, которое доставляет максимальное значение функционала (5). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Максимальное значение функционала (5) достигается при* $u(t) \equiv r_D$ *в дифференциальном уравнении (12) в области автономного режима.*

Траектория, определяемая оптимальным решением задачи (5), (6), (7), (8), должна удовлетворять краевым условиям $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$. Устремив временной горизонт $T \to +\infty$, можно построить синтез задачи оптимального управления практически в аналитическом виде.

Обозначим через $y(\bar{x}, \beta)$ решение уравнения

$$\left[\frac{1+\theta r_L}{1+\theta r_D}\right]^{\frac{\beta}{\rho}} \cdot \frac{y(\bar{x},\beta)}{\bar{x}} = \left[\left(y(\bar{x},\beta) - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right)\left(\bar{x} - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right)^{-1}\right]^{\frac{\theta[\delta+\rho\gamma-r_D]}{(1+\gamma\theta)\rho}}, \tag{15}$$

а через $M_r(\bar{x}, r)$ решение уравнения

$$x + \frac{S}{r-\gamma} = \frac{(1+\theta r)\,\rho}{\theta\,(\delta-(1-\rho)r)} M_r(\bar{x}, r) + \left[\frac{\bar{x}}{M_r(\bar{x}, r)}\right]^{\frac{\rho(r-\gamma)}{\delta+\rho\gamma-r}} \cdot \left[\frac{S}{r-\gamma} - \frac{r-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r}\bar{x}\right]. \tag{16}$$

Теорема 3. *(Синтез в задаче оптимального управления).*

1. *Если* $r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, *то домашнее хозяйство находится в режиме заимствования.*

   Тип 1.1. *Синтез оптимального управления определяется выражением*

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \frac{\theta\,(\delta-(1-\rho)r_L)}{\rho\,(1+\theta r_L)}\left(x + \frac{S}{r_L-\gamma}\right).$$

2. *Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$, то домашнее хозяйство находится либо в режиме заимствования, либо в автономном режиме.*

   Тип 2.1. *Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L < \delta + \rho\gamma$, то синтез оптимального управления определяется выражением*

$$M(x;S,r_L,\theta,\rho,\gamma,\delta) = \begin{cases} \dfrac{\theta\,(\delta-(1-\rho)r_L)}{\rho\,(1+\theta r_L)}\left(x+\dfrac{S}{r_L-\gamma}\right), \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, \text{если } x \geqslant x_{p_1}, \end{cases}$$

   где $x_{p_1} = \frac{S(\delta-(1-\rho)r_L)}{(r_L-\gamma)\left(r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}\right)}$.

   Тип 2.2. *Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_L$ или $\max\{r_D, \delta+\rho\gamma\} < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$, то синтез оптимального управления определяется выражением*

$$M(x;S,r_L,\theta,\rho,\gamma,\delta) = \begin{cases} M_r\left(x_{p_1}, r_L\right), \quad \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, \quad \text{если } x \geqslant x_{p_1}, \end{cases}$$

   где $x_{p_1} = \frac{\rho S}{r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}}$. Более того, уравнение (16) имеет единственное решение $M_r\left(x_{p_1}, r_L\right)$ на множестве $\left((x)_+, x_{p_1}\right)$.

3. *Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$, то домашнее хозяйство находится в одном из трех режимов: заимствования, автономном или сбережения.*

   Тип 3.1. *Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < r_L < \delta + \rho\gamma$, то синтез оптимального управления определяется выражением*

$$M(x;S,r_L,r_D,\theta,\rho,\gamma,\delta) = \begin{cases} \dfrac{\theta\,(\delta-(1-\rho)r_L)}{\rho\,(1+\theta r_L)}\left(x+\dfrac{S}{r_L-\gamma}\right), \quad \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, \quad \text{если } x_{p_1} \leqslant x \leqslant x_{p_2}, \\ M_r\left(x_{p_2}, r_D\right), \quad \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

   где $x_{p_1} = \frac{S(\delta-(1-\rho)r_L)}{(r_L-\gamma)\left(r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}\right)}$, $x_{c_1} = \max\left\{x_{p_1}, \frac{\rho S}{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}\right\}$, $x_{p_2} = y\left(x_{c_1}, -1\right)$. Более того, уравнение (15) имеет единственное решение $y\left(x_{c_1}, -1\right)$ на множестве $\left(x_{c_1}, +\infty\right)$, а уравнение (16) имеет единственное решение $M_r\left(x_{p_2}, r_D\right)$ на множестве $\left(x_{p_2}, x\right)$.

   Тип 3.2. *Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < \delta + \rho\gamma < r_L$, то синтез оптимального управления определяется выражением*

$$M(x;S,r_L,r_D,\theta,\rho,\gamma,\delta) = \begin{cases} M_r\left(x_{p_1}, r_L\right), \quad \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, \quad \text{если } x_{p_1} \leqslant x \leqslant x_{p_2}, \\ M_r\left(x_{p_2}, r_D\right), \quad \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

   где $x_{p_1} = \frac{\rho S}{r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}}$, $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}$, $x_{p_2} = y\left(x_{c_1}, -1\right)$. Более того, уравнение (15) имеет единственное решение $y\left(x_{c_1}, -1\right)$ на множестве $\left(x_{c_1}, +\infty\right)$, уравнение (16) имеет единственное решение $M_r\left(x_{p_1}, r_L\right)$ на множестве $\left((x)_+, x_{p_1}\right)$ и единственное решение $M_r\left(x_{p_2}, r_D\right)$ на множестве $\left(x_{p_2}, x\right)$.

   Тип 3.3. *Если $\max\left\{\delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma\right\} < r_D$, то синтез оптимального управления определяется выражением*

$$M(x;S,r_L,r_D,\theta,\rho,\gamma,\delta) = \begin{cases} M_r\left(x_{p_1}, r_L\right), \quad \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, \quad \text{если } x_{p_1} \leqslant x \leqslant x_{p_2}, \\ \dfrac{\theta\,(\delta-(1-\rho)r_D)}{\rho\,(1+\theta r_D)}\cdot\left(x+\dfrac{S}{r_D-\gamma}\right), \quad \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

где $x_{p_2} = \frac{S}{r_D-\gamma} \cdot \frac{\delta-(1-\rho)r_D}{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}$, $x_{p_1} = \min\left\{\frac{\rho S}{r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}}, y(x_{p_2},1)\right\}$. *Более того, уравнение (16) имеет единственное решение* $M_r(x_{p_1}, r_L)$ *на множестве* $((x)_+, x_{p_1})$, *а уравнение (15) имеет единственное решение* $y(x_{p_2},1)$ *на множестве* $(0, x_{p_2})$.

В **параграфе 1.2** исследована новая модель формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков. Моделирование взаимодействия на рынке потребительского кредита коммерческих банков и домашних хозяйств основано на концепции равновесия по Штакельбергу. Предполагается, что коммерческие банки назначают ставку по потребительскому кредиту, исходя из своих интересов, оценивая ответное поведение домашних хозяйств.

Основной формой платежа по потребительскому кредиту является аннуитетный платеж. Обозначим через $\hat{T}$ срок выдаваемого потребительского кредита H_L домашнему хозяйству. Обозначим $\hat{H}_L(t) = H_L(t)e^{-\gamma t}$. Из уравнения баланса ликвидных средств заемщика (1) с учетом динамики финансового состояния домашнего хозяйства (4) получаем, что спрос на потребительский кредит описывается уравнением

$$\hat{H}_L = \frac{dM(x)}{dx}\left(S - \gamma x - \frac{M(x)}{\theta} - r_L(M(x)-x)_+\right) - S + \gamma M(x) + \frac{M(x)}{\theta},$$

где $M(x) = M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta)$ синтез оптимального управления.

Из Теоремы 3 можно выделить четыре типа поведения заемщиков.

