Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Агальцов Алексей Дмитриевич

Исследование задач обращения и характеризации для обобщённого преобразования Радона и оператора Дирихле–Неймана

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Шананин Александр Алексеевич

Москва — 2016

Содержание

Введение **3**

1 Характеризация обобщённого преобразования Радона **27**
1.1 Основные определения и постановка задач 27
1.2 Непрерывность и характеризация 35
1.3 Формула коплощади и следствия из неё 39
1.4 Доказательство теорем 1.1 и 1.2 43
1.5 Доказательство теорем 1.3 и 1.4 48

2 Обращение обобщённого преобразования Радона **53**
2.1 Основные результаты 53
2.2 Доказательство теоремы 2.1 58
2.3 Аналоги тауберовых теорем Винера 60
2.4 Доказательство теорем 2.2 и 2.3 64
2.5 Доказательство теорем 2.4, 2.5 и предложений 2.1, 2.2 67

3 Обратная задача Дирихле–Неймана и её приложения в акустической томографии **75**
3.1 Основные определения и постановка задач 75
3.2 Приложения к акустической томографии 81
3.3 Доказательство теорем 3.1, 3.2 и 3.5 85
3.4 Доказательство теорем 3.3 и 3.4 87

4 Сведение обратной задачи Дирихле–Неймана к обратной задаче рассеяния **94**
4.1 Случай нулевых фоновых коэффициентов 94
4.2 Случай известных фоновых коэффициентов 97
4.3 Доказательство теоремы 4.3 101
4.4 Доказательство теоремы 4.4 110

5 Решение обратной задачи рассеяния **120**
5.1 Нелинеаризованный алгоритм 120
5.2 Алгоритм в борновском приближении 127
5.3 Вывод нелинеаризованного алгоритма 134
5.4 Доказательство теорем 5.2, 5.3 и 5.4 142
5.5 Доказательство предложений 5.2 и 5.3 146

Заключение **153**

Список обозначений **155**

Список литературы **156**

Введение

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются вопросы обращения и характеризации для обобщённого преобразования Радона и для оператора Дирихле–Неймана. При этом оператор Дирихле–Неймана может рассматриваться как нелинейный аналог обобщённого преобразования Радона. Обобщённое преобразование Радона и оператор Дирихле–Неймана возникают во многих моделях математической экономики и математической физики, выступая в качестве измеряемых величин. При этом, как правило, обобщённое преобразование Радона линейно зависит от подлежащих определению параметров модели, тогда как оператор Дирихле–Неймана зависит от них нелинейно. Основными важными с прикладной точки зрения задачами для этих операторов являются задача определения по ним параметров модели (обращение) и задача описания образа этих операторов (характеризация). Сделаем несколько замечаний относительно моделей, в которых возникают эти задачи, и актуальности изучения этих задач.

Важной проблемой современной макроэкономики является проблема микрооснований. Ранние макроэкономические модели основывались на определённых предположениях о макроскопических величинах. Этот подход породил многочисленные споры о правомерности таких предположений и о соответствии этих предположений законам микроэкономики. В результате возникли макроэкономические модели, получающиеся агрегированием микроэкономических описаний.

В теории производственных функций первая модель такого типа была предложена Хаутеккером в работе [44]. В этой работе было показано, что производственная функция Кобба–Дугласа возникает как агрегированная производственная функция отрасли, состоящей из производственных единиц с леонтьевскими[1] технологиями производства в случае паретовского распределения ресурсов. Основываясь на модели из статьи [44], Иохансен в работе [46] предложил общий формализм для построения производственных функций отраслей, представимых как объединение производственных ячеек с леонтьевскими технологиями производства. В статье [41] было показано, что при достаточно общих условиях производственная функция отрасли имеет не более одного описания в рамках этой модели, а это описание может быть получено с помощью явной

[1]Под леонтьевскими технологиями производства понимаются технологии с фиксированными пропорциями затрат производственных факторов

формулы.

Модель производства из работ [44, 46] оказалась полезной для исследования макроэкономических процессов в таких странах как Норвегия, Швеция, США, Индия, Япония и другие, см., например, [46, 103, 104]. В частности, эта модель оказалась хорошо приспособленной для учёта изменений в структуре производства в результате научно-технического прогресса, см. [46]. Однако область применимости этой модели ограничена производственными системами, удовлетворяющими определённым строгим критериям в терминах производственных функций, см. [41].

В 1990х-2000х мировая экономика столкнулась с вызовом глобализации. В этом процессе производители интегрируются в глобальные рынки через экспорт своей продукции и импорт ресурсов и технологий. При этом разница в темпах инфляции на внутренних и глобальных рынках приводит к тому, что доля импортируемых ресурсов, используемых в производстве, постоянно меняется. Это приводит к необходимости пересмотра и модификации агрегированных моделей производства, основанных на предположении о леонтьевских технологиях производства на микроуровне. Более детальное обсуждение проблем, которые ставит глобализация перед микроэкономикой, в том числе касательно агрегированных экономических моделей, см., например, в [77].

Пересмотр и модификация модели Хаутеккера–Иохансена были осуществлены в работах [69, 110, 109]. Модифицированная модель (которую мы будем называть обобщённой моделью Хаутеккера–Иохансена) представляет собой общий формализм для построения производственных функций отраслей, представимых как объединение производственных единиц с неоклассическими технологиями производства, допускающими замещение производственных факторов. Ответ на вопрос о целесообразности использования этой модели для описания производства в условиях глобализации во многом определяется тем, насколько просто решаются следующие задачи:

1. Характеризация тех отраслей производства, для которых возможно описание в рамках этой модели.
2. Характеризация тех отраслей, для которых это описание единственно. В случае единственности описания, его получение по макроуровневой информации (по производственной функции отрасли).

Эти задачи, в свою очередь, сводятся к задачам характеризации и обращения для обобщённого преобразования Радона, которое просто выражается через функцию прибыли в этой модели, см. [109] и [104, Глава 6].

Теперь сделаем несколько замечаний относительно моделей, в которых возникает изучаемый в диссертации оператор Дирихле–Неймана, и относительно актуальности изучения задачи обращения для этого оператора, называемой в литературе обратной задачей Дирихле–Неймана. Мы изучаем обратную задачу Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера (иногда называемого оператором типа Шрёдингера во внешнем поле Янга–Миллса), частным случаем которого является оператор Шрёдингера в магнитном поле. Изучение обратной задачи Дирихле–Неймана для оператора Шрёдингера восходит к работе [18].

Одним из приложений обратной задачи Дирихле–Неймана, мотивировавших настоящее исследование, является акустическая томография сред с течениями. В акустической томографии исследуемый объект зондируется с помощью акустических волн. Отражённые волны замеряются и используются в качестве исходных данных для нахождения параметров объекта. Изучаемый в диссертации случай соответствует ситуации, когда в качестве исследуемого объекта выступает неоднородная среда, в которой возможны течения (например, тело пациента или акватория океана). Акустические волны используются для извлечения информации как о скалярных неоднородностях среды (например, скорости звука), так и о векторных неоднородностях (течения). Рассматриваемая в диссертации модель акустической томографии сред с течениями рассматривалась в частных случаях в работах [97, 67, 66]. Эта задача имеет важные приложения в медицинской томографии и в томографии океана.

Изучаемая обратная задача Дирихле–Неймана также имеет приложения в квантовой теории рассеяния. В обратной задаче квантовой теории рассеяния пучки частиц используются для извлечения информации о потенциалах внешних полей, с которыми они взаимодействуют. Для этого на потенциал направляют пучок частиц с заданным волновым вектором и измеряют количество частиц, рассеивающихся в разных направлениях. Вероятностная амплитуда обнаружить частицу в данном телесном угле, известная при разных волновых векторах падающих пучков частиц, используется в качестве исходных данных для нахождения потенциала. Рассматриваемый в диссертации случай соответствует рассеянию заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле (см. [25, 26]), а также рассеянию частиц с цветовым зарядом во внешнем поле Янга-Миллса (см., например, [71, 27]).

Цель работы. Основные цели работы могут быть кратко сформулированы следующим образом:

1. Получить условия характеризации обобщённого преобразования Радона, возникающего в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена.
2. Найти формулы обращения и критерии обратимости обобщённого преобразования Радона.
3. Получить условия обратимости оператора Дирихле–Неймана, возникающего в модели акустической томографии сред с течениями.
4. Предложить алгоритм приближённого решения обратной задачи Дирихле–Неймана.

Основные результаты.

1. Получены условия характеризации обобщённого преобразования Радона, обобщающие теорему Бернштейна характеризации преобразования Лапласа.
2. Получены критерии обратимости обобщённого преобразования Радона в терминах нулей преобразования Меллина функции, задающей гиперповерхности интегрирования. Получена явная формула обращения.
3. Указаны необходимые и достаточные условия единственности решения обратной задачи Дирихле–Неймана, возникающей в модели акустической томографии движущейся жидкости.
4. Получены формулы и уравнения, сводящие обратную задачу Дирихле–Неймана к обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии.
5. Предложен алгоритм приближённого решения соответствующей обратной задачи рассеяния. Приведена его линеаризованная версия в случае малых коэффициентов.

Теоретическая и практическая значимость. Первая часть настоящей работы посвящена развитию математического аппарата описания производства в отраслях в рамках формализма распределения мощностей по технологиям с учётом замещения ресурсов на микроуровне (т.е. в рамках обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена). Основным вкладом этой части работы можно считать следующие результаты:

1. Задача характеризации тех отраслей производства, для которых возможно описание с помощью формализма распределения мощностей по технологиям при учёте взаимного замещения ресурсов на микроуровне, сводится к явно проверяемым условиям (к теореме характеризации типа Бернштейна для обобщённого преобразования Радона).

2. Вопрос о единственности описания отрасли с помощью обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена сводится к проверке элементарного математического условия в терминах производственной функции отрасли на микроуровне. В случае единственности такого описания приводится явная формула получения микроописания отрасли (распределения мощностей по технологиям) по её макроописанию (по функции прибыли отрасли).

Вторая часть настоящей работы посвящена вопросам единственности и восстановления в обратной задаче Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера. В работе эта задача рассматривается в приложении к одной модели акустической томографии движущейся жидкости. Основным вкладом этой части работы являются следующие результаты:

3. Приводятся явные формулы и уравнения, сводящие задачу восстановления параметров жидкости по граничным измерениям при фиксированной частоте к многомерной обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии.

4. Приводится алгоритм приближённого решения соответствующей обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии по модулю подходящих калибровочных преобразований.

5. Показывается, что идентифицируемость параметров жидкости по граничным измерениям при нескольких частотах определяется частотной зависимостью коэфициента поглощения. В случае идентифицируемости демонстрируется, как избавиться от калибровочной неединственности и восстановить параметры жидкости, используя граничные измерения при нескольких частотах.

Методы исследования. В диссертации используются различные методы функционального анализа и теории уравнений в частных производных. При решении задач обращения и характеризации для обобщённого преобразования Радона используются методы гармонического анализа (аналога теории преобразования

Фурье) в $\mathbb{R}^n_+$. При этом аналогом преобразования Фурье выступает преобразование Меллина.

При решении обратной задачи Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера, в частности, используются теория Фредгольма в банаховых пространствах, метод нелокальной задачи Римана–Гильберта и глобальные теоремы единственности для уравнения Лапласа с линейными или нелинейными возмущениями первого порядка.

Научная новизна. В диссертациии продолжается исследование обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена, которая была предложена и начала исследоваться в работах [69, 110, 109]. Полученные теоремы обращения и характеризации для обобщённого преобразования Радона обобщают результаты из работы [41] на случай искривлённых поверхностей интегрирования, с одной стороны, и известную теорему Бернштейна–Бохнера о вполне монотонных функциях (см. [14]) со случая преобразования Лапласа на случай интегральных операторов типа Радона.

Рассматриваемая модель акустической томографии сред с течениями в различных частных случаях изучалась в работах [97, 66, 67] и [7]. В диссертации эта модель впервые рассматривается в случае, когда одновременно учитываются (а в некоторых из случаев, к тому же, предполагаются неизвестными) такие параметры жидкости, как скорость звука, скорость течения, плотность и коэффициент поглощения.

Формулы и уравнения, сводящие обратную задачу Дирихле–Неймана к обратной задаче рассеяния, обобщают формулы и уравнения из работ [98, 59, 61] на случай калибровочно-ковариантных операторов Шрёдингера. Эти результаты являются новыми даже в случае скалярных коэффициентов.

Описываемый в диссертации алгоритм решения обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии может рассматриваться как упрощённая и усовершенствованная версия алгоритма, упоминающегося в работе [57, с. 457] в случае самосопряжённых операторов Шрёдингера.

Публикации. По теме диссертации соискателем опубликовано 13 работ. Из них работы [85, 87, 88] опубликованы в российских журналах из перечня ВАК и не имеют соавторов. Работы [7, 3, 4, 8, 5] опубликованы в зарубежных журналах, включенных в Web of Science и/или Scopus. Из них работы [3, 4] не имеют соавторов, работы [7, 8] выполнены в нераздельном соавторстве с Р. Г. Новиковым и подготовлены во время стажировок соискателя в Ecole Polytechnique (Франция), а работа [5] выполнена в нераздельном соавторстве с Г. М. Хенкиным. Кроме того, работа [2] опубликована в недавно основанном журнале и не имеет соавторов, работы [82, 86] – тезисы докладов, а работы [83, 84] опубликованы в сборниках лучших курсовых и дипломных работ.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих международных конференциях и семинарах:

1. Конференция «МФТИ-55», 19.11-25.11.2012, г. Долгопрудный
2. Семинар «Quasilinear equations and inverse problems», 2.08.2013, Москва
3. Конференция «МФТИ-56», 25.11-30.11.2013, г. Долгопрудный
4. Семинар «Quasilinear equations and inverse problems», 4.08.2014, Москва
5. Конференция «МФТИ-57», 24.11-29.11.2014, г. Долгопрудный
6. Семинар «Inverse Problems» , 2.11.2015, Göttingen University, Германия
7. Конференция «Quasilinear equations, inverse problems and their applications», 30.11-01.12.2015, Долгопрудный
8. Семинар аспирантов, 22.01.2016, Ecole Polytechnique, Франция
9. Конференция «Inverse problems for PDEs», 29.03-01.04.2016, Бремен, Германия
10. Семинар «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения», 23.05.2016, ЦЭМИ, Москва
11. Семинар «Прикладные задачи системного анализа», 30.05.2016, МГУ, Москва

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Эти пять глав можно разделить на две независимые части. Главы 1 и 2 посвящены исследованию обобщённого преобразования Радона, возникающего в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена. Основные результаты главы 1 опубликованы в работах [86] и [88], а главы 2 — в работе [87].

Главы 3–5 посвящены исследованию обратной задачи Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера и его частных случаев. Результаты главы 3 опубликованы в работах [4, 8, 2], главы 4 — в работе [3], а главы 5 — в работе [7].

Ниже мы кратко изложим содержание глав 1–5.

В **первой главе** диссертации мы определяем обобщённое преобразование Радона и интегральные операторы типа Радона и рассматриваем вопросы их непрерывности и характеризации. В **параграфе 1.1** мы приводим основные определения и постановки задач. Обобщённое преобразование Радона R_q определяется следующей формулой

$$(R_q f)(p) = \int_{q_p^{-1}(1)} f(x) \frac{dS_x}{|\nabla q_p(x)|}, \quad p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1}$$

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}, \tag{2}$$

где $q_p(x) = q(p_1x_1, \ldots, p_nx_n)$, ∇ — стандартный градиент по переменной x, dS_x — поверхностная мера на гиперповерхности $q_p^{-1}(1) = \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid q_p(x) = 1\big\}$, а функция q удовлетворяет следующим свойствам:

$$q \in C^1(\mathbb{R}^n_+),\ q > 0 \ \textit{и}\ q(\lambda x) = \lambda q(x) \ \textit{при}\ \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3}$$

Оператор R_q является частным случаем обобщённого преобразования Радона в смысле [13]. Интегральные операторы R_q^h определяются формулой

$$(R_q^h \mu)(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h\big(q(p_1x_1, \ldots, p_nx_n)\big)\mu(dx), \quad p \in \mathbb{R}^n_+, \tag{4}$$

где $h\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}$. В частности, случаю $h(t) = \max\{0, p_0 - t\}$ соответствует функция прибыли в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена:

$$(\Pi_q \mu)(p_0, p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \max\big\{0, p_0 - q(p_1x_1, \ldots, p_nx_n)\big\}\mu(dx), \quad p_0 > 0,\ p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{5}$$

В этой модели величины в формуле (5) интерпретируются следующим образом. Функция q описывает (микроуровневые) технологии производства в терминах себестоимости единицы выпускаемой продукции, мера μ задаёт распределение мощностей по технологиям, а число p_0 и вектор p представляют собой цены за единицу выпускаемой продукции и производственных факторов, соответственно.

Свойства (3) описывают неоклассические технологии производства общего вида, допускающие замещение производственных факторов. Однако на практике технологии часто аппроксимируют стандартными функциями, идентифицируя параметры по статистическим данным. При этом выбор стандартных функций зависит от того, в какой мере производственные факторы друг друга замещают.

Наиболее используемой характеристикой замещаемости производственных факторов является эластичность их замещения, введенная в [42] в случае двух факторов. В общем случае определение эластичности замещения по статистическим данным затруднительно, и на практике делается предположение о её постоянности. Случай нулевой эластичности соответствует леонтьевским производственным технологиям, а случай единичной — производственной функции Кобба–Дугласа, введённой в [23]. Функция Кобба–Дугласа является простейшей и наиболее используемой на практике производственной функцией, допускающей замещение факторов, однако её область применения сильно ограничена. К примеру, согласно [19], существуют отрасли производства, в которых эластичность замещения труда и капитала может быть меньше одного.

Общая двухфакторная производственная функция с постоянной эластичностью замещения (CES-функция) была введена в работе [19]. Возможные обобщения на случай произвольного числа факторов были предложены Allen и Hicks, Uzawa, McFadden, Morishima и другими, краткий обзор см. в [31]. Тем не менее, существует единственный класс производственных функций, для которых все эти эластичности замещения постоянны. Этим производственным функциям соответствуют функции себестоимости вида $q = q_\alpha$, $\alpha \in [-\infty, 1]$, где

$$\begin{aligned} q_\alpha(x) &= C\big((a_1x_1)^\alpha + \dots + (a_nx_n)^\alpha\big)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \in (-\infty, 1] \setminus 0, \\ q_{-\infty}(x) &= C\min(a_1x_1, \dots, a_nx_n), \\ q_0(x) &= Cx_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}, \end{aligned} \tag{6}$$

и C, a_1, …, $a_n > 0$, $a_1 + \dots + a_n = 1$. К настоящему времени CES-функции завоевали популярность в теории производства, где они заменяют функции Кобба–Дугласа. Однако важным недостатком CES-функций является то, что они предполагают постоянную эластичность замещения между любой парой производственных факторов.

К. Сато предложил рассматривать вложенные CES производственные функции, позволяющие учитывать различные эластичности замещения между производственными факторами в различных группах, см. [68]. Такие функции позволяют, в частности, учесть, что эластичность замещения капитала и неквалифицированной рабочей силы выше, чем капитала и квалифицированной (так называемый эффект комплементарности «капитал-квалификация», впервые формализованный в [35]).

В диссертации мы рассматриваем класс CES-функций и более общий класс производственных технологий, описываемых функциями себестоимости q вида (3), удовлетворяющими условию, что

$$\textit{множества уровня функции } q \textit{ ограничены.} \tag{7}$$

Заметим, что класс технологий, описываемых функциями q вида (3), (7), содержит линейные функции с положительными коэффициентами, CES-функции с $\alpha \in (0, 1]$ и замкнут относительно частичной композиции. Под частичной композицией функций $q\colon \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k \geq 2$, и $\phi\colon \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $m \geq 2$, по аргументу $i \in \{1, \dots, k\}$ понимается функция $\widetilde{q}$, определяемая следующим образом:

$$\begin{gathered} \widetilde{q}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k, y) = q(x_1, \dots, x_{i-1}, \phi(y), x_{i+1}, \dots, x_k), \\ x = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}_+, \quad y \in \mathbb{R}^m_+. \end{gathered} \tag{8}$$

Заметим, что вложенные CES-функции определяются как функции, получающиеся в результате конечного числа частичных композиций CES-функций.