Тип поведения заемщиков 1. Если $r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то спрос на потребительский кредит вычисляется по формуле

$$\hat{H}_L = \frac{(\delta-(1-\rho)r_L)\left(r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}\right)}{\theta\rho^2(1+\theta r_L)}x - \\ - \frac{\rho(r_L-\gamma)\left(r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}\right) + \left(\delta-(1-\rho)r_L-\frac{\rho}{\theta}\right)(\delta-(1-\rho)r_L)}{\theta\rho^2(1+\theta r_L)(r_L-\gamma)}S.$$

Тип поведения заемщиков 2. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L < \delta + \rho\gamma$, а финансовое состояние домашнего хозяйства $x < \frac{S(\delta-(1-\rho)r_L)}{(r_L-\gamma)\left(r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}\right)}$, то спрос на потребительский кредит повторяют тип поведения заемщиков 1. В случае $x \geqslant \frac{S(\delta-(1-\rho)r_L)}{(r_L-\gamma)\left(r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}\right)}$ потребительский кредит не заимствуется.

Тип поведения заемщиков 3. Если $\max\left\{r_D, \delta-\frac{\rho}{\theta}\right\} < \delta+\rho\gamma < r_L$ или $\max\{r_D, \delta+\rho\gamma\} < \delta-\frac{\rho}{\theta} < r_L$, а финансовое состояние домашнего хозяйства $x < x_{p_1}$, где $x_{p_1} = \frac{\rho S}{r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}}$, то спрос на потребительский кредит вычисляется по формуле

$$\hat{H}_L = \frac{M_r(x_{p_1}, r_L)}{\theta} - S + \gamma M_r(x_{p_1}, r_L) + \frac{\delta-(1-\rho)r_L}{\rho}\cdot\left(\frac{1+\theta r_L}{\theta} - \left[\frac{x_{p_1}}{M_r(x_{p_1}, r_L)}\right]^{\frac{\delta-(1-\rho)r_L}{\delta+\rho\gamma-r_L}}\cdot \\ \cdot\left[S(\delta-(1-\rho)r_L) + \left(\delta - r_L - \frac{\rho}{\theta}\right)(r_L-\gamma)x_{p_1}\right]\right)^{-1}\cdot \\ \cdot\left(S - \gamma x - \frac{M_r(x_{p_1}, r_L)}{\theta} - r_L(M_r(x_{p_1}, r_L) - x)\right).$$

Уравнение (16) имеет единственное решение $M_r(x_{p_1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p_1})$. В случае $x \geqslant x_{p_1}$ потребительский кредит не заимствуется.

Тип поведения заемщиков 4. Если $\max\left\{\delta+\rho\gamma, \delta-\frac{\rho}{\theta}\right\} < r_D$, а финансовое состояние домашнего хозяйства $x < x_{p_1}$, где $x_{p_1} = \min\left\{\frac{\rho S}{r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}}, y(x_{p_2},1)\right\}$, $x_{p_2} = \frac{S}{r_D-\gamma}\cdot$

$\frac{\delta-(1-\rho)r_D}{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}$, то спрос на потребительский кредит повторяют тип поведения заемщиков 3. Уравнение (16) имеет единственное решение $M_r\left(x_{p_1}, r_L\right)$ на множестве $\left((x)_+, x_{p_1}\right)$, а уравнение (15) имеет единственное решение $y\left(x_{p_2}, 1\right)$ на множестве $\left(0, x_{p_2}\right)$.

Задолженность домашнего хозяйства по выданному кредиту равна $\hat{H}_L(r_L)e^{r_L\hat{T}}$. Аннуитетный платеж A можно найти из уравнения

$$\hat{H}_L\left(r_L\right)e^{r_L\hat{T}} = A\int\limits_0^{\hat{T}} e^{r_L\left(\hat{T}-t\right)}dt,$$

откуда

$$A = \frac{r_L}{1-e^{-r_L\hat{T}}}\hat{H}_L\left(r_L\right).$$

Коммерческие банки учитывают риск неплатежеспособности заемщика. Обозначим через τ момент времени, когда заемщик не сможет выполнять обязательства по аннуитетному платежу. С точки зрения коммерческих банков доходы заемщиков $S(t)$ не являются стабильными. Будем предполагать, что коммерческие банки моделируют доходы заемщика с помощью стохастического дифференциального уравнения геометрического броуновского движения

$$dS = S\gamma dt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0, \sigma > 0.$$

Заемщик объявляет дефолт по кредиту, если его доход не позволяет осуществлять аннуитетный платеж A и потребительские расходы на минимальном уровне μ, т.е.

$$\tau = \min\left(\inf_t\left\{S(t) < A+\mu\right\}, \hat{T}\right).$$

Поскольку доход заемщика является случайным процессом, величина $\tau \in (0, \hat{T})$ является случайным моментом остановки. Коммерческие банки устанавливают процентную ставку по потребительскому кредиту, максимизируя математическое ожидание чистой приведенной прибыли (NPV), т.е.

$$NPV(r_L) = \mathbb{E}_\tau\left(A\int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda t}dt - \hat{H}_L(r_L)\right) = \mathbb{E}_\tau\left(\left(\frac{r_L\left(1-e^{-\lambda\tau}\right)}{\lambda\left(1-e^{-r_L\hat{T}}\right)} - 1\right)\hat{H}_L(r_L)\right) \to \max_{r_L},$$

где λ — коэффициент дисконтирования финансовых потоков банками, который равен стоимости фондирования расходов для коммерческих банков, а спрос $\hat{H}_L(r_L)$ определяется типов поведения заемщиков.

По формуле Фейнмана–Каца учет рисков невозврата потребительского кредита сводится к решению краевой задачи для уравнения с частными производными. Установив связь с уравнением Абеля, удается свести решение краевой задачи к задаче Коши для уравнения теплопроводности с внешним источником и получить оценку рисков в аналитической форме. Пусть $(b)_- = \min\{b, 0\}, \forall b \in \mathbb{R}$. Обозначим $a = \frac{\sigma^2}{2}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.

$$\mathbb{E}_\tau e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\hat{T}} + \frac{1}{\pi}e^{-\lambda\hat{T}}\int\limits_0^{\hat{T}}\frac{1}{\sqrt{\hat{T}-s}}\exp\left(-\frac{\left(\left(\gamma-a^2\right)\left(\hat{T}-s\right) - \left[\ln\frac{A+\mu}{S_0}\right]_-\right)^2}{4a^2\left(\hat{T}-s\right)}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{\left(\gamma-a^2\right)^2}{4a^2}\xi^2\right)\left[\left(2\lambda + \frac{\left(\gamma-a^2\right)^2}{2a^2}\right)\exp\left(\lambda\left(s-\xi^2\right)\right) - \frac{\left(\gamma-a^2\right)^2}{2a^2}\right]d\xi ds.$$

В условиях нестабильной рыночной ситуации актуальны модели, которые позволяют анализировать групповое поведение большого количества агентов. Такое исследование позволяет более качественно отслеживать экономическую динамику. В основе построения такого рода моделей лежит концепция игр среднего поля. Цели, управленческие решения, которые принимают агенты описываются уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана. Уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка описывает динамику плотности распределения агентов по фазовым координатам.

В **параграфе 1.3** исследуется групповое поведение домашних хозяйств на несовершенном рынке потребительских кредитов и депозитов. Мы полагаем, что доходы домашнего хозяйства S являются стохастическим процессом и описываются стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS = S\left(\gamma(x,S,t)dt + \sigma(x,S,t)dW(t)\right), \quad S(0) = s_0,$$

где $\sigma(x,S,t) > 0$, $W(t)$ — винеровский процесс $W(t)$.

Пусть $m(x,S,t)$ описывает плотность распределения домашних хозяйств по финансовым состояниям x и доходам S в момент времени t. Эволюция плотности распределения описывается уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка, вывод которого описывается в диссертационной работе:

$$\frac{\partial m(x,S,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left(\sigma^2(x,S,t)S^2 m(x,S,t)\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial S}\left(Sm(x,S,t)\gamma(x,S,t)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(m(x,S,t)f(x,S,t)\right) = 0, \quad (17)$$

с начальным условием

$$m(x,S,0) = m_0(x,S), \quad (18)$$

где

$$f(x,S,t) = S - \gamma(x,S,t)x - \frac{1}{\theta}M - r_L(x,S,t)\left(M-x\right)_+ + r_D(x,S,t)\left(x-M\right)_+,$$

$M = M(x,S)$ — синтез оптимального управления, выбор которого описывается из решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Для численного решения дифференциального уравнения (17) с начальным условием (18) разработаны специальные разностные схемы, в основе которых лежит противопоточная схема Годунова первого порядка, доказана сходимость разностной схемы.

В главе 2 изучается вопрос идентификации и верификации модели экономического поведения домашних хозяйств. Параметры модели рамсеевского типа можно разделить на два типа: внутренние параметры модели и параметры экономической конъюнктуры. Ко внутренним параметрам модели относятся поведенческие характеристики репрезентативного домашнего хозяйства, характерные для данного социального слоя населения: скорость обращения денег $\frac{1}{\theta}$, склонность к риску ρ и коэффициент дисконтирования δ. К параметрам экономической конъюнктуры относятся ставки по потребительским кредитам r_L и депозитам r_D, ожидаемые темп роста доходов γ данного социального слоя и инфляция j.

В **параграфе 2.1** проводится идентификация репрезентативного домашнего хозяйства. Для калибровки модели экономического поведения домашних хозяйств были использованы два корпуса статистики: данные Обследования Бюджетов Домашних Хозяйств (ОБДХ) Росстата и данные Российского Мониторинга Экономического Положения и Здоровья Населения (РМЭЗ НИУ ВШЭ), собираемые Высшей Школой Экономики.

Статистические данные РМЭЗ НИУ ВШЭ позволяют выделить заемщиков по потребительским кредитам, автономных домашних хозяйств, сберегающих домашних хозяйств и выплачивающих ипотеку. Недостаток статистических данных РМЭЗ НИУ ВШЭ заключается в объеме выборки: в ежегодном опросе участвуют около 5 000 домашних хозяйств из 39 регионов России. Несмотря на это, данные является репрезентативными. Результаты идентификации агрегированных динамик задолженности по потребительским кредитам, потреблению и депозитам отображены на Рис.1,2,3, где синяя траектория отражает исторические данные, а красная траектория расчеты по модели. Период идентификации отрисован сплошными кривыми, период верификации отрисован пунктирными линиями.

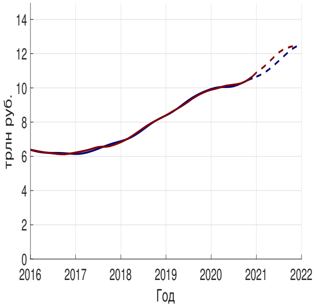

Рис. 1: Задолженность по потребительским кредитам.

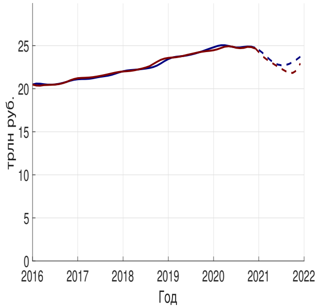

Рис. 2: Динамика депозитов.

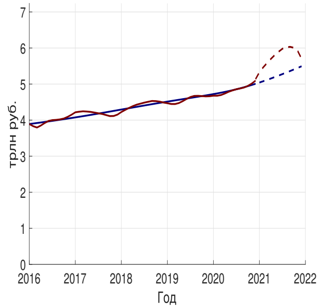

Рис. 3: Потребление населения.

Стоит отметить, что если бы банки выдавали малоимущим домашним хозяйствам потребительские кредиты, то они бы поддерживали их уровень потребления на минимальном уровне, но это бы привело к ощутимому росту задолженности до 17.5 трлн руб. к концу 2023г и 27.11 трлн руб. к концу 2024г, а общая задолженность составила бы 31.5 трлн руб. к концу 2023г и 44.29 трлн руб. к концу 2024г соответственно. Отказы в выдачи потребительского кредита малоимущим слоям населения приводят к социальной напряженности. В данном сценарии с учетом отказов в выдаче кредитов к концу 2024г итоговая задолженность вырастет до 23.66 трлн руб., при этом объем отказов за прогнозный период 2022-2024гг составит 23 трлн руб.

Сценарий 2. Субсидирование необеспеченных заемщиков. Главная проблема потребительского кредитования в России заключается в платежеспособности малоимущих заемщиков. Данный сценарий отражает расчеты результата адресной финансовой поддержки малодоходных заемщиков. Предполагается рост доходов малоимущих заемщиков с начала 2023г до конца 2024г за счет осуществления их финансовой поддержки через государственные структуры. Было посчитано, что за двухлетний период необходимо выделить 199 млрд руб. малоимущим заемщикам, проживающих в городском типе бедной группы регионов, 213 млрд руб. в сельском типе бедной группе регионов, 1 355 млрд руб. в средней группе регионов и 682 млрд руб. в богатой группе регионов. Данные величины были рассчитаны исходя из условия сохранении платежеспособности необеспеченных заемщиков после весны 2022г во всех группах регионов. Итоговая задолженность необеспеченных заемщиков во всех группах регионов представлена на Рис.4.

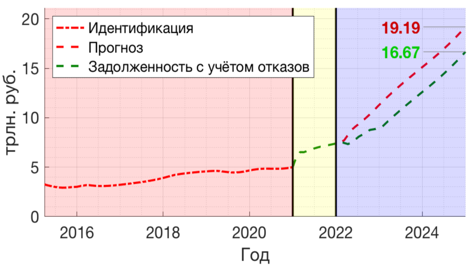

Рис. 4: Суммарная задолженность необеспеченных заемщиков.

Расчеты показывают, что при выделении субсидий необеспеченным заемщикам порядка 2.5 трлн руб. за 2023-2024гг их платежеспособность восстанавливается, а отказы в выдаче осуществлялись бы в весенний период 2022г. Итоговый рост задолженности за три года с учетом задолженности высокодоходных заемщиков вырос бы до 21.25 трлн руб., однако, такой сценарий сохранил бы роль механизма социальной адаптации у потребительского кредита. Стоит отметить, что подход адресного субсидирования малодоходных домашних хозяйств эффективно применялся Правительством в период пандемии COVID-19.

С помощью исследуемой модели можно изучать влияние ключевой ставки на задолженность заемщиков. В период пандемии COVID-19 значительная часть снижения доходов домашних хозяйств произошла в результате сжатия доходов от предпринимательской деятельности. В таких условиях представлялся вероятным рост просроченной задолженности по кредитам из-за потери способности части населения обслуживать платежи по кредитам. Рост просроченной задолженности, в свою очередь, приводил к повышению процентных ставок. Для того чтобы учесть такую возможность, было проведено регресионное моделирование процентных ставок по кредитам в зависимости от величины просроченной задолженности по потребительскому кредиту, а также ключевой ставки Банка России. В то же время на величину просроченной задолженности непосредственно оказывает влияние стоимость кредитования, выражаемая через процентную ставку по кредитам, а также динамика необеспеченных кредитов, что было учтено с помощью построения дополнительной регрессии. Расчеты по модели представлены в основном тексте диссертационной работы. Они показывают, что снижение ключевой ставки Банком России уменьшает долговую нагрузку на домашние хозяйства и долю неплатежеспособных заемщиков среди физических лиц. При этом эффективность снижения ключевой ставки существенно зависит от динамики снижения.