Мы рассматриваем задачи характеризации и обращения для операторов R_q и R^h_q, которые формулируются следующим образом:

Задача 1 (характеризация). *Найти необходимые и достаточные условия на функцию F, при которых она представима в виде $F = R^h_q \mu$ для некоторых h, q и μ.*

Задача 2 (обращение). *Найти необходимые и достаточные условия в терминах q и h, при которых операторы R^h_q и R_q обратимы, и указать формулы обращения.*

В **параграфе 1.2** мы приводим основные результаты, касающиеся непрерывности и характеризации операторов R_q и R^h_q, а в **параграфах 1.3–1.5** мы доказываем эти результаты. Операторы типа преобразования Радона, как правило, удаётся успешно изучать методами гармонического анализа. В случае анализа в $\mathbb{R}^n_+$ вместо преобразования Фурье используются прямое и обратное преобразования Меллина, которые определяются формулами

$$(Mf)(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n_+} x^{z-I} f(x)\, dx, \quad z \in \mathbb{C}^n,\ I = (1, \dots, 1), \tag{9}$$

$$(M_c^{-1}\varphi)(x) = i^{-n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{c+i\mathbb{R}^n} x^{-z}\varphi(z)\, dz, \quad x \in \mathbb{R}^n_+,\ c \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

где возведение вектора в векторную степень понимается в покомпонентном смысле. Оператор M естественно рассматривать на пространствах $L^p_c(\mathbb{R}^n_+)$, $c \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, аналогичных пространствам $L^p(\mathbb{R}^n)$ в случае анализа в $\mathbb{R}^n_+$. $L^p_c(\mathbb{R}^n_+)$ определяется как пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,c} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^{pc-I} dx\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$
$$\|f\|_{\infty,c} = \inf\{K \geq 0\colon |f(x)x^c| \leq K \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

Для преобразования Меллина на пространствах $L^p_c(\mathbb{R}^n_+)$ справедливы аналоги многих теорем для преобразования Фурье на пространствах $L^p(\mathbb{R}^n)$, см. §1.4.

Основным результатом, касающимся непрерывности операторов R_q и R_q^h выступает следующая теорема. Она является аналогом проекционной теоремы для классического преобразования Радона, которая связывает преобразование Фурье функции с преобразованием Фурье её преобразования Радона.

Теорема 1. *Пусть q удовлетворяет (3) и (7). Пусть $f \in L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ при некоторых $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n_+$ и $p \in [1, \infty]$. Пусть $h \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^1_+)$, где $\alpha = c_1 + \dots + c_n$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\|R_q f\|_{p,c} \leq \Gamma(\alpha)^{-1} \|e^{-q}\|_{1,c} \|f\|_{p,I-c}, \tag{11}$$

$$\|R_q^h f\|_{p,c} \leq \Gamma(\alpha)^{-1} \|e^{-q}\|_{1,c} \|h\|_{1,\alpha} \|f\|_{p,I-c}, \tag{12}$$

где Γ — гамма-функция. Кроме того, если $p = 1$ или $p = 2$, то для п.в. $z \in c + i\mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}(Mf)(I-z) \cdot (Me^{-q})(z) = (MR_q f)(z) \cdot \Gamma(z_1 + \dots + z_n), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}(Mf)(I-z) \cdot (Me^{-q})(z) \cdot (Mh)(z_1 + \dots + z_n)& \\ = (MR_q^h f)(z) \cdot \Gamma(z_1 + \dots + z_n)&.\end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что формула (14) остаётся справедливой и в случае, когда оператор R_q^h рассматривается на пространстве борелевских мер.

Затем мы переходим к рассмотрению задачи характеризации для интегральных операторов Радона R_q^h в случае функций q, удовлетворяющих условиям (3) и (7). Положим

$$\rho_q^h(z) = (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma(z_1 + \cdots + z_n)\Gamma(z_1)\cdots\Gamma(z_n)}{(Me^{-q})(z)\cdot(Mh)(z_1+\cdots+z_n)}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n). \qquad (15)$$

Определим оператор T_q^h формулой $T_q^h f = M_c^{-1}\rho_q^h M f$. Используя формулу (14), можно показать, что композиция оператора T_q^h с оператором R_q^h равняется преобразованию Лапласа. Комбинируя этот результат с теоремой характеризации для преобразования Лапласа (теоремой Бернштейна), мы получаем следующую теорему характеризации для оператора R_q^h. Напомним, что функция $g\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ называется вполне монотонной, если $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ и справедливы неравенства

$$(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|} g(p)}{\partial p^\alpha} \geq 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad p \in \mathbb{R}_+^n. \qquad (16)$$

Теорема 2. *Пусть q удовлетворяет (3) и (7) и пусть $(Me^{-q})(z) \neq 0$ п.в. при $\operatorname{Re} z = c$, где $c \in \mathbb{R}_+^n$. Пусть $h \in L_\alpha^2(\mathbb{R}_+^1)$, где $\alpha = c_1 + \cdots + c_n$, и $(Mh)(s) \neq 0$ п.в. при $\operatorname{Re} s = \alpha$. Пусть $\rho_q^h \in L^2(c + i\mathbb{R}^n) \cup L^\infty(c + i\mathbb{R}^n)$.*

При этих условиях функция $f\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ представима в виде $f = R_q^h\mu$, где μ — борелевская мера на $\mathbb{R}_+^n$ такая что $\mu \geq 0$, $\int x^{-c}\mu(dx) < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\|f\|_{2,c} < \infty, \quad \|T_q^h f\|_{1,c} < \infty, \quad T_q^h f \text{ вполне монотонна.} \qquad (17)$$

В заключительной части §1.2 мы обращаемся к задаче характеризации оператора Π_q из формулы (5) в случае, когда $q = q_\alpha$, а q_α определено в формуле (6). Мы решаем задачу характеризации, указывая интегро-дифференциальный оператор F_α, композиция которого с оператором Π_{q_α} является преобразованием Лапласа, и комбинируем этот результат с теоремой характеризации для преобразования Лапласа. Важным преимуществом оператора F_α по сравнению с T_q^h является то, что в нём дифференцирование и интегрирование ведётся только по одной переменной. Этот результат приведён в теореме 1.4. Идея получения оператора F_α была приведена в работе [41] в случае $\alpha = 1$. Эта идея была обобщена на случай произвольных α в работе [86].

Во **второй главе** рассматриватся задача обращения для обобщённого преобразования Радона R_q и для интегральных операторов типа Радона R_q^h, включая случай оператора прибыли Π_q в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена. Основные результаты главы 2 приведены в **параграфе 2.1**, а доказательство этих результатов проводится в **параграфах 2.2–2.5**.

Заметим, что формулы (13) и (14) могут использоваться для обращения операторов R_q и R_q^h. В случае оператора R_q^h, например, требуется выразить Mf через $MR_q^h f$ и воспользоваться формулой обращения для преобразования Меллина M. Однако этот подход требует вычисления несобственного интеграла и не может использоваться на практике. Если же несобственный интеграл заменить собственным интегралом, то мы получим приближённую формулу обращения. Соответствующая ошибка восстановления приводится в теореме 2.1.

Затем мы переходим к рассмотрению вопроса характеризации тех функций q и h, для которых операторы R_q, Π_q и R_q^h являются обратимыми. Для получения критериев обратимости операторов R_q и R_q^h мы доказываем и используем аналоги тауберовых теорем Винера для случая, когда вместо преобразования Фурье используется преобразование Меллина. Тауберовы теоремы Винера позволяют связать полноту в $L^r(\mathbb{R}^n)$ линейной оболочки множества аддитивных сдвигов вида $f_a = f(\cdot - a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, некоторой функции f с величиной множества нулей её преобразования Фурье. Мы переносими эти результаты на случай гармонического анализа в $\mathbb{R}^n_+$. Соответствующие обобщения теорем Винера приводятся в леммах 2.3 и 2.4 из §2.3.

Для краткости будем говорить, что множество S является 1-тощим в плоскости $H \subset \mathbb{C}^n$, если $S \cap H$ нигде не плотно в H; 2-тощим в H, если $S \cap H$ имеет меру нуль в H; и ∞-тощим в H, если $S \cap H = \varnothing$. С помощью аналогов теорем Винера мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть q удовлетворяет* (3) *и* (7). *Пусть $c \in \mathbb{R}^n_+$ и $p \in \{1, 2, \infty\}$. Тогда Π_q инъективен в $L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда R_q инъективен в $L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$. При этом R_q инъективен в $L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда множество нулей функции $(Me^{-q})(z)$ является p-тощим в плоскости $\operatorname{Re} z = c$.*

Аналогичная теорема справедлива для операторов R_q^h общего вида.

В приложении к обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена указанная теорема единственности характеризует отрасли, для которых агрегированная функция прибыли $\Pi_q f$ однозначно определяет распределение мощностей по технологиям f.

Мы также показываем, что инъективность "распространяется" по отношению к частичной композиции (8). Комбинируя это свойство с теоремой 3, мы показываем, что оператор прибыли Π_q, отвечающий вложенной CES-функции q, является инъективным в любом пространстве $L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$, $p \in \{1, 2, \infty\}$, $c \in \mathbb{R}^n_+$.

В заключительной части §2.1 мы изучаем задачу обращения для оператора Π_q в случае, когда $q = q_\alpha$, $\alpha \in [-\infty, 1]$, где q_α определено в формуле (6). В теореме 2.4 мы показываем, что оператор прибыли Π_q является инъективным при $\alpha \neq 0$, а при $\alpha = 0$ мы описываем его ядро. Затем мы рассматриваем более сложную задачу нахождения функций $q = q_\alpha$ и f по функции прибыли $\Pi_q f$. Мы указываем достаточные условия, при которых из представимости функции F в двух разных формах $F = \Pi_{q_1}\mu_1$ и $F = \Pi_{q_2}\mu_2$, где $q_1 = q_{\alpha_1}$, $q_2 = q_{\alpha_2}$ и $q_1 \neq q_2$, следует, что $F = 0$. Эти условия приведены в теореме 2.5.

Основная идея получения этих условий заключается в том, что если $\Pi_{q_1}\mu_1 = \Pi_{q_2}\mu_2$, то оператор, переводящий функцию $\Pi_{q_1}\mu_1$ в преобразование Лапласа некоторой меры, также должен переводить функцию $\Pi_{q_2}\mu_2$ в преобразование Лапласа некоторой меры. Мы показываем, что это невозможно, если меры μ_1 и μ_2 достаточно быстро убывают на бесконечности. Если же отказаться от требования быстрого убывания мер, то можно привести пример двух разных мер μ_1 и μ_2, для которых $\Pi_{q_1}\mu_1 = \Pi_{q_2}\mu_2$ при $q_1 = q_{\alpha_1}$, $q_2 = q_{\alpha_2}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Такой пример приводится в предложении 2.2.

В **третьей главе** мы формулируем обратную задачу Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера и указываем некоторые приложения этой задачи в акустической томографии сред с течениями. В **параграфе 3.1** мы приводим основные определения и постановки задач. Мы рассматриваем следующее уравнение в частных производных:

$$L_{A,V}\psi \equiv -\Delta\psi - 2i\sum_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + V(x)\psi = E\psi, \quad x \in D, \tag{18}$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_d^2},$$

где $A = (A_1, \dots, A_n)$, A_j и V — достаточно регулярные $M_n(\mathbb{C})$-значные функции в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ с границей ∂D, $E \in \mathbb{C}$, а $M_n(\mathbb{C})$ обозначает множество комплексных матриц размера $n \times n$. Оператор $L_{A,V}$ иногда называют оператором типа Шрёдингера во внешнем поле Янга-Миллса (см., например, [27]). В случае $n = 1$ оператор $L_{A,V}$ называют оператором типа Шрёдингера в магнитном поле.

Оператор Дирихле–Неймана $\Lambda_{A,V} = \Lambda_{A,V}(E)$ для уравнения (18) в области D сопоставляет функции f на ∂D функцию $\Lambda_{A,V} f$ на ∂D, которая определяется следующим образом:

$$\Lambda_{A,V} f = \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial\nu} + i\sum\nolimits_{j=1}^{d} A_j \nu_j f\right)\big|_{\partial D}, \tag{19}$$

где ν — единичный внешний вектор нормали к ∂D, а ψ определяется как решение уравнения (18) с граничным условием $\psi|_{\partial D} = f$, при предположении, что соответствующая задача Дирихле имеет единственное решение (иными словами, E не является собственным значением Дирихле для оператора $L_{A,V}$ в области D).

Оператор $\Lambda_{A,V}$ инвариантен по отношению к следующим калибровочным преобразованиям:

$$\begin{cases} A_j \to A_j^g = gA_j g^{-1} + i\dfrac{\partial g}{\partial x_j} g^{-1}, \quad j = 1, \dots, d, & \text{(20a)} \\ V \to V^g = gVg^{-1} - g\Delta g^{-1} - 2i\displaystyle\sum_{j=1}^{d} gA_j \dfrac{\partial g^{-1}}{\partial x_j}, & \text{(20b)} \end{cases}$$

где g – достаточно регулярная $GL_n(\mathbb{C})$-значная функция в замкнутой области $\overline{D}$, $g|_{\partial D} = \mathrm{Id}_n$, $GL_n(\mathbb{C})$ обозначает множество невырожденных матриц размера $n \times n$, а Id_n обозначает единичную матрицу.

Обратная задача Дирихле–Неймана для уравнения (18) формулируется следующим образом.

Задача 3. *Пусть задан оператор $\Lambda_{A,V}(E)$ при фиксированном E (или при E из фиксированного множества). Найти A и V по модулю калибровочных преобразований* (20a), (20b).

Рассмотрим теперь уравнение (18) при $x \in \mathbb{R}^d$, полагая A и V равными нулю вне области D. Мы сформулируем обратную задачу рассеяния для уравнения (18) в $\mathbb{R}^d$, к которой сводится задача 3. Для простоты обозначений предположим, что $E > 0$ и $n = 1$, так что A_j и V являются скалярными функциями. Мы рассматриваем классические решения рассеяния $\psi^+(x, k)$ уравнения (18), параметризованные вектором $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$, и определяемые следующей асимптотикой при фиксированном k:

$$\begin{gathered}\psi^+(x,k) = e^{ikx} + C(d)|k|^{(d-3)/2}\frac{e^{i|k||x|}}{|x|^{(d-1)/2}} f_{A,V}\bigl(k,|k|\tfrac{x}{|x|}\bigr) + O\bigl(|x|^{-(d+1)/2}\bigr),\\ |x|\to\infty, \quad C(d) = -\pi i(-2\pi i)^{(d-1)/2},\end{gathered} \tag{21}$$

где функция $f = f_{A,V}$ заранее неизвестна. Эта функция определена на множестве

$$\mathcal{M}_E = \bigl\{(k,l)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \mid k^2 = l^2 = E\bigr\} \tag{22}$$

и называется амплитудой рассеяния для уравнения (18). Функция ψ^+ может быть найдена из интегрального уравнения типа Липпмана–Швингера

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} + \int_D G^+(x-y,k)\bigl(L_{A,V} - L_{0,0}\bigr)\psi^+(y,k)\,dy, \tag{23}$$

$$G^+(x,k) = -(2\pi)^{-d}\int_D \frac{e^{i\xi x}\,d\xi}{\xi^2 - k^2 - i0}, \tag{24}$$

а амплитуда рассеяния f — из явной формулы

$$f(k,l) = (2\pi)^{-d}\int_D e^{-ily}\bigl(L_{A,V} - L_{0,0}\bigr)\psi^+(y,k)\,dy. \tag{25}$$

Амплитуда рассеяния инвариантна относительно преобразований

$$\begin{cases} A \to A^\varphi = A + \nabla\varphi, & \text{(26a)}\\ V \to V^\varphi = V - i\Delta\varphi + (\nabla\varphi)^2 + 2A\nabla\varphi, & \text{(26b)}\end{cases}$$

где φ — достаточно регулярная функция на $\mathbb{R}^d$ с достаточным убыванием на бесконечности. Обратная задача рассеяния для уравнения (18) в $\mathbb{R}^d$ формулируется следующим образом.

Задача 4. *Пусть задана амплитуда рассеяния f на множестве $\mathcal{M}_E$ при фиксированном $E > 0$ (или при E из фиксированного множества). Найти A и V по модулю калибровочных преобразований* (26a), (26b).

В §3.1 мы формулируем задачу 4 в более общем случае, когда $n \geq 1$ и $E \in \mathbb{C}$, но для этого требуется вводить дополнительные обозначения.

Задача 4 при $n = 1$ возникает, например, в квантовой электродинамике, где f является измеряемой величиной, описывающей рассеяние заряженных частиц в электромагнитном поле (практически, однако, измеряется лишь $|f|$), а коэффициенты A и V задают конфигурацию электромагнитного поля. Инвариантность функции f относительно преобразований (26a), (26b) является отражением принципа относительности Вейля (см. [106]), согласно которому конфигурации электромагнитного поля, соответствующие коэффициентам A, V и коэффициентам A^{φ}, V^{φ}, физически неотличимы. Поэтому достаточно восстанавливать одну из пар коэффициентов, связанную с исходными коэффициентами A, V соотношениями (26a), (26b). Часто на практике фиксируют пару коэффициентов A^{div}, V^{div}, удовлетворяющих условию $\nabla \cdot A^{\mathrm{div}} = 0$ (в терминах электродинамики это называется представлением электромагнитного поля в кулоновской калибровке).

В **параграфе 3.2** мы формулируем основные результаты, касающиеся единственности решения задачи 3 в рамках одной модели акустической томографии сред с течениями. В **параграфах 3.3 и 3.4** мы доказываем эти результаты. В рассматриваемой модели акустической томографии гармоническое по времени ($e^{-i\omega t}$) акустическое давление ψ в движущейся жидкости со скоростью звука $c = c(x)$, скоростью течения $v = v(x)$, плотностью $\rho = \rho(x)$ и коэффициентом поглощения звука $\alpha = \alpha(x, \omega)$ при фиксированной частоте $\omega \geq 0$ удовлетворяет уравнению

$$L_\omega \psi \equiv -\Delta\psi - 2iA_\omega(x) \cdot \nabla\psi - U_\omega(x)\psi = 0, \quad x \in D, \tag{27}$$

$$\begin{gathered} A_\omega(x) = \frac{\omega v(x)}{c^2(x)} + \frac{i}{2}\frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)}, \quad U_\omega(x) = \frac{\omega^2}{c^2(x)} + 2i\omega\frac{\alpha(x,\omega)}{c(x)}, \\ \alpha(x,\omega) = \omega^{\zeta(x)}\alpha_0(x), \end{gathered} \tag{28}$$

где D — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), занимаемая жидкостью. Заметим, что $L_\omega = L_{A_\omega, -U_\omega}$, где оператор $L_{A_\omega, -U_\omega}$ определяется в формуле (18). Из физических соображений вытекают следующие требования:

$$\begin{gathered} c \geq c_{min} > 0,\ \rho \geq \rho_{min} > 0,\ \alpha_0 \geq 0,\ v = \overline{v},\ \zeta = \overline{\zeta}\ \textit{в}\ \overline{D} \\ \textit{для некоторых констант } c_{min} \textit{ и } \rho_{min}. \end{gathered} \tag{29}$$

Обозначим через $\Lambda_\omega = \Lambda_{A_\omega, -U_\omega}$ оператор Дирихле–Неймана для уравнения (27) в D (см. формулу (19)). Нас интересует следующая задача.

Задача 5. *Пусть задан оператор Λ_ω при одной или нескольких частотах ω. Найти параметры жидкости c, v, ρ и α.*

Мы доказываем следующий общий результат об идентифицируемости параметров жидкости по граничным измерениям при трёх частотах в случае, когда поглощение зависит от частоты (т.е. $\zeta \neq 0$ в D).

Теорема 4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ — ограниченная односвязная область с линейно связной границей ∂D, где $\partial D \in C^\infty$ $(d = 2)$ или $\partial D \in C^1$ $(d \geq 3)$. Пусть операторы $L_\omega^{(j)}$ и $\Lambda_\omega^{(j)}$ соответствуют коэффициентам $c^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\alpha_0^{(j)}$ и $\zeta^{(j)}$, удовлетворяющим* (29) *и*

$$\begin{gathered} c \in W^{1,\infty}(D, \mathbb{R}), \ \ \rho \in C(\bar{D}) \cup C^2(D), \ \ v \in W^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^d), \\ \alpha_0 \in C(\bar{D}), \ \ \zeta \in C(\bar{D}), \ \ \zeta \neq 0, \ \ \textit{где } d \geq 3, \end{gathered} \tag{30}$$

либо

$$\begin{gathered} c \in W^{2,p}(D, \mathbb{R}), \ \ \rho \in W^{3,p}(D, \mathbb{R}), \ \ v \in W^{2,p}(D, \mathbb{R}^d), \\ \alpha_0 \in W^{1,p}(D, \mathbb{R}), \ \ \zeta \in C(\bar{D}), \ \ \zeta \neq 0, \ \ \textit{где } p > 2, \ d = 2. \end{gathered} \tag{31}$$

Предположим, что ω_1, ω_2, $\omega_3 \in (0, +\infty)$ — три попарно различных частоты, при которых 0 *не является собственным значением Дирихле для операторов $L_\omega^{(1)}$ и $L_\omega^{(2)}$ в D. Тогда из равенства операторов $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$ при $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ следует, что $c^{(1)} = c^{(2)}$, $\rho^{(1)} = C\rho^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$ и $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$, где $C = \mathrm{const} > 0$ и $\alpha^{(j)}(x, \omega) = \omega^{\zeta^{(j)}(x)} \alpha_0^{(j)}(x)$.*

Для получения этой теоремы мы пользуемся результатами из статей [17], [36], [52] для восстановления коэффициентов A_ω и U_ω по оператору Λ_ω при фиксированном ω с точностью до подходящего калибровочного преобразования. Затем мы показываем, что используя граничные измерения при трёх частотах, можно избавиться от калибровочной неединственности и восстановить параметры c, v, α и ρ. При этом ρ восстанавливается с точностью до положительного постоянного множителя, который не играет роли в описании поведения жидкости (см. формулу (28)).