В **параграфе 2.4** исследуется вопрос согласованности статистических данных ОБДХ с моделью динамики плотности распределения платежеспособных заемщиков по доходам и финансовым состояниям на основе решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. Множество всевозможных решений уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка задает подпространство, на которое проецируются статистические данные. Участники опроса ОБДХ меняются каждый год, но в течение каждого года ежеквартально опрашиваются одни и те же домашние хозяйства. Исходя из этого, алгоритм идентификации статистической плотности распределения проводился в каждом году независимо с 2015 по 2020гг.

Построенная проекция использовалась в качестве входных данных для определения поведенческих характеристик домашних хозяйств: отвращения к риску ρ, скорости обращения денег $\frac{1}{\theta}$ и коэффициента дисконтирования δ. Как оговаривалось ранее, коэффициент отвращения к риску ρ и коэффициент скорости обращения денег $\frac{1}{\theta}$ можно задать константами для данного социального слоя, а коэффициент дисконтирования δ зависит от параметров экономической конъюнктуры: процентных ставок по потребительским кредитам, темпов роста доходов, инфляции. Идентификация параметров ρ, θ, δ проводится с помощью синтеза $M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta)$, подробно описанным в Главе 1, воспроизводящим результат построения проекции.

В результате идентификации выяснилось, что коэффициент дисконтирования напрямую зависит от финансового состояния x и доходов S домашнего хозяйства. Из Рис.5 легко видеть, что для фиксированного x, чем больше доходов получает домашнее хозяйство, тем меньше коэффициент дисконтирования. В тоже время, для фиксированного S, чем меньше финансовое состояние домашнего хозяйства, тем больше коэффициент дисконтирования. Стоит отметить, что рост процентной ставки по потребительскому кредиту, рост инфляции влекут к увеличению дисконтирования, в то время как рост доходов домашнего хозяйства уменьшает коэффициент дисконтирования. Также было отмечено, что домашние хозяйства с бо́льшими доходами более чувствительны к изменения процентной ставки по потребительскому кредиту. Это свидетельствует о том, что бедные домашние хозяйства существенно больше ценят денежные средства в настоящий момент, чем богатые слои населения, и менее чувствительны к изменению ставки по потребительскому кредиту, т.к. они, в большинстве случаев, осуществляют займы с целью поддержки минимального потребления.

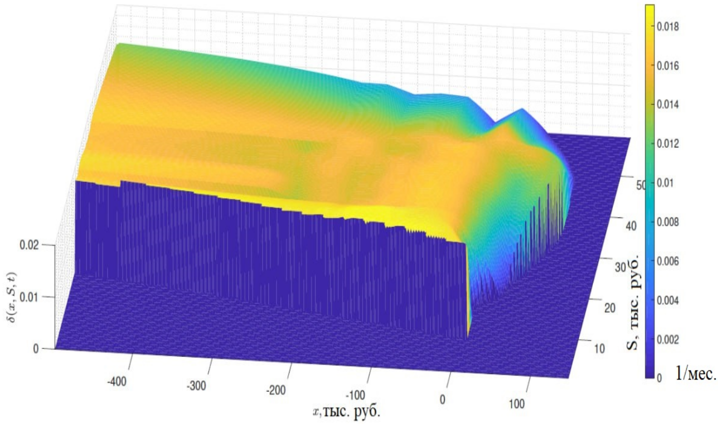

Рис. 5: Результат идентификации функции $\delta(x, S)$ для средней группы регионов в марте 2015г. Месячные данные.

В главе 3 исследуется моделирование доходов населения.

В **параграфе 3.1** исследуется проблема динамики человеческого капитала на языке математической модели репрезентативного рационального работника на рынке труда. Предполагается, что работник получает заработную плату S, тратит ее на осуществление потребительских расходов C и на развитие своего человеческого капитала X, т.е. $S = C + X$. Накопление человеческого капитала $P \geqslant 0$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dP}{dt} = X + \mu P, \quad P(0) = 0,$$

где $\mu < 0$ — параметр, описывающий устаревание накопленных компетенций работника. В случайный момент времени появляется вакансия, позволяющая работнику увеличить заработную плату в соответствии с накопленным человеческим капиталом до величины $\beta(P)$, где $\beta(P) \geqslant 0$, монотонно неубывающая функция. Будем предполагать, что вероятность появления вакансии не позднее времени t равна

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t H(P(\tau))d\tau\right),$$

где $H(P) \geqslant 0$, монотонно неубывающая функция. Работник оценивает текущее потребление с помощью функции полезности с постоянным отвращением к риску $u(C) = \frac{C^{1-\rho}}{1-\rho}$, где, как и раньше, $\rho > 0$ — коэффициент отвращения к риску. Будем считать, что работник распределяет свой доход между потреблением $C(t) \geqslant 0$ и вложением в развитие человеческого капитала $X(t) \geqslant 0$, при этом он максимизируя математическое ожидание дисконтированного с коэффициентом $\delta > 0$ потребления

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^T e^{-\delta t}\frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho}dt + e^{-\delta T}\cdot\frac{\beta^{1-\rho}(P(T))}{(1-\rho)\delta}\right\} \to \max_{X \geqslant 0}. \tag{19}$$

Замечание 3. *При $\rho = 1$ максимизирующий функционал задачи оптимального управления нужно рассматривать в виде*

$$\mathbb{E}\left\{\int\limits_0^T e^{-\delta t}\ln C(t)dt + \frac{e^{-\delta T}}{\delta}\cdot\ln\beta\left(P(T)\right)\right\} \to \max_{X\geqslant 0}.$$

Лемма 1. *Справедливо следующее представление функционала (19)*

$$\mathbb{E}\left\{\int\limits_0^T e^{-\delta t}\frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho}dt + \frac{\beta^{1-\rho}(P(T))}{(1-\rho)\delta}e^{-\delta T}\right\} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-\int\limits_0^t(\delta+H(P(\tau)))d\tau}\left(\frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} + H(P(t))\frac{\beta^{1-\rho}(P(t))}{(1-\rho)\delta}\right)dt.$$

Обозначим $\Lambda(t) = \int\limits_0^t\left(\delta + H(P(\tau))\right)d\tau$. Пусть u обозначает долю от заработной платы, которую работник тратит на потребительские расходы. Перейдем к безразмерным величинам. Пусть $\hat{P} = \frac{P}{S\hat{\theta}}$, $\tau = \frac{t}{\hat{\theta}}$, $\hat{\mu} = \mu\hat{\theta}$, $\hat{H}\left(\hat{P}\right) = \frac{1}{\delta}H\left(S\hat{\theta}\hat{P}\right)$, $\hat{\beta}\left(\hat{P}\right) = \frac{1}{S}\beta\left(S\hat{\theta}\hat{P}\right)$, где $S\hat{\theta}$ — годовой доход работника. Тогда мы получаем задачу оптимального управления (20), (21), (22):

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\Lambda}\left(\frac{u^{1-\rho}}{1-\rho} + \hat{H}\left(\hat{P}\right)\cdot\frac{\hat{\beta}^{1-\rho}\left(\hat{P}\right)}{1-\rho}\right)d\tau \to \max_{0\leqslant u\leqslant 1}, \tag{20}$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = (1-u) + \hat{\mu}\hat{P}, \quad \hat{P}(0) = 0, \tag{21}$$

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \delta\hat{\theta}\left(1 + \hat{H}\left(\hat{P}\right)\right), \quad \Lambda(0) = 0. \tag{22}$$

Задача оптимального управления (20), (21), (22) является задачей на бесконечном временном горизонте.

Теорема 5.

1. *Пусть существует константа $\hat{C} > 0$: $\hat{H}\left(\hat{P}\right) \leqslant \hat{C}(\hat{P}+1), \forall\hat{P}\geqslant 0$. Более того, пусть $\hat{H}\left(\hat{P}\right)\in C^1((0,+\infty))$, $\hat{\beta}\left(\hat{P}\right)\in C^1((0,+\infty))$. Тогда задача оптимального управления (20), (21), (22) имеет решение.*

2. *Пусть $\hat{P}(\tau)$, $\Lambda(\tau)$, $u^*(\tau)$ — решение задачи оптимального управления (20), (21), (22), $\hat{P}(\tau)$, $\Lambda(\tau)$ являются абсолютно непрерывными при $\tau\geqslant 0$, $u^*(\tau)$ является измеримой функцией при $\tau \geqslant 0$. Тогда существуют абсолютно непрерывные функции $\varphi_1(\tau) > 0$,*

$\varphi_2(\tau) < 0$, $\tau \geqslant 0$, *такие, что*

$$\varphi_1(\tau) = \int\limits_{\tau}^{+\infty} \Bigg\{ e^{-\hat{\mu}(\tau - s)} \Bigg[-\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H}\left(\hat{P}(s)\right)\right) \varphi_1(s) +$$

$$+ \left(\frac{d\hat{H}\left(\hat{P}(s)\right)}{d\hat{P}(s)} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}\left(\hat{P}(s)\right)}{1-\rho} + \frac{d\hat{H}\left(\hat{P}(s)\right)}{d\hat{P}(s)} \cdot \frac{d\hat{\beta}(\hat{P}(s))}{d\hat{P}(s)} \cdot \hat{\beta}^{-\rho}\left(\hat{P}(s)\right) \right) \Bigg] -$$

$$- \delta\hat{\theta} \left[\int\limits_0^s \frac{d\hat{H}\left(\hat{P}(\xi)\right)}{d\hat{P}(\xi)} e^{-\hat{\mu}(\tau-\xi)} d\xi - \int\limits_0^\tau \frac{d\hat{H}\left(\hat{P}(\xi)\right)}{d\hat{P}(\xi)} e^{-\hat{\mu}(\tau-\xi)} d\xi \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H}\left(\hat{P}(s)\right)\right) \varphi_2(s) + \min\left\{1, \frac{(\varphi_1(\tau))^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}{1-\rho}\right\} + \hat{H}\left(\hat{P}(s)\right) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}\left(\hat{P}(s)\right)}{1-\rho} \right] \Bigg\} ds,$$

$$\varphi_2(\tau) = -\int\limits_{\tau}^{+\infty} \Bigg[\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H}\left(\hat{P}(s)\right)\right) \varphi_2(s) + \min\left\{1, \frac{(\varphi_1(\tau))^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}{1-\rho}\right\} +$$

$$+ \hat{H}\left(\hat{P}(s)\right) \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}\left(\hat{P}(s)\right)}{1-\rho} \Bigg] ds,$$

$$u^*(\tau) = \min\left\{1, (\varphi_1(\tau))^{-\frac{1}{\rho}}\right\}. \tag{23}$$

Более того,

$$\hat{P}(\tau) = \int\limits_0^\tau \left(1 - (\varphi_1(s))^{-\frac{1}{\rho}}\right)_+ e^{\hat{\mu}(\tau-s)} ds, \quad \Lambda(\tau) = \delta\hat{\theta} \int\limits_0^\tau \left(1 + \hat{H}\left(\hat{P}(s)\right)\right) ds.$$

Следствие 1. *Предположим, что существует момент времени $\hat{\tau} \geqslant 0$ такой, что $\hat{P}(\tau)$ является монотонно возрастающей для любого $\tau \geqslant \hat{\tau}$, $\hat{P} < -\frac{1}{\hat{\mu}}$. Тогда существуют пределы $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \hat{P}(\tau) = \hat{P}^*$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \varphi_1(\tau) = \varphi_1^*$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \varphi_2(\tau) = \varphi_2^*$, где*

$$\varphi_1^* = \left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{-\rho},$$

$$\varphi_2^* = -\frac{1}{\delta\hat{\theta}\left(1 + \hat{H}\left(\hat{P^*}\right)\right)} \left[\left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{1-\rho} + \hat{H}\left(\hat{P}^*\right) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}\left(\hat{P}^*\right)}{1-\rho} \right],$$

$$- \frac{d\hat{H}\left(\hat{P}^*\right)}{d\hat{P}^*} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}\left(\hat{P}^*\right)}{1-\rho} - \hat{H}\left(\hat{P}^*\right) \cdot \hat{\beta}^{-\rho}(\hat{P}^*) \cdot \frac{d\hat{\beta}\left(\hat{P}^*\right)}{d\hat{P}^*} -$$

$$- \hat{\mu}\left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{-\rho} + \delta\hat{\theta}\left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{-\rho} \cdot \left(1 + \hat{H}\left(\hat{P^*}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{1 + \hat{H}\left(\hat{P}^*\right)} \cdot \left[\left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{1-\rho} + \hat{H}\left(\hat{P}^*\right) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}\left(\hat{P}^*\right)}{1-\rho} \right] \cdot \frac{d\hat{H}\left(\hat{P^*}\right)}{d\hat{P}^*} = 0.$$

В диссертационной работе проводится исследование фазового портрета в окрестности положения равновесия $\left(\hat{P}^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*\right)$. Траекторию оптимального управления можно построить в случае, когда линеаризованная система в положении равновесия имеет два собственных значения с положительными действительными частями и одно действительное отрицательное. В таком случае, собственный вектор, соответствующий отрицательному собственному значению, является устойчивой сепаратрисой неподвижной точки. Выпуская траекторию из окрестности точки равновесия можно найти зависимость $\varphi_1\left(\hat{P}\right)$. Подставляя его решение в (23), мы получаем синтез $u^*\left(\hat{P}\right)$.

Изучается вопрос идентификации модели репрезентативного рационального работника на рынке труда. Получены качественные результаты об эффективности стимулирования увеличения человеческого капитала для различных социальных слоев.

В **параграфе 3.2** исследуется групповое поведение работников на рынке труда, относящиеся к одному профессионально-квалификационному слою.

Заработная плата работника описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS = \gamma S dt + (\beta(P) - S)\, dN_t\, (H(P,S)), \quad S(0) = S_0,$$

где N_t — процесс Леви, характеризующий скачок заработной платы с величины S до $(\beta(P) - S)$ с интенсивностью $H(P,S)$, $S_0 > 0$. Предположим, что реальный темп роста заработной платы работника γ отрицателен, т.е. реальная заработная плата уменьшается. Это мотивирует работника осуществлять вложения в собственный человеческий капитал, чтобы развивать свои компетенции и стремиться повысить заработную плату до величины $\beta(P)$. Человеческий капитал описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dP}{dt} = (1 - u(P))\, S + \mu P, \quad P(0) = P_0.$$

Пусть $m(P,S,t)$ — плотность распределения работников по накопленному человеческому капиталу P, заработной плате S в момент времени t. Эволюция плотности распределения работников описывается уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка для процесса Леви, вывод которого описывается в диссертационной работе:

$$\frac{\partial m(P,S,t)}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial\left(S m(P,S,t)\right)}{\partial S} - \frac{\partial\left(m(P,S,t)\left[(1-u(P))S + \mu P\right]\right)}{\partial P} - H(P,S) m(P,S,t) \quad (24)$$

с начальным условием

$$m(P,S,0) = m_0(P,S) \quad (25)$$

и граничным условием

$$m(P,\beta(P),t) = -\frac{\int\limits_0^{\beta(P)} H(P,S) m(P,S,t) dS}{-\gamma\beta(P) + \beta'(P)\cdot((1-u(P))\beta(P) + \mu P)}, \quad (26)$$

где $u(P)$ построенный синтез оптимального управления для репрезентативного работника, характерного для данного профессионально-квалификационного слоя.