В теореме 3.5 мы показываем, что зависимость поглощения α от частоты ω является необходимым условием идентифицируемости параметров жидкости. Мы приводим два разных набора параметров жидкости $c^{(1)}$, $v^{(1)}$, $\rho^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$ и $c^{(2)}$, $v^{(2)}$, $\rho^{(2)}$, $\alpha^{(2)}$, где $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ не зависят от ω, таких, что соответствующие операторы Дирихле–Неймана совпадают (т.е. $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$) при всех ω, при которых 0 не является собственным значением Дирихле для $L_\omega^{(1)}$ и $L_\omega^{(2)}$.

Мы также рассматриваем два частных случая задачи 5. Первый случай соответствует непоглощающим жидкостям постоянной плотности (т.е. $\rho \equiv \mathrm{const}$, $\alpha \equiv 0$). Мы показываем, что в этом случае граничные измерения при одной частоте однозначно определяют остальные параметры жидкости, см. предложение 3.1. Второй случай соответствует непоглощающим жидкостям (т.е. $\alpha = 0$) с не обязательно постоянной плотностью. В этом случае показывается, что двух частот достаточно для идентификации остальных параметров, см. теорему 3.3.

В **четвёртой главе** мы приводим формулы и уравнения, которые позволяют свести обратную задачу Дирихле–Неймана 3 к обратной задаче рассеяния 4. Чтобы не вводить дополнительные обозначения, изложим содержание этой главы в случае, когда $E > 0$.

Обозначим через $\Lambda_{A,V}(E)$ оператор Дирихле–Неймана для уравнения (18) с коэффициентами $A = (A_1, \ldots, A_d)$ и V в области D. Мы также рассматриваем уравнение (18) во всём пространстве $\mathbb{R}^d$, продолжая коэффициенты A и V нулём вне области D. Для этого уравнения мы рассматриваем классические решения рассеяния ψ^+ и соответствующую амплитуду рассеяния $f = f_{A,V}$. Напомним, что функции ψ^+ и $f_{A,V}$ в случае скалярных коэффициентов A_1, $\ldots$, A_d, V определяются из формулы (21); в случае же матричных коэффициентов можно записать аналог формулы (21), который мы опускаем в виду его громоздкости.

В **параграфе 4.1** мы приводим уравнения для нахождения классических и обобщённых решений рассеяния на границе области D по оператору Дирихле–Неймана. Мы также указываем явные формулы, позволяющие найти классические и обобщённые амплитуды рассеяния по этим решениям. Пусть $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ обозначает пространство непрерывно дифференцируемых $M_n(\mathbb{C})$-значных функций на ∂D, чьи первые производные β-Гёльдер-непрерывны, с нормой

$$\|\psi\|_{C^{1,\beta}} = \|\psi\|_{C^1} + \max_{i,j} \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \partial D \\ x_1 \neq x_2}} \frac{\bigl|\operatorname{Grad} \varphi_{ij}(x_1) - \operatorname{Grad} \varphi_{ij}(x_2)\bigr|}{|x_1 - x_2|^\beta}, \tag{32}$$

где $\varphi(x) = \bigl(\varphi_{ij}(x)\bigr) \in M_n(\mathbb{C})$, а Grad обозначает поверхностный градиент, см. [21, с. 33-39]. Обозначим через $\Lambda_{A,V}(x, y, E)$ ядро (в смысле теории распределений) оператора $\Lambda_{A,V}(E)$. Наконец, пусть $\mathcal{E}^+$ обозначает множество тех $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$, при которых уравнение (23) однозначно разрешимо относительно $\psi^+ \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть D — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$, 3) с границей $\partial D \in C^2$. Пусть A_1, $\ldots$, A_d, V — Гёльдер-непрерывные $M_n(\mathbb{C})$-значные функции с компактным носителем в D. Предположим, что $E > 0$ и E не является собственным значением Дирихле для операторов $L_{A,V}$ и $-\Delta$ в*

D, где $A = (A_1, \ldots, A_d)$. Тогда справедлива формула

$$f(k,l) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\partial D} \int\limits_{\partial D} e^{-ilx} (\Lambda_{A,V} - \Lambda_{0,0})(x,y,E) \psi^+(y,k)\, dy\, dx, \tag{33}$$

где $k,\ l \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+)$, $k^2 = l^2 = E$, и уравнение

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_{\partial D} A^+(x,y,k) \psi^+(y,k)\, dy, \quad x \in \partial D, \tag{34}$$

$$A^+(x,y,k) = \int\limits_{\partial D} G^+(x-z,k)(\Lambda_{A,V} - \Lambda_{0,0})(z,y,E)\, dz, \quad x,y \in \partial D,$$

где $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+)$, $k^2 = E$. Кроме того, уравнение (34) при фиксированном k является однозначно разрешимым уравнением Фредгольма второго рода относительно $\psi \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ при любом фиксированном $\beta \in (0,1)$.

Аналогичные формулы и уравнения справедливы для нахождения обобщённых решений рассеяния и амплитуд рассеяния.

Заметим, что на практике уравнения вроде (34) особенно эффективно решаются методом последовательных приближений. Для применения этого метода требуется, чтобы функция $A^+(x,y,k)$ была достаточно мала. В частности, это справедливо, если коэффициенты A и V малы. Однако на практике часто возникает случай, когда коэффициент A мал, а коэффициент V близок к некоторому известному «фоновому» коэффициенту V^0. В **параграфе 4.2** мы приводим формулу (33) и уравнение (34) в этом более общем случае, что делает их более применимыми на практике. Вывод этих формул и уравнений проводится в **параграфах 4.3 и 4.4**.

Формула (33) получается из явной формулы (25) с использованием второй формулы Грина. Аналогично, уравнение (34) выводится из интегрального уравнения (23) и второй формулы Грина. Таким же способом доказываются аналоги формул (33) и (34) в случае, когда $E \in \mathbb{C}$ и присутствует ненулевой «фоновый» потенциал V^0.

Для доказательства того, что уравнение (34) является уравнением Фредгольма второго рода, мы переписываем его операторной форме

$$\psi^+ = e^{ikx} + G^+(\Lambda_{A,V} - \Lambda_{0,0})\psi^+, \tag{35}$$

$$\Lambda_{A,V} - \Lambda_{0,0} = N_{A,V} S_{A,V}. \tag{36}$$

Здесь оператор G^+ обладает ядром $G^+(x-y,k)$, $S_{A,V}$ — оператор, отображающий функцию f на ∂D в решение ψ уравнения (18) в области D с граничным условием $\psi|_{\partial D} = f$, оператор $N_{A,V}$ определяется формулой

$$(N_{A,V}\psi)(x) = \int\limits_D \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x,y,E)\bigl(L_{A,V} - L_{0,0}\bigr)\psi(y)\,dy, \quad x \in \partial D,$$

где Γ — функция Грина задачи Дирихле для оператора $\Delta + E$ в области D, а ν_x — единичная внешняя нормаль к ∂D в точке x.

Следующие отображения являются линейными и непрерывными:

$$C^{1,\beta}(\partial D) \xrightarrow{S_{A,V}} C^1(\overline{D}) \xrightarrow{N_{A,V}} C^2(\partial D) \overset{i}{\hookrightarrow} C^{1,\beta}(\partial D) \xrightarrow{G^+} C^{1,\beta}(\partial D), \tag{37}$$

где i обозначает вложение, а пространства функций подразумеваются $M_n(\mathbb{C})$-значными. Учитывая компактность оператора i и пользуясь представлениями (35) и (36), мы получаем, что уравнение (34) является уравнением Фредгольма второго рода в $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$.

В **пятой главе** мы приводим два алгоритма приближённого решения обратной задачи рассеяния 4 для уравнения (18) в $\mathbb{R}^2$ со скалярными коэффициентами A_1, A_2, V и при фиксированной энергии $E > 0$. Первый алгоритм основан на решении нелокальной задачи Римана–Гильберта. Численные результаты, сообщённые в докладе [75], показывают, что этот метод успешно работает в случае произвольных ограниченных коэффициентов A, V с компактным носителем. Второй алгоритм получается линеаризацией первого в случае малых коэффициентов A, V. Сходимость линеаризованного метода при $E \to \infty$ полностью доказана, в то время как теоретическое обоснование сходимости нелинеаризованного алгоритма составит содержание одной из будущих статей.

Первый алгоритм приводится в **параграфе 5.1** и выводится в **параграфе 5.3**. Для его формулировки нам потребуется ввести несколько обозначений. Через A^{div}, V^{div} обозначим пару коэффициентов, связанных с коэффициентами A, V калибровочным преобразованием (26a), (26b) и удовлетворяющих условию $\nabla \cdot A^{\mathrm{div}} = 0$ (такая пара коэффициентов определяется единственным образом). Первый алгоритм позволяет приближенно восстановить A^{div}, V^{div} по амплитуде рассеяния f.

Пусть $E > 0$ зафиксировано. Тогда амплитуда рассеяния f может рассматриваться как функция на торе $T^2 = T \times T$, где $T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. Определим следующие операторы, следуя [99]:

$$(P_\pm(\lambda)u)(\lambda') = -\pi i \int_T u(\lambda'')\chi\left[\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda}\right)\right] f(\lambda'', \lambda')|d\lambda''|, \tag{38}$$

$$(Q_\pm(z)u)(\lambda) = \pi i \int_T h_\pm(\lambda, \lambda')e(\lambda, \lambda', z)\chi\left[\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right] u(\lambda')|d\lambda'|, \tag{39}$$

$$e(\lambda, \lambda', z) = \exp\Big(-i\tfrac{\sqrt{E}}{2}\big((\lambda - \lambda')\bar{z} + (\lambda^{-1} - \lambda'^{-1})z\big)\Big), \tag{40}$$

$$(C_\pm u)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{u(\xi)}{\xi - \lambda(1 \mp 0)} d\xi, \tag{41}$$

$$B(z) = C_+Q_-(z) - C_-Q_+(z), \tag{42}$$

где χ — функция Хевисайда, $|d\lambda| = d\lambda/(i\lambda)$. Функции $h_\pm$ из формулы (39) определяются ниже. Обозначим $\partial_{x_k} = \partial/\partial x_k$, $z = x_1 + ix_2$, $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$, $\mathrm{curl} = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$.

Алгоритм 1. *Пусть f — амплитуда рассеяния для оператора $L_{A,V}$ при фиксированной энергии $E > 0$. Определим A^{div}_{appr}, V^{div}_{appr} по следующей схеме:*

$$f \longrightarrow h_\pm \longrightarrow \mu^+ \longrightarrow \mu_\pm \longrightarrow A^{div}_{appr}, V^{div}_{appr}. \tag{43}$$

Функции $h_\pm$, μ^+ и $\mu_\pm$ последовательно находятся из следующих уравнений (44), (45) и явной формулы (46):

$$h_\pm(\lambda, \lambda') + (P_\pm(\lambda)h_\pm(\lambda, \cdot))(\lambda') = f(\lambda, \lambda'), \quad (\lambda, \lambda') \in T^2, \tag{44}$$

$$\mu^+(z, \lambda) + (B(z)\mu^+(z, \cdot))(\lambda) = 1, \quad z \in \mathbb{C},\ \lambda \in T, \tag{45}$$

$$\mu_\pm(z, \lambda) = \mu^+(z, \lambda) + (Q_\pm(z)\mu^+(z, \cdot))(\lambda), \quad z \in \mathbb{C},\ \lambda \in T. \tag{46}$$

Затем коэффициенты A^{div}_{appr} и V^{div}_{appr} определяются с помощью формул

$$A^{div}_{appr}(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\left(\ln \int_T \mu_+(z, \zeta)|d\zeta|\right), \tag{47}$$

$$\begin{aligned} V^{div}_{appr}(x) = 2|A^{div}_{appr}(x)|^2 + \frac{\sqrt{E}}{2\pi} \int_T \partial_z \mu_-(z, \zeta) d\zeta \\ + \sqrt{E}\partial_{\bar{z}}\left(\int_T \mu_+(z, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2} \Big/ \int_T \mu_+(z, \zeta)|d\zeta|\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Теорема 6. *Пусть $E > 0$ и $z \in \mathbb{C}$ зафиксированы. Пусть $f \in C^\infty(T^2)$ и $\|f\|_{L^2(T^2)} < \frac{1}{6\pi}$. Тогда уравнение (44) однозначно разрешимо относительно*

$h_\pm \in L^2(T^2)$, а уравнение (45) однозначно разрешимо относительно $\mu^+(z,\cdot) \in L^2(T)$. Кроме того, знаменатель дроби в формуле (48) отличен от нуля при всех $z \in \mathbb{C}$, функции A^{div}_{appr} и V^{div}_{appr} ограничены, убывают на бесконечности и удовлетворяют $\nabla \cdot A^{div}_{appr} = 0$. Наконец, оператору $L_{A^{div}_{appr}, V^{div}_{appr}}$ соответствует амплитуда рассеяния f при энергии E.

Заметим, что требования на гладкость и малость функции f в теореме 6 являются завышенными. Также заметим, что вычисление функций $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ и $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ в различных точках производится независимо, что делает алгоритм 1 хорошо параллелизуемым. Кроме того, результаты, сообщённые в докладе [75], свидетельствуют о том, что при стремлении E к бесконечности коэффициенты $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ поточечно сходятся к A^{div}, V^{div}. Теоретическое обоснование сходимости будет проведено в одной из будущих статей.

Укажем основные идеи, лежащие в основе алгоритма 1. Мы рассматриваем обобщённые решения рассеяния $\psi(x,k)$, $k \in \mathcal{K}_E$, $\mathcal{K}_E = \{k \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \mid k^2 = E\}$, уравнения (18) в $\mathbb{R}^2$, восходящие к Л. Фаддееву. Функции $\psi(x,k)$ обладают следующей асимптотикой по $k = (k_1, k_2)$ при фиксированном x:

$$\psi\big(x, k(\lambda)\big) = e^{ik(\lambda)x}\big(\tilde\mu_0^\pm + \tilde\mu_1^\pm \lambda^{\pm 1} + o(|\lambda|^{\pm 1})\big), \quad |\lambda|^\pm \to 0, \tag{49}$$

$$k_1(\lambda) = \tfrac{1}{2}E^{1/2}(\lambda + \lambda^{-1}), \quad k_2(\lambda) = \tfrac{i}{2}E^{1/2}(\lambda^{-1} - \lambda), \tag{50}$$

где $\tilde\mu_j^\pm = \tilde\mu_j^\pm(x)$ — некоторые функции. Заметим, что отображение (50) является биекцией $\mathbb{C} \setminus T$ на $\mathcal{K}_E$. Подставляя выражение (49) в уравнение (18), приравнивая коэффициенты при равных степенях λ и пользуясь соотношением $\nabla \cdot A^{\mathrm{div}} = 0$, мы получаем выражения для коэффициентов A^{div} и V^{div} в терминах функций $\tilde\mu_0^\pm$ и $\tilde\mu_1^\pm$.

Теперь необходимо найти функции $\tilde\mu_0^\pm$ и $\tilde\mu_1^\pm$. Можно показать, что функция $\tilde\mu(x,k) = e^{-ikx}\psi(x,k)$ равномерно ограничена по переменным x и k, а также удовлетворяет $\bar\partial$-уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\tilde\mu\big(x, k(\lambda)\big) = r(x,\lambda)\tilde\mu\big(x, k(-1/\bar\lambda)\big), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus T, \tag{51}$$

где функция r при больших E мала равномерно по x и λ. Скачки функций $\tilde\mu_\pm(x,k(\lambda)) = \tilde\mu(x, k(\lambda \pm 0\lambda))$ на окружности T связаны соотношением

$$\tilde\mu_+(x,k(\lambda)) = \tilde\mu_-(x,k(\lambda)) + \int_T \widetilde\rho(x,\lambda,\lambda')\tilde\mu_-(x,k(\lambda'))\,|d\lambda'|, \quad \lambda \in T, \tag{52}$$

где функция $\widetilde{\rho}$ выражается через амплитуду рассеяния f. Мы находим приближённые значения $\mu_\pm$ функций $\tilde{\mu}_\pm$, считая, что они удовлетворяют уравнению (51) с $r \equiv 0$ и связаны соотношением (52). Задача нахождения таких функций $\mu_\pm$ известна как нелокальная задача Римана–Гильберта.

Зная $\mu_\pm$, мы можем найти приближенные значения $\mu_0^\pm$ и $\mu_1^\pm$ функций $\tilde{\mu}_0^\pm$ и $\tilde{\mu}_1^\pm$ из формулы (49), используя формулу Коши–Грина.

В **параграфе 5.2** мы приводим формулы второго алгоритма, который может использоваться в случае малости коэффициентов A и V. Этот алгоритм можно получить двумя разными способами. Первый способ заключается в рассмотрении линеаризованной обратной задачи рассеяния при малых коэффициентах A, V, когда вместо амплитуды рассеяния f рассматривается линеаризованная амплитуда рассеяния

$$f^{\text{lin}}(k,l) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(k-l)x}\big(2k \cdot A(x) + V(x)\big)\, dx, \quad k, l \in \mathbb{R}^2,\ k^2 = l^2 = E.$$

Коэффициенты A и V находятся с помощью обращения преобразования Фурье. Вывод второго алгоритма этим способом приводится в **параграфе 5.4**.

Второй способ заключается в линеаризации первого алгоритма при малых коэффициентах. Мы считаем, что имеется малый параметр ε и справедлива оценка $|f(k,l)| \le C\varepsilon$, k, $l \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = l^2 = E$, $C = \text{const} > 0$, для амплитуды рассеяния (в частности, амплитуда рассеяния удовлетворяет такой оценке, если коэффициенты A и V имеют порядок малости ε). Затем мы отбрасываем во всех формулах и уравнениях первого алгоритма слагаемые, порядок которых выше, чем ε. Этим способом второй алгоритм выводится в **параграфе 5.5**.

1 Характеризация обобщённого преобразования Радона

1.1 Основные определения и постановка задач

Обобщённая модель Хаутеккера–Иохансена

Мы начнём эту главу с описания обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена, предложенной в работах [69, 110, 109]. Затем мы покажем, как исследование этой модели сводится к исследованию обобщённого преобразования Радона.

В обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена отрасль производства представляется в виде объединения производственных мощностей (которые могут рассматриваться как отдельные фирмы или машины), каждая из которых может производить один и тот же тип продукции по определённой технологии, используя $n \geq 2$ видов ресурсов. Модель описывается двумя функциями F_0, f, определёнными ниже.

Технологии производства параметризуются векторами $x \in \mathbb{R}^n_+$. Для каждой технологии $x \in \mathbb{R}^n_+$ мы определяем количество мощностей $f(x) \geq 0$, функционирующих по этой технологии. Функция $f\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ называется распределением мощностей по технологиям. Для определённости будем считать, что $f \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Функция $F_0\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^1_+$ называется производственной функцией на микроуровне. С помощью функции F_0 мы сопоставляем каждой технологии $x \in \mathbb{R}^n_+$ производственную функцию F_x, функцию прибыли π_x и функцию себестоимости единицы продукции c_x.

Производственная функция F_x сопоставляет вектору объёмов входных ресурсов $u = (u_1, \ldots, u_n)$ объём выпуска $F_x(u)$ единичной мощности, функционирующей по технологии x. Она определяется формулой

$$F_x(u) = \min\left\{1, F_0\left(\frac{u_1}{x_1}, \ldots, \frac{u_n}{x_n}\right)\right\}, \quad u \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.1}$$

Функция прибыли π_x сопоставляет ценам p_0 и p на продукцию и ресурсы максимальную возможную прибыль от использования единичной мощности, функционирующей по технологии x:

$$\pi_x(p_0, p) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n_+} \bigl(p_0 F_x(u) - pu\bigr), \quad p_0 \geq 0,\ p \in \overline{\mathbb{R}^n_+}.$$

Наконец, функция себестоимости единицы продукции c_x сопоставляет ценам p на ресурсы минимальное возможное отношение стоимости ресурсов к объёму выпуска на единичной мощности по технологии x:

$$c_x(p) = \inf_{u \in \mathbb{R}^n_+} \left\{ \tfrac{pu}{F_x(u)} \mid F_x(u) > 0 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+,\ p \in \overline{\mathbb{R}^n_+}. \tag{1.2}$$

Предполагается, что функция F_0 непрерывна и обладает неоклассическими свойствами:

(N1) F_0 не убывает по всем переменным (с ростом ресурсов растёт выпуск).

(N2) F_0 вогнута (закон убывающей предельной производительности).

(N3) $F_0(\lambda x) = \lambda F_0(x)$, $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n_+$ (постоянная отдача от масштаба).

Из свойства (N1) следует, в частности, что различные ресурсы могут замещать друг друга (в определённой мере) в процессе производства. Это типично для производственных систем, функционирующих в условиях глобализации и стандартизации.