Для численного решения дифференциального уравнения (24) с начальным условием (25) и граничным условием (26) разработаны специальные разностные схемы, в основе которых лежит противопоточная схема Годунова первого порядка, доказана сходимость разностной схемы.

На Рис.6,7,8 приведены численные результаты моделирования. Синяя область соответсвует области отсутствия вложений в человеческий капитал, когда работники удовлетворены текущей заработной платой в соответствии с накопленным человеческим капиталом; зеленая область соответствует области развития человеческого капитала, когда работник стремится нарастить свои компетенции, чтобы получать более высокую заработную плату $S = \beta(P)$;

красная область соответствует области отсутствия вложений в человеческий капитал, когда работники имеют достаточно высокие накопленные компетенции при низкой заработной плате и ожидают появления подходящей вакансии на рынке труда для получения заработной платы $S = \beta(P)$.

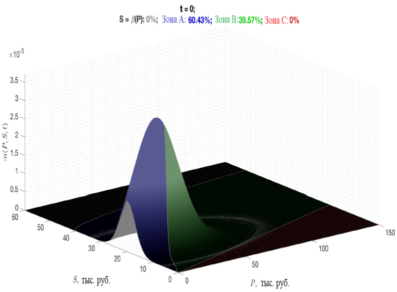

Рис. 6: Плотность распределения работников в момент времени $t = 0$.

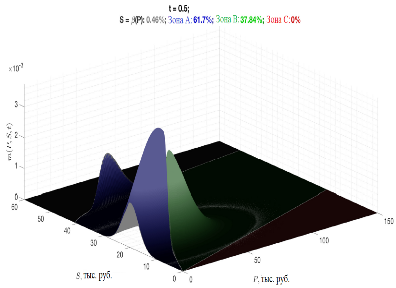

Рис. 7: Плотность распределения работников в момент времени $t = 0.5$.

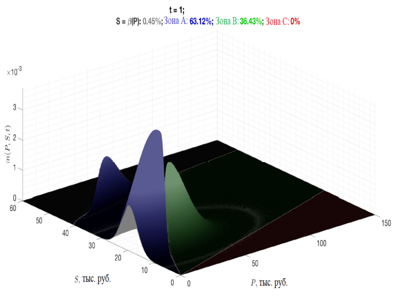

Рис. 8: Плотность распределения работников в момент времени $t = 1$.

В **параграфе 3.3** исследуется групповое поведение населения с подражательным поведением на фондовом рынке на основе концепции игр среднего поля. За основу взята модель, предложенная Л. Фатоне, Ф. Мариани, М.С. Реккиони и Ф. Цирилли[1]. Данная модель описывает поведение высокочастотных трейдеров, пытающихся извлечь прибыль из колебаний цены акции. Высокочастотные трейдеры делятся на два типа: проницательные и непрофессиональные. Проницательные трейдеры изучают экономическую структуру фондового рынка, экономические ситуации, отчеты и способны спрогнозировать дальнейшее поведение курсовой стоимости акции. Поведение непрофессиональных трейдеров несильно отличается друг от друга, они стараются придерживаться одинаковых стратегий, избегать реализации больших пакетов акций.

Запас акций $x(t)$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = \alpha(t, x(t))dt + \sigma dW(t), \quad x_0 = \tilde{x}_0,$$

где $\sigma > 0$, $\tilde{x}_0$ является случайной величиной с заданным начальным распределением $m_0(x)$, $\alpha(t, x(t))$ характеризует покупку или продажу акций трейдером.

[1] Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C., Zirilli F. A Trading Execution Model Based on Mean Field Games and Optimal Control. // Applied Mathematics. 2014. Vol.5. P.3091-3116.

Оптимальная стратегия агентов описывается связанной системой уравнений в частных производных (27), (28): уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, эволюционирующего в прямом времени и уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, эволюционирующего в попятном времени. Связь этих уравнений осуществляется через функцию управления $\alpha(t,x) = \frac{1}{2k(t)}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$.

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{1}{2k(t)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}m\right) = 0, \quad m(0,x) = m_0(x), \tag{27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4k(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \lambda(t)\left(x - \tilde{a}(t)\right)^2 = -V(m), \quad u(T,x) = 0, \tag{28}$$

где $k(t) > 0$, $\lambda(t) > 0$, $\tilde{a}(t) \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \geqslant 0$, $t \in [0,T]$. Наличие краевых условий в начальный и конечный моменты времени и рассматриваемого магистрального эффекта характеризуют плохую обусловленность задачи. Это приводит к численным трудностям решения краевой задачи для уравнений в частных производных.

В 2010г Э. Лашапель предложил использовать вариационный подход к численному анализу модели группового поведения на основе концепции игры среднего поля[1]. Подход основан на построении задачи минимизации функционала от функции распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве. Ограничения в этой вариационной задаче задаются уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка и начальными условиями на функцию распределения.

Вместо задачи (27), (28) предлагается рассмотреть экстремальную задачу

$$J(m,\alpha) = \int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}} \left(G(m) + \left(-k(t)\alpha^2 - \lambda(t)(x-\tilde{a}(t))^2\right)m\right)dxdt - \\ - \theta\int\limits_{\mathbb{R}}(x-a)^2 m(T,x)dx \to \max, \tag{29}$$

где $V = \frac{\partial G}{\partial m}$, $m(t,x)$ является решением уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha m) = 0, \quad m(0,x) = m_0(x). \tag{30}$$

Функционал (29) подбирается таким образом, чтобы сопряженные переменные (множители Лагранжа) в этой вариационной задаче удовлетворяли уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана в исходной постановке игры среднего поля, а условия трансверсальности совпадали с условиями на функции цены в конечный момент времени.

Численные методы решения экстремальной задачи (29), (30) основываются на использовании монотонных разностных схем. Данный подход применяется для решения билинейных задач управления и основывается на специальных разложениях на множители функционала (29). Использование монотонных разностных схем позволяет вычислить максимизирующую последовательность $\alpha^\kappa(t,x)$, $\kappa \in \mathbb{N}$. Для этого необходимо потребовать выпуклость функции $G(m)$ по m в функционале (29). Подробное использование алгоритма монотонных разностных схем отражено в основном тексте диссертационной работы.

Проверку корректности численного алгоритма решения экстремальной задачи (29), (30) можно осуществить в частном случае, когда имеет место редукция системы уравнений в частных производных (27), (28) к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати. Данная редукция имеет место быть при рассмотрении в качестве начального распределения нормального распределения, а в качестве функции $V(m)$ использовать логарифмическую, т.е. $V(m) = \ln m$. Результаты численного решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати, численного решения экстремальной задачи (29), (30) и абсолютная разность двух решений приведены на Рис.9.

[1] Lachapelle A., Salomon J., Turinici G. Computation of mean field equilibria in economics // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2010. Vol.20. No.4. P. 567-588.

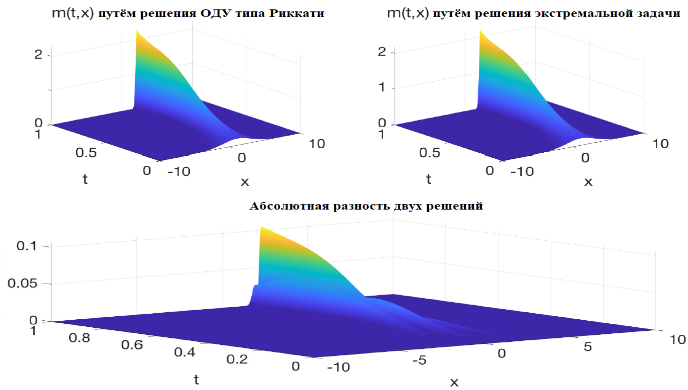

Рис. 9: Решение обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати (левый верхний график), решение экстремальной задачи (правый верхний график), абсолютная разность двух решений (нижний график). Параметры задачи: $T = 1$, $\mu_0 = 1$, $\delta_0 = 2$, $a = 2$, $\theta = 5$, $\tilde{a}(t) \equiv 3$, $\lambda(t) \equiv 5$, $k(t) \equiv 0.5$, $\sigma = 0.7$.

С помощью модели поведения высокочастотных трейдеров в диссертационной работе исследуется произошедший в 2015г кризис на фондовом рынке Китая. В конце 2014г население Китая было проинформировано о дальнейшем подорожании курсовой стоимости акции CITIC Securities (тикер 600030), которая является репрезентативной акцией инвестиционных банков. Будем рассматривать $n \in \mathbb{N}$ классов непрофессиональных трейдеров, каждый из которых описывается игрой среднего поля (27), (28) со своим набором параметров. Формирование курсовой стоимости акции $S(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dS}{dt} = S(t)\left(\sum_{\ell=1}^{n} M_\ell(t) + f(t) + h\delta(t-\hat{\tau})\right), \quad S_0 = \tilde{S}_0,$$

где $M_\ell(t) = \eta_\ell \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha_\ell(t, x_\ell) m_\ell(t, x_\ell) dx_\ell$, $\eta_\ell > 0$, $\ell = \overline{1, n}$ определяет влияние ℓ-го класса непрофессиональных трейдеров на курсовую стоимость акции; $f(t)$ характеризует влияние проницательных трейдеров в момент времени $t \in [0, T]$. Последнее слагаемое, $h\delta(t - \hat{\tau})$, $h > 0$, характеризует скачок курсовой стоимости акции в момент времени $t = \hat{\tau}$.

Непрофессиональные трейдеры, действуя спекулятивно, хотят купить акции по низкой цене, а продать по высокой. Таким образом, непрофессиональные трейдеры должны реагировать на изменение курсовой стоимости акции. Мы полагаем, что функционал ℓ-го класса непрофессиональных трейдеров можно описать следующим образом, $\ell = \overline{1, n}$:

$$J_\ell = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} \Bigg[G_\ell\left(m_\ell(t, x_\ell)\right) - \tilde{k}_\ell \exp\left(-\frac{1}{S(t)}\left|\frac{dS}{dt}\right|\right) \alpha_\ell^2(t, x_\ell) m_\ell(t, x_\ell) -$$

$$- \tilde{\lambda}_\ell \exp\left(\frac{1}{S(t)}\left|\frac{dS}{dt}\right|\right)\left(x_\ell - \xi_\ell \frac{1}{S(t)}\frac{dS}{dt} - C_\ell\right)^2 m_\ell(t, x_\ell)\Bigg] dx_\ell dt \to \max_{\alpha_\ell}. \quad (31)$$

Здесь $\tilde{k}_\ell > 0$, $\tilde{\lambda}_\ell > 0$, $\xi_\ell > 0$, $C_\ell \in \mathbb{R}$ — известные константы, $\ell = \overline{1, n}$. Сопоставляя (31) с (29), мы ставим в соответствие функции $k(t) = \tilde{k} \exp\left(-\frac{1}{S(t)}\left|\frac{dS(t)}{dt}\right|\right)$, $0 < \underline{k} \leqslant k(t) \leqslant \overline{k}$; $\lambda(t) = \tilde{\lambda} \exp\left(\frac{1}{S(t)}\left|\frac{dS(t)}{dt}\right|\right)$, $0 < \underline{\lambda} \leqslant \lambda(t) \leqslant \overline{\lambda}$; $\tilde{a}(t) = \xi \frac{1}{S(t)}\frac{dS(t)}{dt} + C$, $\underline{\tilde{a}} \leqslant \tilde{a}(t) \leqslant \overline{\tilde{a}}$. Здесь $\underline{k}$, $\overline{k}$, $\underline{\lambda}$,

$\overline{\lambda}$, $\underline{\tilde{a}}$, $\overline{\tilde{a}}$ известные константы. Выбор функций $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$ такого вида заключается в следующем: когда курсовая стоимость акции меняется, непрофессиональные трейдеры реагируют на ее производную. Непрофессиональные трейдеры готовы больше рисковать при резком изменении курсовой стоимости акции (так, чем больше по модулю значение производной цены акции, тем меньше значение функции $k(t)$). В то же время, при изменении курсовой стоимости непрофессиональные трейдеры стремятся к магистрали $\tilde{a}(t)$ (значение функции $\lambda(t)$ увеличивается). Параметр C является стационарной позицией непрофессиональных трейдеров — он отражает прогноз непрофессиональных трейдеров относительно дальнейшей курсовой стоимости акции. Введенные ограничения на функции $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$ не позволяют непрофессиональным трейдерам оперировать большими транзакциями на фондовом рынке.

В диссертационной работе рассматриваются два класса непрофессиональных трейдеров, имеющие противоположные стратегии. В результате идентификации стратегий высокочастотных трейдеров, большинство непрофессиональных трейдеров не смогли извлечь прибыли из торговых позиций, в отличие от проницательных трейдеров. Результаты моделирования курсовой стоимости акции CITIC Securities (тикер 600030) изображены на Рис.10.

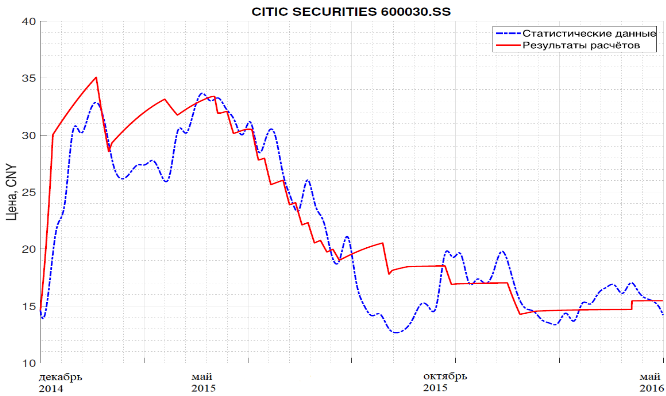

Рис. 10: Сравнение моделируемой динамики курсовой стоимости акции с реальными данными.

В заключении сформулированы основные результаты работы, полученные в диссертации.

Результаты, выносимые на защиту

1. Предложена математическая модель описания репрезентативного рационального экономического поведения домашнего хозяйства на несовершенном рынке потребительского кредита. Данная модель является модификацией модели рамсеевского типа. Задача оптимального управления имеет ряд особенностей, таких как негладкость правой части дифференциального уравнения фазовой переменной и некомпактность управления. Доказана теорема о существовании решения. Получены необходимые условия оптимальности принципа максимума Понтрягина в форме Кларка. Построен синтез задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте, допускающий особые режимы.

2. Исследована новая модель формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков, оценивающих риски дефолта заемщиков. По формуле Фейнмана–Каца учет рисков невозврата

потребительского кредита сводится к решению краевой задачи для уравнения с частными производными. Установив связь с уравнением Абеля, решение краевой задачи сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности с внешним источником, получены оценки рисков в аналитической форме.

3. Разработаны специализированные программные комплексы для идентификации репрезентативных домашних хозяйств в различных социальных слоях России, основываясь на статистических данных. Программные комплексы применены для анализа состояния отечественного рынка потребительского кредита.

4. Исследована математическая модель поведения работника на рынке труда в виде задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте. Предложен алгоритм построения синтеза оптимального управления. Модель идентифицирована по данным российской статистики в различных социальных слоях населения.

5. Исследовано групповое поведение экономических агентов на основе концепции игр среднего поля. Проведена идентификация группового поведения различных социальных слоев на отечественном рынке потребительского кредита на основе статистических данных.