Свойство (N2), помимо прочего, влечёт вогнутость F_0 по каждой из переменных. Это соответствует предположению, что с ростом отдельного ресурса при фиксированных остальных рост выпуска замедляется.

Функции f и F_0, а также F_x, π_x и c_x описывают отрасль на микроуровне (то есть в случае, когда отрасль рассматривается как объединение независимых производственных мощностей). Ниже мы определим функции π_A и F_A, которые описывают отрасль на макроуровне (то есть в случае, когда отрасль рассматривается как единое целое).

Агрегированная функция прибыли π_A сопоставляет ценам p_0 и p на продукцию и ресурсы максимальную возможную суммарную прибыль отрасли:

$$\pi_A(p_0, p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \pi_x(p_0, p) f(x)\, dx, \quad p_0 \geq 0,\ p \in \overline{\mathbb{R}^n_+}. \tag{1.3}$$

Агрегированная производственная функция F_A сопоставляет суммарному объёму ресурсов $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n_+$, поступающих в отрасль, максимальный суммарный выпуск, который можно получить, варьируя распределение ресурсов $u = (u_1, \dots, u_n)$ между производственными мощностями:

$$F_A(l) = \max_u \left\{ \int_{\mathbb{R}^n_+} F_x\big(u(x)\big) f(x)\, dx \;\middle|\; \forall k \int_{\mathbb{R}^n_+} u_k(x) f(x)\, dx \le l_k \right\}. \tag{1.4}$$

Задача оптимизации (1.4) всегда имеет решение в классе неотрицательных измеримых $u = (u_1, \dots, u_n)$ таких, что $u_1 f, \dots, u_n f \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$ (см. [110, Теорема 3.1]).

Заметим, что выражение (1.3) для функции π_A получено из предположения, что каждая производственная мощность максимизирует свою прибыль независимо от остальных. С другой стороны, выражение (1.4) для функции F_A основано на предположении, что отдельные производственные мощности кооперируют таким образом, чтобы максимизировать суммарный выпуск отрасли. Тем не менее, можно показать (см. [109, Теорема 3.1]), что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \pi_A(p_0, p) &= \sup_{l \in \mathbb{R}^n_+} \big(p_0 F_A(l) - pl\big), \quad p_0 > 0,\ p \in \overline{\mathbb{R}^n_+}, \\ p_0 F_0(l) &= \inf_{p \in \overline{\mathbb{R}^n_+}} \big(\pi_A(p_0, p) + pl\big), \quad p_0 > 0,\ l \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Из соотношений (1.5) следует, что функции F_A и π_A являются эквивалентными инструментами описания отрасли. Эта ситуация объясняется тем, что оптимальное распределение ресурсов в задаче (1.4) обеспечивается рыночными механизмами. Более точно, можно показать (см. [110, Теорема 4.1]), что распределение u в задаче (1.4) является оптимальным тогда и только тогда, когда найдутся такие $p_0 \ge 0$ и $p \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ (которые можно рассматривать как рыночные цены на выпускаемую продукцию и ресурсы), $p_0 + |p| > 0$, что

(1) Если $p_0 < c_x(p)$, то $u(x) = 0$ для п.в. x таких, что $f(x) \neq 0$ (мощности, для которых производство не окупается при данных ценах на продукцию и ресурсы, не функционируют).

(2) Если $p_0 > c_x(p)$, то $F_x(u(x)) = 1$ и $c_x(p) = pu(x)$ для п.в. x с $f(x) \neq 0$ (мощности, для которых производство окупается при данных ценах на продукцию и ресурсы, работают с максимальной отдачей).

(3) $p_k\big(\int_{\mathbb{R}^n_+} u_k(x) f(x)\, dx - l_i\big) = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Постановка задач

Функции π_A и F_A являются основными инструментами макроуровнего описания отрасли (то есть, в случае, когда отрасль рассматривается как единое целое). Как видно из соотношений (1.5), эти два инструмента эквивалентны. Мы будем работать с функцией прибыли π_A. Нас будет интересовать связь между функцией прибыли π_A и распределением мощностей по технологиям f. Из формулы (1.3) и из [110, Лемма 4.1] следует, что $\pi_A = \Pi_q \mu$, где $\mu(dx) = f(x)dx$ и

$$(\Pi_q \mu)(p_0, p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \max\bigl\{0, p_0 - q(p_1 x_1, \dots, p_n x_n)\bigr\} \mu(dx), \tag{1.6}$$

а функция q определяется формулой

$$q(x) = \inf_{\mathbb{R}^n_+} \bigl\{xu \mid F_0(u) = 1\bigr\}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.7}$$

Мы будем называть q функцией себестоимости. Она наследует такие свойства функции F_0 как неотрицательность и положительная однородность. В настоящей работе мы предполагаем, что

$$q \in C^1(\mathbb{R}^n_+),\ q > 0 \ \textit{и}\ q(\lambda x) = \lambda q(x) \ \textit{при}\ \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.8}$$

Из формул (1.6), (1.7) видно, что функция прибыли $\Pi_q \mu$ однозначно определяется функцией F_0 и распределением мощностей по технологиям $\mu(dx) = f(x)dx$, которые описывают отрасль на микроуровне. Нас интересуют следующие две обратные задачи, связанные с определением микроуровневой информациии по макроуровневой информации. Пользуясь определением (1.6), мы будем рассматривать оператор Π_q на множестве борелевских мер.

Задача 1.1 (характеризация). *Найти необходимые и достаточные условия, при которых заданная функция Π представима в виде $\Pi = \Pi_q \mu$ для некоторых q и μ.*

Задача 1.2 (обращение). *Найти необходимые и достаточные условия в терминах q, при которых $\Pi_q \mu$ однозначно определяет μ, и указать явные формулы обращения.*

Задачи 1.1 и 1.2 имеют важное практическое значение. Заметим, что отрасль производства, которую можно описать с помощью обобщённой модели

Хаутеккера–Иохансена, должна удовлетворять нескольким строгим ограничениям. Во-первых, все производственные мощности должны выпускать однородную продукцию. Во-вторых, технологии производства должны быть связаны жесткими соотношениями (1.1) и непосредственно соотносить объёмы ресурсов с объёмами конечного выпуска (в частности, трудно учесть ситуацию с выпуском промежуточной продукции). Однако, большое число отраслей не удовлетворяет этим условиям. Вопрос об универсальности обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена, то есть о возможности описания с помощью неё отраслей, в которых эти требования нарушаются, сводится к изучению задач 1.1 и 1.2, см. [109] и [104, Глава 6].

Сделаем комментарий относительно рассматриваемого в диссертации случая производственных технологий, описываемых функцией себестоимости q. С одной стороны, выбор функции q в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена во многом определяется мерой замещаемости производственных факторов, а с другой — простотой идентификации параметров функции по статистическим данным. Исторически наиболее распространёнными альтернативами являются леонтьевские технологии (т.е. технологии с фиксированными пропорциями затрат факторов) и технологии Кобба–Дугласа, предложенные в [23]. Леонтьевские технологии описывают случай незамещаемых производственных факторов, тогда как технологии Кобба–Дугласа соответствуют случаю единичной эластичности их замещения. В работе [19] было отмечено, что согласно статистике, существуют отрасли производства, для которых эластичность замещения может принимать значения между 0 и 1. Для описания таких отраслей в [19] был предложен класс технологий с произвольной постоянной эластичностью замещения в случае двух факторов. В случае многих производственных факторов класс технологий с постоянной эластичностью замещения описывается функциями вида $q = q_\alpha$ для некоторого $\alpha \in [-\infty, 1]$, где

$$\begin{aligned} q_\alpha(x) &= C(a_1 x_1^\alpha + \dots + a_n x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \in (-\infty, 1] \setminus 0, \\ q_{-\infty}(x) &= C \min(a_1 x_1, \dots, a_n x_n), \\ q_0(x) &= C x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

и C, a_1, …, $a_n > 0$, $a_1 + \dots + a_n = 1$. Этот класс технологий очень популярен в экономической литературе благодаря простоте аналитических выражений и развитым методам идентификации параметров по статистическим данным. Недостатком этого типа технологий является предположение об одинаковой эластичности замещения для каждой пары производственных факторов. В качестве обобщения технологий с постоянной эластичностью замещения в работе [68] было предложено рассматривать двухуровневые вложенные CES-функции. На практике это позволяет учитывать, к примеру, что эластичность замещения капитала и неквалифицированной рабочей силы часто выше, чем эластичность замещения капитала и квалифицированной рабочей силы (так называемый эффект комплементарности «капитал-квалификация»).

В диссертации мы рассматриваем класс CES производственных технологий и широкий класс производственных технологий, описываемых неоклассическими функциями себестоимости q вида (1.8) и таких, что

$$\textit{множества уровня функции } q \textit{ ограничены.} \tag{1.10}$$

Класс технологий, описываемых функциями q вида (1.8), (1.10) содержит линейные функции с положительными коэффициентами, CES-функции q_α с $\alpha \in (0,1]$ и замкнут относительно частичной композиции, которая определяется следующим образом. Для двух функций $q\colon \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k \geq 2$, и $\phi\colon \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $m \geq 2$, под частичной композицией по аргументу $i \in \{1,\ldots,k\}$ понимается функция $\widetilde{q}$, которая определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}\widetilde{q}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k,y) = q(x_1,\ldots,x_{i-1},\phi(y),x_{i+1},\ldots,x_k),\\ x = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}_+, \quad y \in \mathbb{R}^m_+.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Исследование задач 1.1 и 1.2 сводится к исследованию задач характеризации и обращения для обобщённого преобразования Радона R_q и интегральных операторов типа Радона R^h_q. Обобщённое преобразование Радона R_q определяется формулой

$$(R_q f)(p) = \int\limits_{q_p^{-1}(1)} f(x)\frac{dS_x}{|\nabla q_p(x)|}, \quad p \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1.12}$$

где $q_p(x) = q(p_1x_1,\ldots,p_nx_n)$, ∇ — стандартный градиент по переменной x, а dS_x — поверхностная мера на $q_p^{-1}(1)$.

Интегральные операторы типа Радона R^h_q определяются формулой

$$(R^h_q\mu)(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h\big(q(p_1x_1,\ldots,p_nx_n)\big)\mu(dx), \quad p \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1.13}$$

где функция $h\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}$. В случае, когда $\mu(dx) = f(x)dx$ мы будем обозначать $R^h_q f := R^h_q \mu$.

В лемме 1.3 из §1.3 будет показано, что функции $\Pi_q f$ и $R_q f$ сводятся друг к другу повторным дифференцированием и интегрированием, соответственно. Кроме того, оператор Π_q является частным случаем оператора R^h_q, соответствующим выбору $h(t) = \max\{0, p_0 - t\}$.

В настоящей работе мы изучаем следующие задачи для операторов R_q и R^h_q, обобщающие задачи 1.1 и 1.2.

Задача 1.3 (характеризация)**.** *Найти необходимые и достаточные условия на функцию F, при которых она представима в виде $F = R^h_q \mu$ для некоторых h, q и μ.*

Задача 1.4 (обращение)**.** *Найти необходимые и достаточные условия в терминах q (соотв. q и h), при которых оператор R_q (соотв. R^h_q) обратим, и указать формулы обращения.*

Сделаем несколько замечаний, касающихся определения обобщённого преобразования Радона (1.12). Исследование обобщённых преобразований Радона составляет предмет такой области математики как интегральная геометрия. История интегральной геометрии восходит к работам [96], [32] и [65]. В типичной задаче интегральной рассматривается многообразие X и семейство его подмногообразий, параметризованное многообразием Y. Функции f на X посредством интегрирования сопоставляется функция Rf на Y, называемая обобщённым преобразованием Радона функции f. В настоящей работе $X = \mathbb{R}^n_+$, а в качестве семейства подмногообразий выступают множества уровня $X_p = q_p^{-1}(1)$, $p \in Y = \mathbb{R}^n_+$, положительно однородной функции q, см. формулу (1.12). Основными обратными задачами интегральной геометрии являются обращение, когда по Rf требуется найти f, и характеризация, когда требуется описать образ преобразования R, см. задачи 1.3 и 1.4. Современное определение и основные свойства обобщённого преобразования Радона в общем случае см., например, в работах [13, 37]. Это определение восходит к работе [92], где было введено понятие двойного расслоения, обобщающее понятие инцидентности из работы [20] и понятие двойственности из работы [39]. Наиболее изучаемым в литературе является преобразование Радона по k-плоскостям в $\mathbb{R}^n$ (особенно при $k = 1$ и $k = n - 1$). Обзор других рассматриваемых в литературе случаев приведён в [54, §5.10.4].

Обозначения и определения

Нам потребуется ввести несколько обозначений для дальнейшего использования. Пусть μ — борелевская мера (со знаком) на $\mathbb{R}_+^n$, а $\mu = \mu_+ - \mu_-$ — её разложение Жордана. Положим $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$.

На пространстве борелевских мер на $\mathbb{R}_+^n$ мы определяем следующие нормы:

$$\|\mu\|_c = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} x^{-c}|\mu|(dx), \quad c \in \mathbb{R}^n. \tag{1.14}$$

Здесь и далее мы используем обозначение $a^b = a_1^{b_1} \cdots a_n^{b_n}$ для векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Для функции f на $\mathbb{R}_+^n$, числа $r \in [1, \infty]$ и вектора $c \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\begin{gathered} \|f\|_{r,c} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^r x^{rc-I} dx\right)^{1/r}, \quad r \in [1, \infty), \\ \|f\|_{\infty,c} = \inf\{K \geq 0 \colon |f(x)x^c| \leq K \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}_+^n\}, \end{gathered} \tag{1.15}$$

где $I = (1, \ldots, 1)$. Через $L_c^r(\mathbb{R}_+^n)$ обозначим множество измеримых функций f на $\mathbb{R}_+^n$ с конечной нормой $\|f\|_{r,c}$. Заметим, что если $\mu(dx) = f(x)dx$, то $\|\mu\|_c = \|f\|_{1,I-c}$.

Пространство $L^r(c + i\mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq r \leq \infty$, определяется как множество измеримых функций φ на плоскости

$$c + i\mathbb{R}^n = \big\{z \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Re} z = c\big\},$$

где $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, обладающих конечной нормой

$$\|\varphi\|_{L^r(c+i\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(c + i\xi)|^r \, d\xi\right)^{1/r}.$$

Преобразование Меллина функции $f \in L_c^1(\mathbb{R}_+^n)$ определяется формулой

$$(Mf)(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} x^{z-I} f(x) \, dx, \quad \operatorname{Re} z = c. \tag{1.16}$$

Обратное преобразование Меллина функции $\varphi \in L^1(c + i\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом:

$$(M_c^{-1}\varphi)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{c+i\mathbb{R}^n} x^{-z}\varphi(z)\,dz, \quad x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.17}$$

Мы покажем в §1.4, что операторы M и M_c^{-1} продолжаются по непрерывности до взаимно обратных изометрий $L^2_c(\mathbb{R}^n_+)$ и $L^2(c+i\mathbb{R}^n)$.

1.2 Непрерывность и характеризация

В этом параграфе мы приводим решение задач 1.1 и 1.3. Мы сформулируем теоремы характеризации для операторов R^h_q и Π_q в случае общих неоклассических функций q, удовлетворяющих условиям (1.8) и (1.10), а также в частном случае функций q с постоянной эластичностью замещения, то есть когда $q = q_\alpha$, а q_α определено в формуле (1.9).

В следующей теореме устанавливается непрерывность операторов R_q, R^h_q и Π_q на пространствах $L^r_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$, $r \in [1,\infty]$, $c \in \mathbb{R}^n_+$, и приводятся соотношения для преобразования Меллина функций $R_q f$, $R^h_q f$, $\Pi_q f$, где $f \in L^r_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$.

Теорема 1.1. *Пусть q удовлетворяет* (1.8) *и* (1.10)*. Пусть $f \in L^r_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ при некоторых $c \in \mathbb{R}^n_+$ и $r \in [1,\infty]$. Пусть $h \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^1_+)$, $\alpha = c_1 + \dots + c_n$. Тогда справедливы оценки:*

$$\|R_q f\|_{r,c} \le \Gamma(\alpha)^{-1}\|e^{-q}\|_{1,c}\|f\|_{r,I-c}, \tag{1.18}$$

$$\|R^h_q f\|_{r,c} \le \Gamma(\alpha)^{-1}\|e^{-q}\|_{1,c}\|h\|_{1,\alpha}\|f\|_{r,I-c}, \tag{1.19}$$

$$\|(\Pi_q f)'\|_{r,c} \le p_0^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)^{-1}\|e^{-q}\|_{1,c}\|f\|_{r,I-c}, \tag{1.20}$$

где $p_0 > 0$ зафиксировано, Γ обозначает гамма-функцию, $I = (1,\dots,1)$, $(\Pi_q f)' = \Pi_q f(p_0,\cdot)$. Кроме того, если $r \in \{1,2\}$, то для п.в. $z \in c+i\mathbb{R}^n$ справедливы формулы

$$(MR_q f)(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(s)^{-1}(Mf)(I-z)\cdot(Me^{-q})(z), \tag{1.21}$$

$$(MR^h_q f)(z) = (2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(s)^{-1}(Mf)(I-z)\cdot(Me^{-q})(z)\cdot(Mh)(s), \tag{1.22}$$

$$(M(\Pi_q f)')(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}p_0^{s+1}\Gamma(s+2)^{-1}(Mf)(I-z)\cdot(Me^{-q})(z), \tag{1.23}$$

где $s = z_1 + \dots + z_n$.

Заметим, что формулы (1.21), (1.22), (1.23) аналогичны проекционной формуле для классического преобразования Радона, которая позволяет найти преобразование Фурье функции по преобразованию Фурье её преобразования Радона. Можно привести аналог теоремы 1.1 для случая, когда операторы R_q^h и Π_q рассматриваются в классе борелевских мер на $\mathbb{R}^n_+$ с конечной нормой $\|\cdot\|_c$, $c \in \mathbb{R}^n_+$.

Теорема 1.2. *Пусть q удовлетворяет (1.8) и (1.10). Зафиксируем $c \in \mathbb{R}^n_+$, $r \in [1, \infty)$ и обозначим $\alpha = c_1 + \cdots + c_n$. Пусть μ — борелевская мера на $\mathbb{R}^n_+$, $\|\mu\|_c < \infty$, и пусть $h \in L^r_\alpha(\mathbb{R}^1_+)$. Тогда справедливы оценки*

$$\|R_q^h \mu\|_{r,c} \le \Gamma(\alpha r)^{-1/r} \|e^{-q/r}\|_{r,c} \|h\|_{r,\alpha} \|\mu\|_c, \tag{1.24}$$

$$\|(\Pi_q \mu)'\|_{r,c} \le p_0^{(\alpha+1)r} \tfrac{\Gamma(r+1)^{1/r}}{\Gamma(r+1+\alpha r)^{1/r}} \|e^{-q/r}\|_{r,c} \|\mu\|_c, \tag{1.25}$$

где $(\Pi_q\mu)' = \Pi_q\mu(p_0, \cdot)$ и $p_0 > 0$ зафиксировано. Кроме того, если $r = 1$ (соотв. $r = 1$, $h \ge 0$) и $\mu \ge 0$, то в формуле (1.25) (соотв. (1.24)) имеет место равенство. Наконец, если $r \in \{1, 2\}$, то справедливы формулы

$$(MR_q^h\mu)(z) = (2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(s)^{-1} (M\mu)(I - z) \cdot (Me^{-q})(z) \cdot (Mh)(s), \tag{1.26}$$

$$(M(\Pi_q\mu)')(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} p_0^{s+1} \Gamma(s+2)^{-1} (M\mu)(I - z) \cdot (Me^{-q})(z), \tag{1.27}$$

где $s = z_1 + \cdots + z_n$, $z \in c + i\mathbb{R}^n$ и $I = (1, \ldots, 1)$.

Теоремы 1.1 и 1.2 доказываются в §1.4.

Перейдём теперь к задаче характеризации. Из теоремы 1.2 следует, что оператор R_q^h, где q удовлетворяет (1.8), (1.10), а $h \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^1_+)$, непрерывно отображает пространство неотрицательных борелевских мер с конечной нормой $\|\cdot\|_c$, где $c \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha = c_1 + \cdots + c_n$, в пространство $L^2_c(\mathbb{R}^n_+)$. Это отображение не является сюръективным, и мы собираемся описать его образ.

Нам потребуется ввести несколько определений. Пусть q удовлетворяет (1.8), (1.10) и $(Me^{-q})(z) \ne 0$ п.в. при $\operatorname{Re} z = c$, $c \in \mathbb{R}^n_+$. Пусть $h \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^1_+)$, где $\alpha = c_1 + \cdots + c_n$, и $(Mh)(s) \ne 0$ п.в. при $\operatorname{Re} s = \alpha$. При фиксированном $p_0 > 0$ положим

$$\rho_q^h(z) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(z_1)\cdots\Gamma(z_n)}{(Me^{-q})(z) \cdot (Mh)(s)}, \quad \rho_q(z) = \frac{\Gamma(s+2)\Gamma(z_1)\cdots\Gamma(z_n)}{(Me^{-q})(z) p_0^{s+1}}, \tag{1.28}$$

где $z \in c + i\mathbb{R}^n$, $s = z_1 + \cdots + z_n$. Определим операторы T_q^h и T_q формулами

$$T_q^h f = M_c^{-1} \rho_q^h M f, \quad T_q f = M_c^{-1} \rho_q M f. \tag{1.29}$$

Напомним, что функция $g\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ называется вполне монотонной, если $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ и справедливы следующие неравенства:

$$(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}g(p)}{\partial p^\alpha} \geq 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n_+,\ p \in \mathbb{R}^n_+.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть $c \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha = c_1 + \dots + c_n$. Предположим, что*

$$q \text{ удовлетворяет } (1.8),\ (1.10),\ (Me^{-q})(z) \neq 0 \text{ п.в. при } \operatorname{Re} z = c, \tag{1.30}$$

$$h \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^1_+), \quad h \geq 0, \quad (Mh)(s) \neq 0 \text{ п.в. при } \operatorname{Re} s = \alpha, \tag{1.31}$$

$$\rho^h_q \in L^2(c + i\mathbb{R}^n) \cup L^\infty(c + i\mathbb{R}^n) \tag{1.32}$$

Тогда функция $f\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ представима в виде $f = R^h_q\mu$, где μ — неотрицательная борелевская мера, $\|\mu\|_c < \infty$, если и только если

$$\|f\|_{2,c} < \infty, \quad \|T^h_q f\|_{1,c} < \infty, \quad T^h_q f \text{ вполне монотонна}, \tag{1.33}$$

Кроме того, функция $h(t) = \max\{0, p_0 - t\}$ удовлетворяет условиям (1.31) и справедливы равенства $R^h_q = \Pi_q(p_0, \cdot)$, $\rho^h_q = \rho_q$, $T^h_q = T_q$.

Теорема 1.3 решает задачи 1.1 и 1.3 при предположении, что функция q удовлетворяет условиям (1.8) и (1.10). Теорема 1.3 доказывается в §1.5.

Теперь обратимся к случаю, когда $q = q_\alpha$, где q_α определено в формуле (1.9). Напомним, что в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена это соответствует предположению о постоянной эластичноси замещения ресурсов на микроуровне. Мы приведём теорему характеризации для случая оператора Π_q, так как именно этот случай имеет наибольшее практическое значение. Мы будем рассматривать неотрицательные борелевские меры μ, для которых

$$\int_{\overline{\mathbb{R}^n_+}} e^{-px}\mu(dx) < \infty \ \text{ при всех } p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.34}$$

Теорема 1.4. *Пусть $q = q_\alpha$, $\alpha \in (-\infty, 1] \setminus 0$, где функция q_α определена в формуле (1.9). Функция $\Pi(p_0, p)\colon \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^1_+$ представима в виде $\Pi = \Pi_q\mu$, где μ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, удовлетворяющая (1.34) и такая, что $\mu(\{0\}) = 0$, тогда и только тогда, когда*

(1) $\Pi(p_0, p)$ *выпукла.*

(2) $\Pi(\lambda p_0, \lambda p) = \lambda \Pi(p_0, p)$ *при* $\lambda > 0$, $p_0 > 0$, $p \in \mathbb{R}^n_+$.

(3) $\Pi(+0, p) = \frac{\partial \Pi}{\partial p_0}(+0, p) = 0$, $p \in \mathbb{R}^n_+$.

(4) Функция

$$F_\alpha(p) = \int_{[0,\infty)} \exp(-t^\alpha) d\frac{\partial \Pi}{\partial p_0}(t, p^{\frac{1}{\alpha}}), \quad p^{\frac{1}{\alpha}} = (p_1^{\frac{1}{\alpha}}, \dots, p_n^{\frac{1}{\alpha}}), \tag{1.35}$$

вполне монотонна.

Теорема 1.4 решает задачу характеризации 1.1 для оператора Π_q при предположении, что $q = q_\alpha$. Мы доказываем теорему 1.4 в §1.5.

Сделаем несколько замечаний относительно нашего подхода к задаче характеризации операторов R^h_q (в частности, оператора Π_q). Наиболее распространённым в литературе подходом к характеризации обобщённого преобразования Радона является подход теории уравнений в частных производных. В этом подходе образ обобщённого преобразования Радона отождествляется с ядром некоторого оператора в частных производных. Этот способ восходит к работе [32] (в случае преобразования Радона по прямым в $\mathbb{R}^4$) и применяется, например, в статьях [16] (в случае преобразования Радона на однородных пространствах) и [48, 34] (в случае преобразования Радона но k-плоскостям в проективном пространстве). Этот подход также используется для характеризации интегральных операторов типа Радона (операторов вида R^h_q из формулы (1.13)). Например, в статье [12] образ (одномерного) преобразования Лапласа неотрицательных мер отождествляется с множеством решений бесконечной системы дифференциальных неравенств. В работах [14] и [41] приводятся многомерные аналоги этого результата. Наконец, в статье [41] задача характеризации функции прибыли в модели Хаутеккера–Иохансена сводится к уже решённой задаче характеризации (многомерного) преобразования Лапласа. Наш подход к характеризации операторов R^h_q аналогичен. Мы сводим операторы R^h_q к преобразованию Лапласа и применяем теорему характеризации для преобразования Лапласа.

Отметим, что другой широко распространённый способ описания образа обобщённого преобразования Радона основан на так называемых моментных условиях (также известных как условия Кавальери). Этот подход восходит к работам [91] и [38]. Мы не будем останавливаться на этом подходе.

1.3 Формула коплощади и следствия из неё

В настоящем разделе мы докажем несколько вспомогательных утверждений, которые будут использованы при решении задач обращения и характеризации для операторов R_q и R_q^h, включая случай оператора Π_q.

Ключевым инструментом является формула коплощади, которая является обобщением теоремы Фубини в $\mathbb{R}^n$ на случай криволинейных координат. История этой формулы восходит к работе [95], где она была получена в двумерном случае. В работе [28] эта теорема была приведена в общем случае для липшиц-непрерывных координат. Нам потребуется эта формула в следующей форме.

Лемма 1.1 (формула коплощади)**.** *Пусть q удовлетворяет* (1.8)*. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\mathbb{R}^n_+)$. Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n_+$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty t^{-1}(R_q f)(\tfrac{p}{t})\,dt. \tag{1.36}$$

Доказательство. Зафиксируем $p \in \mathbb{R}^n_+$. Пользуясь положительной однородностью функции q_p, получим в силу тождества Эйлера, что

$$q_p(x) = x\nabla q_p(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Отсюда, учитывая положительность q_p, получаем, что $\nabla q_p(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}^n_+$. Более того, из условия (1.8) следует, что $\nabla q_p(\lambda x) = \nabla q_p(x)$ при $\lambda > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n_+$. Отсюда следует, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n_+$ найдутся такие константы $C_1(K) > 0$ и $C_2(K) > 0$, что для всех $x \in K$ справедливы оценки $C_1(K)|x| \leq q_p(x) \leq C_2(K)|x|$. В частности, отображение $q_p|_K \colon K \to \mathbb{R}$ является липшицевым.

Применяя формулу коплощади [28, Theorem 3.2.12], получаем, что для всякой неотрицательной непрерывной функции $f_K \colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} f_K \subset K$, справедлива формула

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \int\limits_{q_p^{-1}(t)} f(x)\,\frac{dS_x}{|\nabla q_p(x)|}\,dt, \tag{1.37}$$

где dS_x — поверхностная мера на $q_p^{-1}(t)$ (то есть, $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа). Пользуясь теоремой о монотонной сходимости, получаем, что формула (1.37) справедлива для произвольной неотрицательной $f \in C(\mathbb{R}^n_+)$. Наконец, представляя произвольную $f \in L^1(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\mathbb{R}^n_+)$ в виде $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$ и пользуясь аддитивностью интеграла Лебега, получим, что формула (1.37) справедлива для всех $f \in L^1(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\mathbb{R}^n_+)$. Наконец, из формулы (1.37), с учётом равенств $q_p^{-1}(t) = q_{p/t}^{-1}(1)$ и $\nabla q_p(x) = t\nabla q_{p/t}(x)$ и определения (1.12), следует формула (1.36). $\square$

В следующей лемме мы получим связь между функцией прибыли $\Pi_q\mu$ и мерой μ множеств

$$L_q(p_0, p) = \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid q_p(x) \le p_0\big\}. \tag{1.38}$$

Лемма 1.2. *Пусть q удовлетворяет (1.8). Пусть μ — борелевская мера со знаком такая, что $|\mu|(L_q(p_0, p)) < \infty$ при $p_0 > 0$, $p \in \mathbb{R}^n_+$. Тогда справедлива следующая формула:*

$$\mu(L_q(p_0, p)) = \tfrac{\partial}{\partial p_0}(\Pi_q\mu)(p_0 + 0, p), \quad p_0 > 0,\ p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.39}$$

Кроме того, если $\mu\big(q_p^{-1}(p_0)\big) = 0$, то в формуле (1.39) вместо правой производной можно писать обыкновенную производную.

Доказательство. Пусть $\Delta > 0$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} &(\Pi_q\mu)(p_0 + \Delta, p) - (\Pi_q\mu)(p_0, p) \\ &= \int\limits_{L_q(p_0+\Delta,p)} (p_0 + \Delta - q_p(x))\mu(dx) - \int\limits_{L_q(p_0,p)} (p_0 - q_p(x))\mu(dx) \\ &= \Delta \cdot \mu(L_q(p_0 + \Delta, p)) + \int\limits_{L_q(p_0+\Delta,p)\setminus L_q(p_0,p)} (p_0 - q_p(x))\,\mu(dx). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Заметим, что справедлива формула

$$L_q(p_0 + \Delta, p) \setminus L_q(p_0, p) = \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid 0 < q_p(x) - p_0 \le \Delta\big\},$$

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} &\Bigg|\int\limits_{L_q(p_0+\Delta,p)\setminus L_q(p_0,p)} (p_0 - q_p(x))\,\mu(dx)\Bigg| \\ &\le \int\limits_{L_q(p_0+\Delta,p)\setminus L_q(p_0,p)} |p_0 - q_p(x)|\,|\mu|(dx) \le \Delta \cdot |\mu|\big(L_q(p_0 + \Delta, p) \setminus L_q(p_0, p)\big). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Из формул (1.40) и (1.41), с учётом непрерывности меры μ, следует равенство

$$(\Pi_q\mu)(p_0+\Delta,p)-(\Pi_q\mu)(p_0,p)=\Delta\cdot\mu(L_q(p_0,p))+o(\Delta),\quad \Delta\to+0. \tag{1.42}$$

Отсюда следует формула (1.39). Если же $\mu\big(q_p^{-1}(p_0)\big)=0$, то формула (1.42) справедлива и при $\Delta\to-0$. $\square$

Следующая лемма показывает, что изучение оператора прибыли Π_q из формулы (1.6) сводится к изучению обобщённого преобразования Радона R_q из формулы (1.12), и обратно. Доказательство этой леммы основано на леммах 1.1 и 1.2.

Лемма 1.3. *Пусть q удовлетворяет* (1.8)*, а $f\in C(\mathbb{R}^n_+)$. Кроме того, пусть либо q удовлетворяет* (1.10) *и $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, либо $f\in L^1(\mathbb{R}^n_+)$. Тогда:*

$$(R_qf)(p)=\tfrac{\partial^2}{\partial p_0^2}(\Pi_qf)(p_0,p)\big|_{p_0=1},\quad p\in\mathbb{R}^n_+, \tag{1.43}$$

$$(\Pi_qf)(p_0,p)=\int_0^{p_0}\int_0^s t^{-1}(R_qf)(\tfrac{p}{t})\,dt\,ds,\quad p_0>0,\ p\in\mathbb{R}^n_+. \tag{1.44}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{\partial}{\partial p_0}(\Pi_qf)(p_0,p)\overset{(1.39)}{=\!=}\int\limits_{q_p(x)\le p_0}f(x)\,dx\overset{(1.36)}{=\!=}\int\limits_0^{p_0}t^{-1}(R_qf)\big(\tfrac{p}{t}\big)\,dt. \tag{1.45}$$

Отсюда, дифференцируя по p_0 и полагая $p_0=1$, получаем формулу (1.43).

Теперь заметим, что справедлива следующая оценка:

$$\big|\Pi_q(p_0,p)\big|\le p_0\int\limits_{q_p(x)\le p_0}|f(x)|\,dx,\quad p_0>0,\ p\in\mathbb{R}^n_+.$$

Следовательно, $\Pi_q(p_0,p)\to0$ при $p_0\to+0$. Интегрируя формулу (1.45), получим формулу (1.44). $\square$

Следующая лемма будет использоваться при решении задачи характеризации для функции прибыли Π_q в случае, когда $q=q_\alpha$, а q_α определяется в формуле (1.9).

Лемма 1.4. *Пусть q_1, q_2 удовлетворяют* (1.8)*. Пусть μ_1, μ_2 — неотрицательные борелевские меры на $\mathbb{R}^n_+$, для которых $\mu_1(L_{q_1}(p_0,p))=\mu_2(L_{q_2}(p_0,p))$*

для всех $p \in \mathbb{R}^n_+$, $p_0 > 0$. *Пусть* h — *неотрицательная функция на* $\mathbb{R}^1_+$ *и* $\int_{\mathbb{R}^n_+} h(q_j(p_1x_1,\ldots,p_nx_n))\,\mu_j(dx) < \infty$, $j = 1,\ 2$, *для всех* $p \in \mathbb{R}^n_+$. *Тогда для всех* $p \in \mathbb{R}^n_+$ *верно равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h(q_1(p_1x_1,\ldots,p_nx_n))\mu_1(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h(q_2(p_1x_1,\ldots,p_nx_n))\mu_2(dx).$$

Доказательство. Определим при каждом $p \in \mathbb{R}^n_+$ обобщённые функции $\nu_{p,1}$, $\nu_{p,2} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1_+)$ как следующие производные в смысле теории распределений:

$$\nu_{p,j} = \tfrac{\partial}{\partial p_0}\mu_j(L_{q_j}(p_0,p)), \quad j = 1,2. \tag{1.46}$$

Заметим, что $\nu_{p,1}$ и $\nu_{p,2}$ задают неотрицательные распределения. Из теоремы [72, Chapitre I, Théorème V] следует, что распределения $\nu_{p,1}$ и $\nu_{p,2}$ представимы неотрицательными борелевскими мерами $\nu_{p,1}(ds)$ и $\nu_{p,2}(ds)$ на $\mathbb{R}^1_+$ такими, что

$$\mu_j(L_{q_j}(p_0,p)) = \int\limits_0^{p_0} \nu_{p,j}(ds), \quad j = 1,2,\ p_0 > 0,\ p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.47}$$

Из формулы (1.47) и из условий леммы следует, что меры $\nu_{p,1}(ds)$ и $\nu_{p,2}(ds)$ совпадают при всех $p \in \mathbb{R}^n_+$. Теперь заметим, что для произвольной функции $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+)$ и для любого $p \in \mathbb{R}^n_+$, с учётом (1.46), справедлива следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_0^{\infty} u(s)\nu_{p,j}(ds) = -\int\limits_0^{\infty} \frac{du(s)}{ds} \int\limits_{q_{j,p}(x)\le s} \mu_j(dx)\,ds$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_{q_{j,p}(x)}^{\infty} \frac{du(s)}{ds}\,ds\,\mu_j(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(q_{j,p}(x))\,\mu_j(dx), \quad j = 1,2,$$

где $q_{j,p}(x) = q_j(p_1x_1,\ldots,p_nx_n)$.

Отсюда, учитывая равенство мер $\nu_{p,1}(ds)$ и $\nu_{p,2}(ds)$, получаем, что для любой функции $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+)$ справедлива формула

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(q_{1,p}(x))\,\mu_1(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(q_{2,p}(x))\,\mu_2(dx), \quad p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.48}$$

Выбирая последовательность неотрицательных функций $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+)$, монотонно сходящихся к h, и переходя к пределу в формуле (1.48), получим требуемое утверждение. $\square$

1.4 Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Преобразование Меллина (1.16) является аналогом преобразования Фурье для случая анализа в положительном ортанте $\mathbb{R}^n_+$. Преобразование Меллина можно свести к преобразованию Фурье с помощью замены переменных. Используя это сведение, мы перепишем несколько известных результатов для преобразования Фурье в терминах преобразования Меллина.

Напомним, что прямое и обратное преобразования Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ определяются следующими формулами:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.49}$$

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.50}$$

Лемма 1.5 (тождество Парсеваля). *Справедливы следующие утверждения:*

(A) Пусть $f \in L^1_c(\mathbb{R}^n_+) \cap L^2_c(\mathbb{R}^n_+)$, где $c \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\|Mf\|_{L^2(c+i\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{2,c}. \tag{1.51}$$

(B) Пусть $\varphi \in L^1(c+i\mathbb{R}^n) \cap L^2(c+i\mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\|M_c^{-1}\varphi\|_{2,c} = \|\varphi\|_{L^2(c+i\mathbb{R}^n)}. \tag{1.52}$$

Доказательство. Для всякого $c \in \mathbb{R}^n$ определим операторы E_c и T_c:

$$(E_c f)(y) = e^{cy} f(e^y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.53}$$

$$(T_c\varphi)(\xi) = \varphi(c+i\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.54}$$

где $e^y = (e^{y_1}, \ldots, e^{y_n})$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Из определений (1.16), (1.17) и (1.49), (1.50) следуют соотношения

$$M = T_c^{-1}\mathcal{F}^{-1}E_c \quad \text{на } L^1_c(\mathbb{R}^n_+), \tag{1.55}$$

$$M_c^{-1} = E_c^{-1}\mathcal{F}T_c \quad \textit{на } L^1(c + i\mathbb{R}^n). \tag{1.56}$$

Далее, из формул (1.53) и (1.54) следует, что для всех $r \in [1, \infty]$

$$E_c \text{ — } \textit{изометрия } L_c^r(\mathbb{R}_+^n) \textit{ на } L^r(\mathbb{R}^n), \tag{1.57}$$

$$T_c \text{ — } \textit{изометрия } L^r(c + i\mathbb{R}^n) \textit{ на } L^r(\mathbb{R}^n). \tag{1.58}$$

Из формул (1.55), (1.56), (1.57) и (1.58) и из изометричности операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$ следуют формулы (1.51) и (1.52). □

Заметим, что из формул (1.51) и (1.52) следует, что операторы M и M_c^{-1} продолжаются по непрерывности до изометрий

$$M\colon L_c^2(\mathbb{R}_+^n) \to L^2(c + i\mathbb{R}^n),$$
$$M_c^{-1}\colon L^2(c + i\mathbb{R}^n) \to L_c^2(\mathbb{R}_+^n),$$

где $c \in \mathbb{R}^n$. При этом остаются справделивыми формулы (1.55) и (1.56), где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ обозначают преобразования Фурье на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Учитывая, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ являются взаимно обратными операторами на $L^2(\mathbb{R}^n)$, мы получаем следующую лемму. Пусть Id обозначает тождественный оператор.

Лемма 1.6. *Для всех $c \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения*

$$M_c^{-1}M = \mathrm{Id} \quad \textit{на } L_c^2(\mathbb{R}_+^n), \tag{1.59}$$

$$MM_c^{-1} = \mathrm{Id} \quad \textit{на } L^2(c + i\mathbb{R}^n). \tag{1.60}$$

В следующей лемме мы получим важное для дальнейшего представление для интегралов. Заметим, что если q удовлетворяет (1.8) и (1.10), то $e^{-q} \in L_c^r(\mathbb{R}_+^n)$ для всех $r \geq 1$ и $c \in \mathbb{R}_+^n$.

Лемма 1.7. *Пусть q удовлетворяет* (1.8) *и* (1.10). *Пусть $h \in L_\alpha^1(\mathbb{R}_+^1)$, где $\alpha > 0$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$,* $\mathrm{Re}(z_1 + \cdots + z_n) = \alpha$, *справедливо:*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} p^{z-I} h(q_p(x))\, dp = (2\pi)^{\frac{n+1}{2}} x^{-z} \frac{(Me^{-q})(z) \cdot (Mh)(z_1 + \cdots + z_n)}{\Gamma(z_1 + \cdots + z_n)}. \tag{1.61}$$

Доказательство. Из доказательства леммы 1.1 следует, что формула копло-щади (1.36) может быть записана в эквивалентной форме (1.37).

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{z-I} h(q_p(x))\,dp &\xlongequal{y_j=p_jx_j} x^{-z}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y^{z-I} h(q(y))\,dy \\ &\xlongequal{(1.37)} x^{-z}\int_0^\infty t^{-1}h(t)\int\limits_{q(y/t)=1} y^{z-I}\frac{dS_y}{|\nabla q(y/t)|}\,dt \\ &\xlongequal{u_j=y_j/t} \sqrt{2\pi}x^{-z}(Mh)(z_1+\dots+z_n)\int\limits_{q(u)=1} u^{z-I}\frac{dS_u}{|\nabla q(u)|}.\end{aligned} \tag{1.62}$$

Из формулы (1.62) при $h(t)=e^{-t}$ и $x=I$ получаем

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}(Me^{-q})(z)=\Gamma(z_1+\dots+z_n)\int\limits_{q(u)=1} u^{z-I}\frac{dS_u}{|\nabla q(u)|}. \tag{1.63}$$

Заметим, что $\Gamma(s)\neq 0$ при $\operatorname{Re}s>0$. Из формул (1.62) и (1.63) следует формула (1.61). $\square$

Теперь перейдём к доказательству теорем 1.1 и 1.2.