6. Исследована математическая модель группового поведения населения на рынке труда, в которой заработная плата работника описывается стохастическим дифференциальным уравнением с процессом Леви. Выведено уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка с интегральным краевым условием, которое описывает динамику распределения работников по доходам и уровням компетенций, построены разностные схемы для его численного решения.

7. Разработана модификация математической модели группового поведения агентов с подражательным эффектом на фондовом рынке. Идентификация модели позволила воспроизвести на качественном уровне среднесрочную динамику кризиса на Шанхайской фондовой бирже в 2015г.

Таким образом, разработан инструмент математического моделирования, который может быть использован при анализе сценариев, принятии управленческих решениях.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, академику РАН Александру Алексеевичу Шананину за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Публикации автора по теме диссертации

Список работ, индексированных в международных базах цитирования WoS/Scopus

1. Trusov N.V. Numerical solution of mean field games problems with turnpike effect // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol.41. No.4. P.559-573. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.8, SJR: 0.45). [1.73 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати.

2. Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. Consumer loan demand modeling// Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol.1476. P.417-428. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, Scopus, SJR: 0.2). [1.39 п.л. / 1.1 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, акад. А.А. Шананиным и М.В. Тарасенко поставлены задачи и намечены направления их решения.

3. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т.61. №6. С.1034-1056. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ: 1.115). [2.66 п.л. / 2.2 п.л.]

   Перевод:

   Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. Mathematical Modeling of Household Economy in Russia // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. No.6. P.1030-1051. (RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.7, SJR: 0.43). [2.66 п.л. / 2.2 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, акад. А.А. Шананиным и М.В. Тарасенко поставлены задачи и намечены направления их решения.

4. Trusov N.V. Numerical study of the stock market crises based on mean field games approach // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2021. Vol.29. No.6. P.849-865. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.9, SJR: 0.55). [1.96 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати.

5. Shananin A.A., Trusov N.V. The household behavior modeling based on mean field games approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol.42. No.7. P.1738-1752. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.8, SJR: 0.45). [1.73 п.л. / 1.4 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, акад. А.А. Шананиным поставлены задачи и намечены направления их решения.

6. Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование рынка потребительского кредита в России в условиях санкций // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т.507, №6. С.71-80. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ: 0.863). [1.16 п.л. / 1.05 п.л.]

   Перевод:

   Shananin A.A., Trusov N.V. Mathematical Modeling of the Consumer Loan Market in Russia under Sanctions // Doklady Mathematics. 2022. Vol.106. No.3. P.467-474. (RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.5, SJR: 0.46). [1.16 п.л. / 1.05 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, акад. А.А. Шананиным поставлены задачи и намечены направления их решения.

7. Shananin A., Trusov N. The group behaviour modelling of workers in the labor market// Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2023. Vol.38. No.4. P.219-229. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.5, SJR: 0.24). [1.27 п.л. / 1.1 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, акад. А.А. Шананиным поставлены задачи и намечены направления их решения.

8. Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическая модель динамики человеческого капитала // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т.63. №10. С.1747-1760. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ: 1.115).

   [1.62 п.л. / 1.3 п.л.]

   Перевод:

Shananin A., Trusov N. Mathematical Model of Human Capital Dynamics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Vol.63. No.10. P.1942-1954. (RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.7, SJR: 0.43). [1.62 п.л. / 1.3 п.л.]

Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, акад. А.А. Шананиным поставлены задачи и намечены направления их решения.

9. Trusov N.V. Identification of the household behavior modeling based on modified ramsey model // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol.44. No.1. P.455-469. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.8, SJR: 0.45). [1.73 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати.

10. Shananin A.A., Trusov N.V. Mathematical modeling of the household behavior in the labor market // Lecture Notes in Computer Science. 2023. Vol.13930. P.409-424. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, Scopus, SJR: 0.61). [1.85 п.л. / 1.6 п.л.]

    Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, акад. А.А. Шананиным поставлены задачи и намечены направления их решения.

11. Трусов Н.В. Об одной обратной задаче для уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т.63. №3. С.408-423. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ: 1.115). [1.85 п.л.]

    Перевод:

    Trusov N.V. On One Inverse Problem for the Kolmogorov–Fokker–Planck Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Vol.63. No.3. P.386-400. (RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.7, SJR: 0.43). [1.85 п.л.]

    Работа опубликована в открытой печати.

12. Kuts A.S., Trusov N.V. Analysis of the stock market crisis based on mean field games concept // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol.45. No.1. P.272-286. (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, Web of Science, Scopus, Impact factor: 0.8, SJR: 0.45). [1.73 п.л. / 1.35 п.л.]

    Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Соавтором, А.С. Куць, с помощью обобщенного непараметрического метода была исследована статистика фондового рынка Китая.

Работы из списка журналов, рекомендованных ВАК

1. Трусов Н.В. Применение аппроксимации «среднего поля» в моделировании экономических процессов // Труды ИСА РАН. 2018. Т.68. №2. С.88-91. (Входит в перечень ВАК РФ, импакт-фактор РИНЦ: 0.2). [0.46 п.л.]

   Работа опубликована в открытой печати.

Прочие публикации

1. Trusov N. Application of mean field games approximation to economic processes modeling // IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018). Moscow, October 22-27, 2018. Proceedings. In two volumes. / Editor-in-chief F. Ereshko. MAKS Press Moscow. 2018. V.1. P. 208-212.

2. Трусов Н.В. Применение аппроксимации среднего поля в моделировании экономических процессов // Сборник тезисов лучших выпускных квалификационных работ факультета ВМК МГУ 2018г. — Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс Москва. 2018. С.41-43.

3. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Моделирование спроса на потребительское кредитование // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов-2020 / Под ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. Т.2. Москва: ООО МАКС Пресс. 2020. С.125-128.

4. Обросова Н.К., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование некоторых последствий пандемии covid-19 для экономики России // IV Российский Экономический Конгресс. 2020. Т.3. С.59-62.

5. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование спроса на потребительское кредитование домашних хозяйств в России // Современные проблемы математики и физики, материалы научной конференции (г. Стерлитамак, 12-15 сентября 2021г). РИЦ БашГУ Уфа. 2021. Т.2. С.191-196.

6. Шананин А.А., Тарасенко М.В., Трусов Н.В. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств РФ в условиях пандемии covid-19 // ИБ ОмГТУиИМ СО РАН. 2021. Т.5. С.64-66.

7. Шананин А.А., Трусов Н.В. Анализ влияния санкций на экономическое положение домашних хозяйств в России // Прикладная математика и фундаментальная информатика. Материалы XII Международной молодежной научно-практической конференции с элементами научной школы. ОмГТУ Омск. 2022. С.32-33.

8. Трусов Н. В., Шананин А. А. Исследование модели динамики человеческого капитала // Материалы XIII Международной молодежной научно-практической конференции с элементами научной школы. Омск: Омский государственный технический университет. 2023. С.76-77.

Свидетельства о регистрации программных комплексов

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2022619524 «Анализ спроса на потребительский кредит в РФ». Правообладатель: Трусов Николай Всеволодович. Заявка No. 2022618580. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2022г.

2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2023685691. «Программный комплекс для анализа экономического поведения домашних хозяйств в РФ». Автор: Трусов Николай Всеволодович. Правообладатель: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"Российской академии наук»(ФИЦ ИУ РАН). Заявка No.2023685460. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 29 ноября 2023г.

3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2023685827. «Моделирование экономического поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка кредитов». Автор: Трусов Николай Всеволодович. Правообладатель: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"Российской академии наук»(ФИЦ ИУ РАН). Заявка No.2023685469. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 30 ноября 2023г.

Формат А5. Бумага офсетная.
Подписано в печать__.__.____. Заказ №_________________
Тираж 100 экз.
Типография: ______________________________________