Доказательство теоремы 1.1. Формула (1.21). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{z-I}\exp(-q_p(x))\,dp\,dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-z}f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y^{z-I}e^{-q(y)}\,dy\,dx \\ &= (2\pi)^n(Mf)(I-z)\,(Me^{-q})(z),\end{aligned} \tag{1.64}$$

где $\operatorname{Re}z=c$. С другой стороны, пользуясь формулой (1.36), получим следующую цепочку равенств при $\operatorname{Re}z=c$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{z-I}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\exp(-q_p(x))f(x)\,dx\,dp &\xlongequal{(1.36)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{z-I}\int\limits_0^\infty t^{-1}e^{-t}(R_qf)(\tfrac{p}{t})\,dt\,dp \\ = \int\limits_0^\infty t^{-1}e^{-t}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{z-I}(R_qf)(\tfrac{p}{t})\,dp\,dt &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(z_1+\dots+z_n)\cdot(MR_qf)(z).\end{aligned} \tag{1.65}$$

По теореме Фубини левые части формул (1.64) и (1.65) равны. Приравнивая правые части формул (1.64) и (1.65), получаем формулу (1.21).

Формулы (1.22) *и* (1.23). Интегрируя равенство (1.61) при $\operatorname{Re} z = c$ с весом f, получаем равенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{z-I} h(q_p(x))\,dp\,f(x)dx \\ &= (2\pi)^{\frac{2n+1}{2}}(Mf)(I-z)\frac{(Me^{-q})(z)\cdot(Mh)(z_1+\cdots+z_n)}{\Gamma(z_1+\cdots+z_n)}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

С другой стороны, по определению операторов R^h_q и M (см. формулы (1.13) и (1.16)), при $\operatorname{Re} z = c$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{z-I}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h(q_p(x))\,f(x)\,dx\,dp = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(MR^h_q f)(z). \tag{1.67}$$

По теореме Фубини левые части формул (1.66) и (1.67) равны. Приравнивая правые части формул (1.66) и (1.67), получаем формулу (1.22).

Формула (1.23) получается из формулы (1.22), если положить $h(t) = \max\{0, p_0 - t\}$ и учесть, что

$$(Mh)(s) = \frac{p_0^{s+1}}{s(s+1)}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \tag{1.68}$$

Оценка (1.18). Пусть $r \in [1, \infty)$. Пользуясь неравенством Йенсена и формулой (1.12), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \big|(R_q f)(p)\big|^r &\le \big|(R_q x^{c-I})(p)\big|^{r-1}(R_q|f|^r x^{(r-1)(I-c)})(p) \\ &= p^{-c(r-1)}\big|(R_q x^{c-I})(I)\big|^{r-1}(R_q|f|^r x^{(r-1)(I-c)})(p) \\ &\overset{(1.63)}{=\!=} \frac{\|e^{-q}\|^{r-1}_{1,c}}{\Gamma(\alpha)^{r-1}} p^{-c(r-1)}(R_q|f|^r x^{(r-1)(I-c)})(p). \end{aligned} \tag{1.69}$$

Пользуясь этой оценкой, мы получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|R_q f\|^r_{r,c} &\overset{(1.69)}{\le} \frac{\|e^{-q}\|^{r-1}_{1,c}}{\Gamma(\alpha)^{r-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{c-I}(R_q|f|^r x^{(r-1)(I-c)})(p)\,dp \\ &\overset{(1.21)}{=\!=} \frac{\|e^{-q}\|^{r}_{1,c}}{\Gamma(\alpha)^{r}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{r(I-c)-I}|f(x)|^r\,dx. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Формула (1.18) доказана при $r \in [1, \infty)$.

Следующая оценка доказывает (1.18) при $r=\infty$:

$$
\begin{gathered}
|p^c(R_qf)(p)|\le\|f\|_{\infty,I-c}\big|p^{-c}(R_qx^{c-I})(p)\big|\\
=\|f\|_{\infty,I-c}\big|(R_qx^{c-I})(I)\big|\overset{(1.63)}{=\!=}\Gamma(\alpha)^{-1}\|e^{-q}\|_{1,c}\|f\|_{\infty,I-c}.
\end{gathered}
\tag{1.71}
$$

Оценки (1.19) *и* (1.20). Пусть $r\in[1,\infty)$. Пользуясь формулой коплощади (1.36), оценкой (1.69) и неравенством Йенсена, мы получаем оценку

$$
\begin{gathered}
\big|(R_q^hf)(p)\big|^r\overset{(1.36)}{=\!=}\left|\int_0^\infty(R_qf)\big(\tfrac{p}{t}\big)t^{-1}h(t)\,dt\right|^r\\
\le\|h\|_{1,\alpha}^{r-1}\int_0^\infty\big|(R_qf)(\tfrac{p}{t})\big|^rt^{\alpha(1-r)-1}|h(t)|\,dt\\
\overset{(1.69)}{\le}\|h\|_{1,\alpha}^{r-1}\frac{\|e^{-q}\|_{1,c}^{r-1}}{\Gamma(\alpha)^{r-1}}p^{-c(r-1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}t^{-1}\big(R_q|f|^rx^{(r-1)(I-c)}\big)(\tfrac{p}{t})|h(t)|\,dt\\
\overset{(1.36)}{=\!=}\|h\|_{1,\alpha}^{r-1}\frac{\|e^{-q}\|_{1,c}^{r-1}}{\Gamma(\alpha)^{r-1}}p^{-c(r-1)}\big(R_q^{|h|}|f|^rx^{(r-1)(I-c)}\big)(p).
\end{gathered}
\tag{1.72}
$$

Следовательно, справедлива следующая оценка, доказывающая (1.19) при $r\in[1,\infty)$:

$$
\begin{gathered}
\|R_q^hf\|_{r,c}^r\overset{(1.72)}{\le}\|h\|_{1,\alpha}^{r-1}\frac{\|e^{-q}\|_{1,c}^{r-1}}{\Gamma(\alpha)^{r-1}}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}p^{c-I}\big(R_q^{|h|}|f|^rx^{(r-1)(I-c)}\big)(p)\,dp\\
\overset{(1.61)}{=\!=}\|h\|_{1,\alpha}^{r}\frac{\|e^{-q}\|_{1,c}^{r}}{\Gamma(\alpha)^{r}}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}x^{r(I-c)-I}|f(x)|^r\,dx.
\end{gathered}
$$

Оценка (1.19) при $r=\infty$ следует из оценки

$$
\begin{gathered}
\big|p^c(R_q^hf)(p)\big|\le\int_0^\infty\big|\big(\tfrac{p}{t}\big)^c(R_qf)\big(\tfrac{p}{t}\big)\big|t^{\alpha-1}|h(t)|\,dt\\
\le\|R_qf\|_{\infty,c}\|h\|_{1,\alpha}\overset{(1.71)}{\le}\Gamma(\alpha)^{-1}\|e^{-q}\|_{1,c}\|h\|_{1,\alpha}\|f\|_{\infty,I-c}.
\end{gathered}
$$

Оценка (1.20) получается из оценки (1.19), если положить $h(t)=\max\{0,p_0-t\}$ и учесть формулу (1.68). □

Доказательство теоремы 1.2. Формулы (1.26) *и* (1.27) доказываются полностью аналогично формулам (1.22) и (1.23).

Оценки (1.24) и (1.25). Используя неравенство Йенсена, получим следующую оценку:

$$
\begin{aligned}
|(R_q^h\mu)(p)|^r &\le \|\mu\|_c^{r-1}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\bigl|h(q_p(x))\bigr|^r x^{(r-1)c}|\mu|(dx)\\
&= \|\mu\|_c^{r-1}\bigl(R_q^{|h|^r}(x^{(r-1)c}|\mu|)\bigr)(p).
\end{aligned}
\tag{1.73}
$$

Следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
\|R_q^h\mu\|_{r,c}^r &\overset{(1.73)}{\le} \|\mu\|_c^{r-1}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} p^{rc-I}|(R_q^{|h|^r}x^{(r-1)c}|\mu|)(p)|\,dp\\
&\overset{(1.61)}{=\!=} \|\mu\|_c^r(2\pi)^{\frac{n}{2}}(Me^{-q})(rc)\frac{\|h\|_{r,\alpha}^r}{\Gamma(\alpha r)}.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует оценка (1.24). Заметим также, что при $h \ge 0$, $\mu \ge 0$, $r = 1$ неравенство в формуле (1.73) становится равенством.

Оценка (1.25) следует из оценки (1.24), если учесть, что при $h(t) = \max\{0, p_0 - t\}$ справедлива формула

$$
\|h\|_{r,\alpha}^r = \int_0^{p_0}(p_0-t)^r t^{r\alpha-1}\,dt = p_0^{(\alpha+1)r}\frac{\Gamma(\alpha r)\Gamma(r+1)}{\Gamma((\alpha+1)r+1)}.
$$

□

1.5 Доказательство теорем 1.3 и 1.4

Для доказательства теоремы 1.3 нам потребуется доказать одно вспомогательное утверждение.

Пусть функции q_1, q_2 удовлетворяют (1.8), (1.10) и $(Me^{-q_2})(z) \ne 0$ п.в. при $\operatorname{Re} z = c$, где $c \in \mathbb{R}_+^n$. Пусть функции h_1, $h_2 \in L_\alpha^2(\mathbb{R}_+^1)$ и $(Mh_2)(s) \ne 0$ п.в. при $\operatorname{Re} s = c_1 + \cdots + c_n$. Положим по определению

$$
\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2}(z) = \frac{(Me^{-q_1})(z)\cdot(Mh_1)(z_1+\cdots+z_n)}{(Me^{-q_2})(z)\cdot(Mh_2)(z_1+\cdots+z_n)}, \quad \operatorname{Re} z = c.
$$

Лемма 1.8. *Пусть* q_1, q_2 *удовлетворяют* (1.8), (1.10). *Пусть* h_1, $h_2 \in L_\alpha^2(\mathbb{R}_+^1)$ *при* $\alpha = c_1 + \cdots + c_n$, *где* $c \in \mathbb{R}_+^n$, *и пусть* $\|\mu\|_c < \infty$. *Предположим, что* $(Me^{-q_2})(z) \ne 0$ *п.в. при* $\operatorname{Re} z = c$, *а* $(Mh_2)(s) \ne 0$ *п.в. при* $\operatorname{Re} s = \alpha$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(A) Имеет место формула

$$R_{q_1}^{h_1}\mu = M_c^{-1}\big(\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} M R_{q_2}^{h_2}\mu\big). \tag{1.74}$$

(B) Пусть $\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} \in L^2(c+i\mathbb{R}^n)$ *или* $\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} \in L^\infty(c+i\mathbb{R}^n)$*. Предположим, что* $(Me^{-q_1})(z) \neq 0$ *п.в. при* $\operatorname{Re} z = c$*,* $(Mh_1)(s) \neq 0$ *п.в. при* $\operatorname{Re} s = \alpha$*. Пусть также* $\|f\|_{2,c} < \infty$ *и* $R_{q_1}^{h_1}\mu = M_c^{-1}\big(\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} Mf\big)$*. Тогда* $f = R_{q_2}^{h_2}\mu$*.*

Доказательство. Утверждение (A). Мы воспользуемся теоремой 1.2. Из равенства (1.26), записанного для $R_{q_1}^{h_1}\mu$ и для $R_{q_2}^{h_2}\mu$, следует формула

$$(MR_{q_1}^{h_1}\mu)(z) = \sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2}(z)(MR_{q_2}^{h_2}\mu)(z) \quad \textit{для п.в. } z \in c+i\mathbb{R}^n. \tag{1.75}$$

Из теоремы 1.2 также следует, что $R_{q_1}^{h_1}\mu \in L_c^2(\mathbb{R}_+^n)$. Следовательно, применяя к равенству (1.75) обратное преобразование Меллина M_c^{-1} и пользуясь формулой (1.59), получим формулу (1.74).

Утверждение (B). Пусть $f \in L_c^2(\mathbb{R}_+^n)$ и $R_{q_1}^{h_1}\mu = M_c^{-1}\big(\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} M R_{q_2}^{h_2} f\big)$. Из формулы (1.74) следует равенство

$$M_c^{-1}\big(\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} Mf\big) = M_c^{-1}\big(\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} M R_{q_2}^{h_2}\mu\big). \tag{1.76}$$

Из теоремы 1.2 и формулы (1.51) следует, что Mf, $MR_{q_2}^{h_2}\mu \in L^2(c+i\mathbb{R}^n)$. Учитывая, что $\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} \in L^2(c+i\mathbb{R}^n)$ или $\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} \in L^\infty(c+i\mathbb{R}^n)$, получаем, что $\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} Mf$, $\sigma_{q_1,q_2}^{h_1,h_2} MR_{q_2}^{h_2}\mu \in L^2(c+i\mathbb{R}^n)$. Отсюда, используя формулы (1.52) и (1.76), получаем, что $Mf = MR_{q_2}^{h_2}\mu$. Из инъективности M на $L_c^2(\mathbb{R}_+^n)$ следует, что $f = R_{q_2}^{h_2}\mu$. Утверждение (B) доказано. □

Перейдём теперь к доказательству теоремы 1.3.

Доказательство теоремы 1.3. Необходимость. Пусть $f = R_q^h\mu$, где h, q, μ удовлетворяют условиям теоремы 1.3. Пользуясь теоремой 1.2, мы получаем, что $\|f\|_{2,c} < \infty$.

Заметим, что справедливо равенство $\rho_q^h = \sigma_{q_L,q}^{h_L,h}$, где $h_L(t) = e^{-t}$ и $q_L(x) = x_1 + \dots + x_n$. Заметим также, что $R_{q_L}^{h_L}$ — преобразование Лапласа:

$$(R_{q_L}^{h_L}\mu)(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-px}\mu(dx). \tag{1.77}$$

Используя лемму 1.8 (A), мы получаем, что $T_q^h f \equiv M_c^{-1}\big(\rho_q^h M f\big) = R_{q_L}^{h_L}\mu$. Из теоремы характеризации для преобразования Лапласа [14, Theorem 4.2.1] следует, что $T_q^h f$ вполне монотонна. Наконец, из теоремы 1.2, применённой к функции $T_q^h f = R_{q_L}^{h_L}\mu$, получаем, что $\|T_q^h f\|_{1,c} < \infty$.

Достаточность. Так как $\|f\|_{2,c} < \infty$ и $\rho_q^h \in L^2(c + i\mathbb{R}^n) \cup L^\infty(c + i\mathbb{R}^n)$, то функция $T_q^h f$ корректно определена как элемент $L_c^2(\mathbb{R}_+^n)$. По условию функция $T_q^h f \equiv M_c^{-1}\big(\rho_q^h M f\big)$ вполне монотонна. По теореме характеризации для преобразования Лапласа [14, Theorem 4.2.1] найдётся неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_+^n$ такая, что $T_q^h f = R_{q_L}^{h_L}\mu$, где оператор $R_{q_L}^{h_L}$ определён в формуле (1.77).

Учитывая, что $\|T_q^h f\|_{1,c} < \infty$ и что $h \geq 0$, мы получаем из теоремы 1.2, что $\|\mu\|_c < \infty$. Теорема 1.3 доказана. $\square$

Теперь перейдём к доказательству теоремы 1.4.

Доказательство теоремы 1.4. Необходимость. Пусть $\Pi = \Pi_q\mu$, $q = q_\alpha$. Из конечности значений функции Π следует, что $\mu(L_q(p_0, p)) < \infty$ при $p_0 > 0$, $p \in \mathbb{R}_+^n$, где множество $L_q(p_0, p)$ определено в формуле (1.38)

Выпуклость функции Π следует из формулы (1.6) с учётом вогнутости функции q_p. Положительная однородность функции Π также следует из формулы (1.6) с учётом того, что $q_{\lambda p}(x) = \lambda q_p(x)$ при $\lambda > 0$, $p \in \mathbb{R}_+^n$, $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Свойство $\Pi(+0, p) = 0$ следует из следующей цепочки неравенств:

$$0 \leq \Pi(p_0, p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \max(0, p_0 - q_p(x))\,\mu(dx) \leq p_0 \cdot \mu\big(L_q(p_0, p)\big).$$

Пользуясь формулой (1.39), учитывая непрерывность меры μ и свойство $\mu(\{0\}) = 0$, мы получаем, что $\frac{\partial\Pi}{\partial p_0}(+0, p) = 0$.

Так как функция Π выпукла, то её производная $\frac{\partial\Pi}{\partial p_0}(p, p_0)$ является неубывающей функцией p_0 при каждом $p \in \mathbb{R}_+^n$. Из формулы (1.39) также следует, что $\frac{\partial\Pi}{\partial p_0}(p, p_0)$ непрерывна слева по переменной p_0 на множестве $[0, +\infty)$ при фиксированном $p \in \mathbb{R}_+^n$. Следовательно, для каждой неотрицательной функции $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^1)$ определён интеграл Лебега–Стилтьеса $\int_{[0,\infty)} u(t)d\frac{\partial\Pi}{\partial t}(t, p)$ и справедлива цепочка равенств:

$$\int\limits_{[0,\infty)} u(t)d\tfrac{\partial\Pi}{\partial t}(t,p) = -\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\Pi}{\partial t}(t,p)u'(t)\,dt$$

$$\overset{(1.39)}{=\!=} -\int_0^\infty u'(t) \int\limits_{q_p(x)\leq t} \mu(dx)\,dt = -\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^n_+}} \int\limits_{q_p(x)}^{\infty} u'(t)\,dt\,\mu(dx)$$

$$= \int\limits_{\overline{\mathbb{R}^n_+}} u(q_p(x))\,\mu(dx).$$

Из этой формулы, выбирая последовательность неотрицательных $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n_+)$, монотонно сходящихся к $\exp(-t^\alpha)$, получим равенство

$$\int\limits_{[0,\infty)} \exp(-t^\alpha)d_t\tfrac{\partial\Pi}{\partial p_0}(t,p^{\frac{1}{\alpha}}) = \int\limits_{\overline{\mathbb{R}^n_+}} \exp(-p_1x_1^\alpha - \cdots - p_nx_n^\alpha)\,\mu(dx),\ p \in \mathbb{R}^n_+. \quad (1.78)$$

Отсюда следует, что $F_\alpha(p)$ вполне монотонна.

Достаточность. Предположим, что функция Π удовлетворяет свойствам (1)–(4) из условия теоремы 1.4. Используя теорему Бернштейна о вполне монотонных функциях в случае функции F_α, получаем, что найдётся такая неотрицательная борелевская мера μ на $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, удовлетворяющая (1.34), что справедливо равенство (1.78). Из этого равенства, в силу условия $\frac{\partial\Pi}{\partial p_0}(+0,p) = 0$, $p \in \mathbb{R}^n_+$, следует, что $\mu(\{0\}) = 0$.

Определим $\widetilde{\Pi} = \Pi_q\mu$. Мы покажем, что $\Pi = \widetilde{\Pi}$.

Заметим, что из уже доказанной необходимости следует, что функция $\widetilde{\Pi}$ также удовлетворяет равенству (1.78). Следовательно, справедливо равенство

$$\int\limits_{[0,\infty)} \exp(-t^\alpha)d_t\tfrac{\partial\Pi}{\partial p_0}(t,p^{\frac{1}{\alpha}}) = \int\limits_{[0,\infty)} \exp(-t^\alpha)d_t\tfrac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial p_0}(t,p^{\frac{1}{\alpha}}), \quad p \in \mathbb{R}^n_+.$$

Учитывая положительную однородность функций Π и $\widetilde{\Pi}$ и делая в последнем равенстве замену переменных $t = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}s^{\frac{1}{\alpha}}$, где $\lambda > 0$ — фиксированное число, получим следующее соотношение:

$$\int\limits_{[0,\infty)} \exp(-\lambda s) d_s \frac{\partial \Pi}{\partial p_0}(s^{\frac{1}{\alpha}}, p^{\frac{1}{\alpha}}) = \int\limits_{[0,\infty)} \exp(-\lambda s) d_s \frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial p_0}(s^{\frac{1}{\alpha}}, p^{\frac{1}{\alpha}}), \quad \lambda > 0, \ p \in \mathbb{R}^n_+.$$

Из единственности аналитического продолжения следует, что это равенство также верно при $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Следовательно, функции $\frac{\partial \Pi}{\partial p_0}$ и $\frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial p_0}$ совпадают. В силу условий $\Pi(+0, p) = 0$ и $\widetilde{\Pi}(+0, p) = 0$ для всех $p \in \mathbb{R}^n_+$, мы получаем, что $\Pi = \widetilde{\Pi}$. Теорема 1.4 доказана. $\square$

2 Обращение обобщённого преобразования Радона

2.1 Основные результаты

В этом параграфе мы приводим решение задач обращения 1.2 и 1.4 для операторов R_q, R_q^h и Π_q. Мы рассматриваем задачу обращения при одном из двух предположений на функцию q. Мы считаем, что либо функция q удовлетворяет (1.8), (1.10), либо $q = q_\alpha$, где q_α определено в формуле (1.9).

Напомним, что в главе 1 нами были получены теоремы 1.1 и 1.2, которые сводят задачу обращения для операторов R_q, R_q^h и Π_q к задаче обращения преобразования Меллина (1.16). Эти теоремы являются аналогами классической проекционной теоремы, сводящей задачу обращения преобразования Радона к задаче обращения преобразования Фурье. Из этих теорем вытекают следующие формулы обращения.

Определим следующее пространство:

$$C_c^{N,\sigma}(\mathbb{R}_+^n) = \{f \in C^N(\mathbb{R}_+^n) \mid \|f\|_{N,\sigma,c} < \infty\}, \tag{2.1}$$

где $N \in \mathbb{N} \cup 0$, $\sigma > 0$, $c \in \mathbb{R}^n$ и

$$\|f\|_{N,\sigma,c} = \max_{|\alpha| \le N} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^n)^{\frac{\sigma}{n}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} u(y)}{\partial y^\alpha} \right|, \quad u(y) = e^{cy} f(e^y). \tag{2.2}$$

Заметим, что $C_c^{N,\sigma}(\mathbb{R}_+^n) \subset L_c^1(\mathbb{R}_+^n)$ при $N \ge 0$, $\sigma > n$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le R\}$, а $\Omega^{n-1} = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}$ обозначает площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.1. *Пусть q удовлетворяет (1.8) и (1.10), $c \in \mathbb{R}_+^n$, $\alpha = c_1 + \dots + c_n$. Пусть $h \in L_\alpha^1(\mathbb{R}_+^1)$, $(Mh)(s) \ne 0$ п.в. при $\operatorname{Re} s = \alpha$, $(Me^{-q})(z) \ne 0$ п.в. при $\operatorname{Re} z = c$. Предположим, что $f \in C_{I-c}^{N,\sigma}(\mathbb{R}_+^n)$, где $N \ge n+1$ и $\sigma > n \ge 2$. Тогда функция f может быть найдена по функциям $R_q f$, $R_q^h f$, $\Pi_q f$ посредством следующих формул:*

$$f(x) = f_{appr}^j(x, R) + f_{err}^j(x, R), \quad x \in \mathbb{R}_+^n,\ R > 0,\ j = 1, 2, 3, \tag{2.3}$$

$$
\begin{aligned}
f^1_{appr}(x,R) &= (2\pi i)^{-n} \int\limits_{c+iB_R} x^{z-I} \frac{(MR_q f)(z)}{(Me^{-q})(z)} \Gamma(s)\, dz, \\
f^2_{appr}(x,R) &= (2\pi)^{-n-\frac{1}{2}} i^{-n} \int\limits_{c+iB_R} x^{z-I} \frac{(MR^h_q f)(z)\, \Gamma(s)}{(Me^{-q})(z)\, (Mh)(s)}\, dz, \qquad (2.4) \\
f^3_{appr}(x,R) &= (2\pi i)^{-n} \int\limits_{c+iB_R} x^{z-I} \frac{(M\Pi_q f)(z)}{(Me^{-q})(z)} \Gamma(s+2)\, dz,
\end{aligned}
$$

$$
|f^j_{err}(x,R)| \le \frac{(\Omega^{n-1})^2 n^N}{(2\pi)^n (\sigma-n)(N-n)} \|f\|_{N,\sigma,I-c} \frac{x^{c-I}}{R^{N-n}}, \quad j=1,2,3, \qquad (2.5)
$$

где $s = z_1 + \dots + z_n$.

Мы доказываем теорему 2.1 в §2.2.

Теперь мы перейдём к задаче характеризации таких функций h и q, при которых операторы R_q, R^h_q и Π_q являются обратимыми. Нахождение таких условий позволит получить характеризацию отраслей в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена (в терминах их производственных функций на микроуровне), для которых функция прибыли однозначно определяет распределение мощностей по технологиям.

Следующая теорема показывает, что инъективность операторов R_q и Π_q характеризуется малостью множества нулей преобразования Меллина функции e^{-q}. Для краткости, мы будем говорить что множество S в плоскости $H \subset \mathbb{C}^n$ является:

1. 1-тощим, если $S \cap H$ нигде не плотно в H,
2. 2-тощим, если $S \cap H$ имеет меру нуль в H,
3. ∞-тощим, если $S \cap H = \varnothing$.

Теорема 2.2. *Пусть* q *удовлетворяет* (1.8), (1.10) *и пусть* $c \in \mathbb{R}^n_+$, $r \in \{1, 2, \infty\}$. *Тогда оператор* Π_q *инъективен в* $L^r_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ *тогда и только тогда, когда* R_q *инъективен в* $L^r_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$. *При этом* R_q *инъективен в* $L^r_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ *тогда и только тогда, когда множество нулей функции* $(Me^{-q})(z)$ *является* r*-тощим в плоскости* $\operatorname{Re} z = c$.

Отдельно отметим, что в теореме 2.2 в случае $r = \infty$ операторы R_q и Π_q рассматриваются на функциях, преобразование Меллина которых в общем случае не определено, так что для обращения операторов R_q и Π_q не могут быть использованы формулы (1.21) и (1.23). Аналогичная теорема справедлива для операторов R_q^h.

Теорема 2.3. *Пусть q удовлетворяет (1.8), (1.10) и пусть $c \in \mathbb{R}_+^n$, $\alpha = c_1 + \dots + c_n$, $r \in \{1, 2, \infty\}$. Пусть $h \in L_\alpha^1(\mathbb{R}_+^1)$ (а при $r = 2$, кроме того, $h \in L_\alpha^2(\mathbb{R}_+^1)$). Тогда оператор R_q^h инъективен в $L_{I-c}^r(\mathbb{R}_+^n)$ тогда и только тогда, когда множество нулей функции $(Me^{-q})(z)$ является r-тощим в плоскости $\operatorname{Re} z = c$, а множество нулей функции $(Mh)(s)$ является r-тощим на прямой $\operatorname{Re} s = \alpha$.*

Теперь обратимся к случаю, когда $q = q_\alpha$, $\alpha \in [-\infty, 1]$, где q_α определено в формуле (1.9). Напомним, что в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена такие функции q описывают технологии с постоянной эластичностью замещения производственных факторов, см. §1.1. Мы приведём теоремы единственности для случая оператора Π_q, так как именно этот случай представляет наибольший интерес с практической точки зрения.

Нам потребуется ввести одно обозначение. Обозначим через $(x_1, \dots, x_n)$ стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$, а через $(y_1, \dots, y_{n-1}, h)$ — координаты той же точки в ортонормированном базисе, первые $(n-1)$ векторов которого лежат в плоскости $x_1 + \dots + x_n = 0$. Для произвольной функции $f\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ положим по определению

$$f_h(y_1, \dots, y_n) = f(e^{\frac{x_1}{a_1}}, \dots, e^{\frac{x_n}{a_n}}) e^{\frac{x_1}{a_1}} \cdots e^{\frac{x_n}{a_n}}, \tag{2.6}$$

где a_1, …, a_n определены в формуле (1.9).

Теорема 2.4. *Пусть $q = q_\alpha$, где q_α определено в формуле (1.9). Тогда:*

1. *Пусть $\alpha \in (0, 1]$. Тогда Π_q инъективен в классе борелевских мер (со знаком), интегрируемых с весом $\omega(x) = \exp(-A|x|^\alpha)$, $A > 0$.*

2. *Пусть $\alpha = 0$. Тогда ядро оператора Π_q на пространстве $L^1(\mathbb{R}_+^n) \cap C(\mathbb{R}_+^n)$ состоит из всех f таких, что $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_h(y) dy = 0$ для всех $h \in \mathbb{R}$, где f_h определено в формуле (2.6).*

3. *Пусть $\alpha \in (-\infty, 0)$. Тогда Π_q инъективен в $L_{I-c}^1(\mathbb{R}_+^n) \cap C(\mathbb{R}_+^n)$ для любого $c \in \mathbb{R}_+^n$.*

4. *Пусть $\alpha = -\infty$. Тогда Π_q инъективен в $L^1(\mathbb{R}_+^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+^n)$.*

Как следует из теоремы 2.4, при предположении о постоянной эластичности замещения ресурсов, функция прибыли в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена однозначно определяет распределение мощностей по технологиям во всех случаях, кроме случая $q = q_0$, который соответствует производственной функции Кобба–Дугласа на микроуровне. Тем не менее, в этом исключительном случае возможно явно описать ядро оператора прибыли. Теорема 2.4 доказывается в §2.5.

Как следствие из теорем 2.2 и 2.4, мы можем получить следующий результат, касающийся инъективности оператора Π_q в случае вложенных CES-функций q. Напомним, что под вложенными CES-функциями мы понимаем функции, получающиеся в результате конечного числа частичных композиций вида (1.11) из CES-функций. В теории производства такие функции были предложены К. Сато (см. [68]) как обобщение CES-функций, наследующее от последних простоту аналитических манипуляций и идентификации параметров по статистическим данным, и позволяющее учесть различную эластичность замещения между различными производственными факторами (в частности, это позволяет принять во внимание эффект комплементарности «капитал–квалификация», см. [35]).

Предложение 2.1. *Пусть функция q построена из функций вида q_α с $\alpha \in (0,1]$ (см. (1.9)) с помощью конечного числа частичных композиций (1.11). Тогда оператор Π_q инъективен в $L^r_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$, $r \in \{1, 2, \infty\}$, $c \in \mathbb{R}^n_+$.*

Предложение 2.1 доказывается в §2.5.

Теперь рассмотрим задачу обращения функции прибыли $\Pi_q\mu$ в более общем случае, когда допускается варьировать не только распределение мощностей по технологиям μ, но и функцию себестоимости q. Если $\Pi_q\mu$ однозначно определяет q и μ, то можно сказать, что микроуровневое описание отрасли однозначно определяется макроуровневым описанием. При предположении о постоянной эластичности замещения ресурсов справедлива следующая теорема. Обозначим

$$L^1(\mathbb{R}^n_+, \mu) = \left\{ f \text{ измерима}, \textstyle\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)| \mu(dx) < \infty \right\}.$$

Теорема 2.5. *Пусть $q_1 = q_{\alpha_1}$, $q_2 = q_{\alpha_2}$, где $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \le 1$. Пусть μ_1, μ_2 — неотрицательные конечные борелевские меры на $\mathbb{R}^n_+$ такие, что $|x|^{2\alpha_1} \in L^1(\mathbb{R}^1_+, \mu_2)$ и $\Pi_{q_1}\mu_1 = \Pi_{q_2}\mu_2$. Тогда $\mu_1 = \mu_2 = 0$.*

Требование на рост мер в теореме 2.5 является существенным, как показывает следующий пример неединственности, доказательство которого основывается на теореме 1.4. Пусть δ обозначает δ-функцию Дирака, а K_1 — модифицированную функцию Бесселя второго рода:

$$K_1(s) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\tfrac{s}{2}\left(t + \tfrac{1}{t}\right)\right) dt, \quad \operatorname{Re} s > 0. \tag{2.7}$$

Предложение 2.2. *Определим функцию*

$$\Pi(p_0, p) = \int\limits_0^{p_0}\int\limits_0^{s} \exp\left(-\tfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)\right)\frac{dt}{t}\, ds, \quad p_0 > 0,\ p \in \mathbb{R}^2_+. \tag{2.8}$$

Тогда $\Pi = \Pi_{q_1}\mu = \Pi_{q_{1/2}}\nu$, *где* q_1 *и* $q_{1/2}$ *определены формулой* (1.9) *и*

$$\mu(dx_1, dx_2) = \frac{1}{\pi x_1 x_2}\frac{1}{\sqrt{x_1 + x_2}} K_1\left(\frac{\sqrt{x_1 + x_2}}{\sqrt{x_1 x_2}}\right) dx_1\, dx_2, \tag{2.9}$$

$$\nu(dx_1, dx_2) = \tfrac{4}{x_1}\exp\left(-\tfrac{1}{x_1^2}\right)\delta(x_1 - x_2)\, dx_1\, dx_2. \tag{2.10}$$

Теорема 2.5 и предложение 2.2 доказываются в §2.5.

Сделаем несколько замечаний относительно используемых в диссертации подходов к задаче обращения. Существуют три наиболее распространённых подхода к решению задачи обращения обобщённого преобразования Радона. Первый подход основан на сведении задачи обращения к обращению хорошо известных преобразований вроде преобразований Фурье, Абеля или Меллина. Этот подход, помимо прочего, позволяет получить явные формулы обращения. Однако этот метод применим, когда определение обобщённого преобразования Радона заключает в себе определённые симметрии. Отметим, что этот подход появился уже в первых работах по интегральной геометрии [32] и [65]. Мы используем этот подход в теоремах 1.1, 1.2 и 2.1, сводя задачу обращения для операторов R_q, R_q^h и Π_q к задаче обращения преобразования Меллина.

Второй широко распространённый в литературе подход к задаче обращения основан на оценке носителя функции по носителю её обобщённого преобразования Радона с помощью теоремы Кашивары (см. [49, 43]). Эта теорема позволяет оценивать носитель функции по её аналитическому волновому фронту. Этот подход применим в случае, когда удаётся показать, что обобщённое преобразование Радона является аналитическим интегральным оператором Фурье. Впервые этот метод был применён в статье [15] для случая преобразования Радона с вещественно аналитическим весом. В случае отсутствия аналитичности этот подход позволяет решить задачу обращения по модулю сглаживающего оператора. В диссертации этот подход не используется.

Третий широко распространённый подход к задаче обращения основан на сведении задачи обращения к изучению подходящего транспортного уравнения и энергетических оценок для него, получаемых с помощью тождества Пестова и его аналогов, см., например, [73, 64]. Этот метод применяется в случае преобразований Радона по одномерным подмногообразиям (более точно, по геодезическим некоторой метрики) и был впервые применён Р. Г. Мухометовым во второй половине 1970-х годов. Этот подход нами также не используется.

Для получения теорем 2.2 и 2.3 мы решаем задачу о представлении функции как ряда (в подходящей топологии) из функций, зависящих от $x = (x_1, \dots, x_n)$ только посредством свёртки вида $q(p_1x_1, \dots, p_nx_n)$ где вектор $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$ меняется от слагаемого к слагаемому. Для этого мы пользуемся многомерными теоремами типа Винера об аппроксимации. Для функций, представимых в виде таких рядов, задача обращения решается с помощью формулы коплощади (1.36). Этот подход похож, в некотором смысле, на подход из работы [30], в котором функции представляются в виде конечных сумм функций, каждая из которых специальным образом зависит от своего аргумента.

2.2 Доказательство теоремы 2.1

Утверждение теоремы 2.1 следует из теоремы 1.1 и из следующей леммы.

Напомним, что преобразование Меллина M, определяемое формулой (1.16), может быть обращено с использованием формулы (1.59), то есть посредством композиции с обратным преобразованием Меллина M_c^{-1} из формулы (1.17). Однако, как видно из формулы (1.17), это требует вычисления кратного несобственного интеграла. Мы дадим оценку точности восстановления функции по её преобразованию Меллина в случае, когда несобственный интеграл заменяется подходящим собственным интегралом.

Лемма 2.1. *Пусть $f \in C_c^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$, где $c \in \mathbb{R}^n_+$, $N \geq n+1$ и $\sigma > n \geq 2$. Тогда справедливы следующие формулы:*

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{B_R} x^{-(c+i\xi)} (Mf)(c+i\xi)\, d\xi + f_{err}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.11}$$

$$\left|f_{err}(x)\right| \le \frac{(\Omega^{n-1})^2 n^N}{(2\pi)^n(\sigma-n)(N-n)}\|f\|_{N,\sigma,c}\frac{x^{-c}}{R^{N-n}}, \quad x\in\mathbb{R}^n_+,\ R>0. \tag{2.12}$$

Для доказательства леммы 2.1 нам потребуется одно вспомогательное утверждение. Напомним, что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ определяется формулой (1.49). Определим специальный класс функций:

$$\begin{gathered} C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \left\{u\in C^N(\mathbb{R}^n) \mid \|u\|_{N,\sigma}<\infty\right\}, \quad N\in\mathbb{N}\cup 0,\ \sigma>0, \\ \|u\|_{N,\sigma} = \max_{|\alpha|\le N}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}(1+|y|^n)^{\frac{\sigma}{n}}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}u(y)}{\partial y^\alpha}\right|. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Лемма 2.2. *Пусть $u\in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, где $\sigma>n\ge 2$. Тогда для преобразования Фурье $\mathcal{F}u$ справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}u(\xi)| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{\Omega^{n-1}n^N}{\sigma-n}\|u\|_{N,\sigma}|\xi|^{-N}, \quad \xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0, \tag{2.14}$$

где Ω^{n-1} обозначает площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Заметим, что из условия $u\in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ следует, что все частные производные функции u до порядка N влючительно принадлежат $L^1(\mathbb{R}^n)$ и справедлива следующая формула:

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x^\alpha}dx = (i\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(i\xi_n)^{\alpha_n}(\mathcal{F}u)(\xi),$$

где $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$. Беря модуль от левой и правой частей, домножая на полиномиальные коэффициенты и суммируя по всем $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, получим равенство

$$\sum_{|\alpha|=N}\binom{N}{\alpha}\left|(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x^\alpha}dx\right| = (|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|)^N|\mathcal{F}u(\xi)|, \tag{2.15}$$

где $\xi\in\mathbb{R}^n$. Теперь учтём, что из условия $u\in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ вытекает следующая оценка при всех $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha|=N$:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x^\alpha}dx\right| \le \|u\|_{N,\sigma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^n)^{-\frac{\sigma}{n}}dx = \|u\|_{N,\sigma}\frac{\Omega^{n-1}}{\sigma-n}.$$

Учитывая эту оценку и оценку $|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|\ge|\xi|$, а также принимая во внимание, что сумма всех полиномиальных коэффициентов $\binom{N}{\alpha}$ по $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| = N$, равна n^N, получим из (2.15) оценку (2.14). $\square$

Доказательство леммы 2.1. Пусть $f \in C^{N,\sigma}_c(\mathbb{R}^n_+)$, где N, σ и c удовлетворяют условиям леммы 2.1. Определим $u(y) = (E_c f)(y)$, где оператор E_c задаётся формулой (1.53). Заметим, что $f \in C^{N,\sigma}_c(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда $u \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует, в частности, что $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, так что справедлива формула обращения преобразования Фурье

$$u(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y} (\mathcal{F}^{-1}u)(\xi)\, d\xi, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Применим к этому равенству оператор E_c^{-1} и воспользуемся равенством $(\mathcal{F}^{-1}u)(\xi) = (Mf)(c + i\xi)$ (см. формулу (1.55)). Мы получим формулу

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} x^{-(c+i\xi)} (Mf)(c + i\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.16}$$

Теперь заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} x^{-(c+i\xi)} (Mf)(c + i\xi)\, d\xi \right| &\overset{(1.55)}{\le} x^{-c} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |(\mathcal{F}u)(\xi)|\, d\xi \\
&\overset{(2.14)}{\le} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} x^{-c} \frac{\Omega^{n-1} n^N}{\sigma - n} \|u\|_{N,\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |\xi|^{-N}\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} x^{-c} \frac{(\Omega^{n-1})^2 n^N}{(\sigma - n)(N - n)} \|f\|_{N,\sigma,c} R^{n-N}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Из формул (2.16) и (2.17) следуют формулы (2.11) и (2.12). Лемма 2.1 доказана. $\square$

2.3 Аналоги тауберовых теорем Винера

Доказательства теорем 2.2 и 2.3 основаны на многомерных теоремах Винера об аппроксимации функций, для формулировки которых нам потребуется ввести одно обозначение. Для заданной функции f на $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_f$ линейную оболочку её аддитивных сдвигов:

$$\mathcal{S}_f = \operatorname{span}\big\{ f_a \mid f_a(x) = f(x-a),\ a \in \mathbb{R}^n \big\}. \tag{2.18}$$

Напомним также, что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ определяется формулой (1.49). Многомерные теоремы Винера об аппроксимации функций формулируются следующим образом.

Теорема 2.6. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{S}_f$ всюду плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}f \neq 0$ п.в.*

Теорема 2.7. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{S}_f$ всюду плотно в $L^1(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $(\mathcal{F}f)(\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

Теоремы 2.6 и 2.7 в случае $n = 1$ впервые были представлены в книге [79]. Доказательство теоремы 2.6, приводимое в [79], легко обобщается на случай $n \geq 2$. Аналогично, доказательство необходимости в теореме 2.7 легко переносится на многомерный случай. С другой стороны, автору неизвестна ссылка на работу, где была бы доказана достаточность в теореме 2.7 в случае $n \geq 2$. По этой причине, доказательство будет приведено ниже.

Доказательство теоремы 2.7 (достаточность). Пусть $(\mathcal{F}f)(\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$. Мы хотим показать, что любая функция $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ может быть аппроксимирована в $L^1(\mathbb{R}^n)$ функциями из $\mathcal{S}_f$. Заметим, что функция h может быть аппроксимирована в $L^1(\mathbb{R}^n)$ функциями, чье преобразование Фурье имеет компактный носитель. Поэтому, не ограничивая общности, мы будем считать, что функция $\mathcal{F}h$ имеет компактный носитель.

Из теоремы Хана–Банаха следует, что достаточно показать, что для всякой функции $K \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ из равенства $f * K = 0$ следует равенство $h * K = 0$, где $*$ обозначает свёртку. В частности, достаточно показать, что существует функция $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ такая, что $f * g = h$.

Мы будем использовать теорию коммутативных банаховых алгебр, необходимые определения см., например, в [47]. Обозначим через $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ пространство комплекснозначных интегрируемых функций.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое ограниченное множество с замыканием $\overline{\Omega}$ и содержащее $\operatorname{supp} \mathcal{F}h$. Заметим, что $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ является коммутативной банаховой (свёрточной) алгеброй. Определим

$$I = \big\{ g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid (\mathcal{F}g)(\xi) = 0,\ \xi \in \overline{\Omega} \big\}.$$

Заметим, что I — замкнутый идеал в $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, и положим $A = L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})/I$. A является коммутативной банаховой алгеброй с единицей $e+I$, где $e \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $\mathcal{F}e \equiv 1$ на $\overline{\Omega}$, а $e+I$ обозначает класс смежности e в A.

Можно показать, что всякий ненулевой мультипликативный линейный функционал на A имеет вид $\varphi_\xi \colon a + I \mapsto a(\xi)$, где $\xi \in \overline{\Omega}$, $a \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Используя теорему Гельфанда–Мазура ([47, Theorem 1.2.9]) и учитывая, что $\varphi_\xi(f+I) \neq 0$ для любого $\xi \in \overline{\Omega}$, мы получаем, что элемент $f + I$ обратим в A. Это означает, что существует функция $g_0 \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ такая, что $\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g_0 \equiv 1$ на $\overline{\Omega}$. Положим $g = h * \operatorname{Re} g_0$. Тогда $f * g = h$. Теорема доказана. □

Мы перенесём теоремы 2.6 и 2.7 на случай анализа в неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^n_+$, где роль преобразования Фурье $\mathcal{F}$ играет преобразование Меллина M из формулы (1.16). Для заданной функции k на $\mathbb{R}^n_+$ обозначим линейную оболочку её мультипликативных сдвигов через T_k:

$$\mathcal{T}_k = \operatorname{span}\big\{k_p \mid k_p(x) = k(p_1 x_1, \dots, p_n x_n),\ p \in \mathbb{R}^n_+\big\}. \tag{2.19}$$

Следующие две теоремы являются многомерными аналогами теоремы [50, Chapter II, Theorem 8.1] для случая анализа в положительном ортанте $\mathbb{R}^n_+$.

Лемма 2.3. *Пусть $k \in L^2_c(\mathbb{R}^n_+)$, где $c \in \mathbb{R}^n_+$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) T_k всюду плотно в $L^2_c(\mathbb{R}^n_+)$.

(2) $(Mk)(z) \neq 0$ п.в. при $\operatorname{Re} z = c$.

(3) Уравнение

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} k_p(x) f(x)\, dx = 0, \quad p \in \mathbb{R}^n_+,$$

имеет только тривиальное решение $f = 0$ в $L^2_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$.

Доказательство. ($1 \iff 2$). Пусть оператор E_c определён формулой (1.53). Справедлива следующая формула:

$$(E_c k_p)(y) = p^{-c}(E_c k)(y + \ln p), \tag{2.20}$$

где k_p определено в формуле (2.19), $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\ln p = (\ln p_1, \dots, \ln p_n)$.

Из формулы (2.20), в частности, следует соотношение

$$E_c \mathcal{T}_k = \mathcal{S}_{E_c k}, \tag{2.21}$$

где множества $\mathcal{S}_{E_c k}$, $\mathcal{T}_k$ определены в формулах (2.18) и (2.19) соответственно.

Учитывая, что E_c — изометрия $L^2_c(\mathbb{R}^n_+)$ на $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ (см. формулу (1.57)), мы получаем, что $\mathcal{T}_k$ всюду плотно в $L^2_c(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}_{E_c k}$ всюду плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Наконец, пользуясь теоремой 2.6, мы получаем, что $\mathcal{S}_{E_c k}$ всюду плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда

$$(\mathcal{F}^{-1} E_c k)(\xi) \overset{(1.55)}{=\!=} (Mk)(c - i\xi) \neq 0 \quad \text{п.в. при } x \in \mathbb{R}^n.$$

($1 \iff 3$). Это следствие из теоремы Хана–Банаха. □

Лемма 2.4. *Пусть $k \in L^1_c(\mathbb{R}^n_+)$, где $c \in \mathbb{R}^n_+$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) T_k всюду плотно в $L^1_c(\mathbb{R}^n_+)$.

(2) $(Mk)(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z = c$.

(3) Уравнение

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} k_p(x) f(x)\, dx = 0, \quad p \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.22}$$

имеет только тривиальное решение $f = 0$ в $L^\infty_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$.

Доказательство. ($2 \iff 3$). Определим оператор E_c формулой (1.53). Справедлива следующая формула:

$$\begin{gathered} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x) v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (E_c u)(y)\, (E_{I-c} v)(y)\, dy, \\ \text{для всех } u \in L^r_c(\mathbb{R}^n_+),\ v \in L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+),\ r,\ p \in [1, \infty],\ \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{p} = 1. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Учитывая формулы (1.57), (2.20), (2.23), мы получаем, что уравнение (2.22) имеет только тривиальное решение в $L^\infty_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$\int_{\mathbb{R}^n} (E_c k)(y - a)\, \Phi(y)\, dy = 0, \quad a \in \mathbb{R}^n, \tag{2.24}$$

имеет только тривиальное решение $\Phi \equiv 0$ в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. По теореме Хана–Банаха это эквивалентно тому, что множество $\mathcal{S}_{E_c k}$ всюду плотно в $L^1(\mathbb{R}^n)$. По теореме

2.7 это эквивалентно тому, что

$$(\mathcal{F}^{-1}E_c k)(\xi) \overset{(1.55)}{=\!=} (Mk)(c - i\xi) \neq 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n.$$

($1 \Longleftrightarrow 3$). Это следует из теоремы Хана–Банаха. $\square$

2.4 Доказательство теорем 2.2 и 2.3

Доказательство теоремы 2.2. Заметим, что утверждение теоремы 2.2, касающееся оператора Π_q, будет следовать из теоремы 2.3 в случае оператора R_q^h с $h(t) = \max\{0, p_0 - t\}$, если учесть выражение (1.68) для Mh.

Поэтому нам достаточно доказать теорему 2.2 для случая оператора R_q. Для краткости обозначим

$$H_c^n = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \colon \operatorname{Re} z = c \right\}, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Для заданной функции φ на H_c^n положим

$$Z_c(\varphi) = \left\{ z \in H_c^n \colon \varphi(z) = 0 \right\}.$$

Случай $r = 1$. ($\Longrightarrow$). Предположим, от противного, что найдётся такое относительно открытое множество $U \subset H_c^n$, $U \neq \varnothing$, что $(Me^{-q})(z) = 0$ для всех $z \in U$.

Пусть $\chi \in C^\infty(H_{I-c}^n)$ — отличная от нуля функция такая, что $\chi(I - z) = 0$ при $z \notin U$. Определим функцию $\widehat{\chi}$ на $\mathbb{R}_+^n$ следующей формулой:

$$\widehat{\chi} = E_{(I-c)}^{-1} \mathcal{F} T_{(I-c)} \chi, \tag{2.25}$$

где операторы $E_{(I-c)}$ и $T_{(I-c)}$ определяются в формулах (1.53), (1.54), а $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, определённое в формуле (1.49).

Используя, что $\mathcal{F} C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ и учитывая формулу (1.57), мы получаем, что

$$\widehat{\chi} \in L_{I-c}^1(\mathbb{R}_+^n) \ \text{ и } \ \widehat{\chi} \not\equiv 0. \tag{2.26}$$

Из формул (1.55) и (2.25) следует, что

$$(M\widehat{\chi})(I - c) = \chi(I - z), \quad z \in H_c^n. \tag{2.27}$$

Используя формулу (1.21) с $f = \widehat{\chi}$ и учитывая, что $\chi(I - z) = 0$ при $z \notin U$, а $(Me^{-q})(z) = 0$ при $z \in U$, мы получаем, что $(MR_q\widehat{\chi})(z) = 0$ при $z \in H^n_c$. Следовательно, $R_q\widehat{\chi} \equiv 0$, что противоречит инъективности R_q в пространстве $L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$.

($\Longleftarrow$). Пусть множество нулей функции Me^{-q} нигде не плотно в плоскости H^n_c. Мы покажем от противного, что R_q инъективен в $L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$. Предположим, от противного, что существует функция $f \in L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ такая, что $f \not\equiv 0$, $R_qf \equiv 0$.

Справедливы следующие утверждения:

$$H^n_{I-c} \setminus Z_{I-c}(Mf) \text{ открыто в } H^n_{I-c} \text{ и непусто,}$$
$$H^n_c \setminus Z_c(Me^{-q}) \text{ открыто и всюду плотно в } H^n_c.$$

Отсюда следует, что существует относительно открытое множество $U \subset H^n_c$, $U \neq \varnothing$, такое что

$$(Mf)(I - z)\,(Me^{-q})(z) \neq 0, \quad z \in U.$$

Учитывая эту формулу и пользуясь равенством (1.21), мы получаем, что $(MR_qf)(z) \neq 0$ при $z \in U$. Это противоречит предположению, что $R_qf \equiv 0$.

Случай $r = 2$. ($\Longrightarrow$). Предположим, от противного, что существует ограниченное множество $U \subset H^n_c$ положительной меры Лебега (в H^n_c) такое, что $(Me^{-q})(z) = 0$ при $z \in U$. Определим функцию χ на H^n_{I-c} формулой

$$\chi(I - z) = \begin{cases} 1, & z \in U, \\ 0, & z \notin U. \end{cases}$$

Затем определим функцию $\widehat{\chi}$ на $\mathbb{R}^n_+$ формулой (2.25). Из формул (1.57), (2.25) и из вложения $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ следует, что

$$\widehat{\chi} \in L^2_{I-c}(\mathbb{R}^n_+) \;\text{ и }\; \widehat{\chi} \not\equiv 0.$$

Из формул (1.55), (2.25) также следует, что справедливо равенство (2.27).

Используя формулу (1.21) при $f = \widehat{\chi}$ и учитывая, что $(M\widehat{\chi})(I-z)\cdot(Me^{-q})(z) = 0$ при $z \in H^n_c$, мы получаем, что $(MR_q\widehat{\chi})(z) = 0$ при $z \in H^n_c$. Отсюда следует, что $R_q\widehat{\chi} \equiv 0$, что противоречит инъективности R_q в пространстве $L^2_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$.

($\Longleftarrow$). Предположим, что Me^{-q} не обнуляется в плоскости H^n_c почти всюду.

Пусть функция $f \in L^2_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ такова, что $R_q f \equiv 0$.

Заметим, что $x^{I-2c} f(x) \in L^2_c(\mathbb{R}^n_+)$. Пользуясь леммой 2.3, мы находим такие $a_k \in \mathbb{R}$, $p_k \in \mathbb{R}^n_+$, что

$$x^{I-2c} f(x) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} a_k \exp\bigl(-q_{p_k}(x)\bigr) \quad \text{в } L^2_c(\mathbb{R}^n_+).$$

Из этой формулы и из формулы коплощади (1.36) вытекает следующее равенство, доказывающее, что $f \equiv 0$:

$$\|f\|^2_{2,I-c} = \int_{\mathbb{R}^n_+} x^{I-2c} f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-t} (R_q f)(\tfrac{p_k}{t})\,dt = 0.$$

Случай $r = \infty$. ($\Longrightarrow$). Предположим, от противного, что существует $z^0 \in H^n_c$ такой, что $(Me^{-q})(z^0) = 0$. Положим $\widehat{\chi}(x) = x^{z^0 - I}$.

Заметим, что $\widehat{\chi} \in L^{\infty}_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ и что для каждого $p \in \mathbb{R}^n_+$

$$(R_q \widehat{\chi})(p) = p^{-z^0} (R_q \widehat{\chi})(I) \overset{(1.63)}{=\!=} p^{-z^0} \frac{(Me^{-q})(z^0)}{\Gamma(z^0_1 + \cdots + z^0_n)} = 0,$$

где $z^0 = (z^0_1, \ldots, z^0_n)$. Последнее равенство противоречит инъективности R_q на $L^{\infty}_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$.

($\Longleftarrow$). Пусть $f \in L^{\infty}_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ и пусть $R_q f \equiv 0$. Заметим, что $x^{2(I-c)} e^{-|x|} f(x) \in L^1_c(\mathbb{R}^n_+)$. Пользуясь леммой 2.4, мы находим такие $a_k \in \mathbb{R}$, $p_k \in \mathbb{R}^n_+$, что

$$x^{2(I-c)} e^{-|x|} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\bigl(-q_{k_p}(x)\bigr) \quad \text{в } L^1_c(\mathbb{R}^n_+).$$

Отсюда и из формулы (1.36) вытекает соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} x^{2(I-c)} e^{-|x|} f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-t} (R_q f)(\tfrac{p_k}{t})\,dt = 0,$$

влекущее $f \equiv 0$. $\square$

Доказательство теоремы 2.3. Случай $r = 1$. ($\Longrightarrow$). Предположим, от противного, что R^h_q инъективен в $L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$, но либо $Z_c(Me^{-q})$ имеет непустую внутренность в H^n_c, либо $Z_\alpha(Mh)$ имеет непустую внутренность в H^1_α. Тогда существует непустое относительно открытое множество $U \subset Z_c((Me^{-q})(Mh)')$, где $(Mh)'(z) = (Mh)(z_1 + \cdots + z_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Выберем произвольную функцию $\chi \in C^\infty(H^n_{I-c})$ такую что $\chi \not\equiv 0$, $\chi(I-z) = 0$ при $z \notin U$ и определим $\widehat{\chi} \in L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ формулой (2.25). Повторяя доказательство случая $r = 1$ в теореме 2.2 (при этом пользуясь формулой (1.22) вместо (1.21)), можно показать, что $R^h_q \widehat{\chi} \equiv 0$, что противоречит инъективности R^h_q в пространстве $L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$.

($\Longleftarrow$). Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно показать, что если R_q инъективен в $L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ и $Z_c(Mh)$ нигде не плотно в H^1_α, то R^h_q инъективен в $L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$.

Предположим, что оператор R_q инъективен в $L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ и что $Z_c(Mh)$ нигде не плотно в H^1_α. Предположим, что функция $f \in L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ такова, что $R^h_q f \equiv 0$. Пользуясь формулами (1.21) и (1.22), мы получаем соотношение

$$(MR^h_q f)(z) = (MR_q f)(z)\,(Mh)(s),$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in H^n_c$, $s = z_1 + \cdots + z_n$. Отсюда и из формулы (1.55) следует, что $MR_q f \equiv 0$ в H^1_c как непрерывная функция, обнуляющаяся на открытом всюду плотном множестве. Следовательно, $R_q f \equiv 0$ и $f \equiv 0$.

Случай $r = 2$. Из леммы 2.3 следует, что оператор R^h_q инъективен в $L^2_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда

$$(M(h \circ q))(z) \neq 0, \quad (h \circ q)(x) = h(q(x)), \tag{2.28}$$

для почти всех $z \in H^n_c$. Пользуясь формулой (1.61) с $p = I$, мы получаем, что (2.28) выполнено для почти всех $z \in H^n_c$ тогда и только тогда, когда Me^{-q} не равно нулю почти всюду в H^n_c и Mh не равно нулю почти всюду в H^1_α.

Случай $r = 3$. Из леммы 2.4 следует, что R^h_q инъективен в $L^\infty_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда неравенство (2.28) выполнено для всех $z \in H^n_c$. С другой стороны, учитывая тождество (1.61), можно видеть, что (2.28) выполнено для всех $z \in H^n_c$ тогда и только тогда, когда Me^{-q} не обнуляется в H^n_c и Mh не обнуляется в H^1_α. □

2.5 Доказательство теорем 2.4, 2.5 и предложений 2.1, 2.2

Мы начнём этот параграф с доказательства теоремы 2.4.

Доказательство теоремы 2.4. Утверждение (1). Пусть μ — борелевская мера (со знаком), интегрируемая с весом $\exp(-A|x|^\alpha)$ при некотором $A > 0$ и пусть

$(\Pi_q\mu)(p_0,p)=0$, $p_0>0$, $p\in\mathbb{R}^n_+$, где $q=q_\alpha$, $\alpha\in(0,1]$. Не ограничивая общности, мы считаем, что $a_1=\cdots=a_n=1$, так как общий случай сводится к этому заменой переменных.

Пользуясь формулой (1.39), мы получаем, что $\mu(L_q(p_0,p))=0$ при $p_0>0$, $p\in\mathbb{R}^n_+$, где множество $L_q(p_0,p)$ определено в формуле (1.38). Пусть $\mu=\mu_1-\mu_2$ — разложение Жордана меры μ, так что μ_1 и μ_2 — неотрицательные борелевские меры и справедливо равенство

$$\mu_1(L_{q_1}(p_0,p))=\mu_2(L_{q_2}(p_0,p)),\quad p_0>0, p\in\mathbb{R}^n_+.$$

Выберем $h(t)=\exp(-C(A)t^\alpha)$, где $C(A)>0$ — некоторая достаточно большая константа. Тогда $\int_{\mathbb{R}^n_+}h(q_p(x))\mu_j(dx)<\infty$, $j=1,\ 2$, для всех $p\in\mathbb{R}^n_+$. Пользуясь леммой 1.4, мы получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\exp\bigl(-C(A)((p_1x_1)^\alpha+\cdots+(p_nx_n)^\alpha)\bigr)\mu(dx)=0,\quad p\in\mathbb{R}^n_+.$$

Сделаем замену переменных $y_j=x_j^\alpha$ и замену параметров $v_j=C(A)p_j^\alpha$. При этом мера μ перейдёт в меру μ', для которой справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\exp(-v_1y_1-\cdots-v_ny_n)\mu'(dy),\quad v\in\mathbb{R}^n_+.$$

Отсюда следует, что $\mu'=0$ и $\mu=0$.

Утверждение (2). Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}^n_+)\cap C(\mathbb{R}^n_+)$ и пусть $\Pi_qf=0$. Из формул (1.43) и (1.44) следует, что $R_qf=0$.

Заметим, что тождество $(R_qf)(p)=0$, $p\in\mathbb{R}^n_+$, эквивалентно тождеству

$$\int\limits_{u_1^{a_1}\cdots u_n^{a_n}=t}f(u)\,u_1du_2\wedge\cdots\wedge du_n=0,\quad t>0. \tag{2.29}$$

Сделаем замену переменных $x_j=u_j^{a_j}$, где a_j определены в (1.9), и введём координаты $(y_1,\ldots,y_{n-1},h)$ и функцию f_h, как в формуле (2.6). Мы получим, что тождество (2.29) эквивалентно тому, что $\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f_h(y)dy=0$ при всех $h\in\mathbb{R}$.

Утверждение (3). Пусть $f\in L^1_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)\cap C(\mathbb{R}^n_+)$ и пусть $\Pi_qf=0$, где $q=q_\alpha$, $\alpha\in(-\infty,0)$, $c\in\mathbb{R}^n_+$ (покомпонентно). Мы также считаем, не ограничивая общности, что $a_1=\cdots=a_n=1$. Пользуясь формулой (1.43), получаем, что

$R_q f = 0$.

Положим $g(x) = f(x_1^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, x_n^{\frac{1}{\alpha}})$ и заметим, что

$$g \in L^1_{(I-c)/\alpha}(\mathbb{R}^n_+). \tag{2.30}$$

Заметим, что справедлива формула

$$(R_q f)(p) = \int\limits_{q_p^{-1}(1)} f(x) \frac{x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n}{p_1^\alpha x_1^\alpha}.$$

Делая замену переменных $y_j = (p_j x_j)^\alpha$, приведём эту формулу к следующему виду:

$$(R_q f)(p) = \int\limits_{\substack{y_1+\cdots+y_n=1\\ 0\le y_j\le 1}} (-1)^{n-1} f\left(\frac{y_1^{\frac{1}{\alpha}}}{p_1}, \ldots, \frac{y_n^{\frac{1}{\alpha}}}{p_n}\right) \big(y_1 y_2 \cdots y_n\big)^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n}{\alpha^{n-1} p_1 \cdots p_n}. \tag{2.31}$$

Учитывая формулы (2.30) и (2.31) и вычисляя преобразование Меллина от тождества

$$p_1^{-\frac{1}{\alpha}} \cdots p_n^{-\frac{1}{\alpha}} (R_q f)(p_1^{-\frac{1}{\alpha}}, \ldots, p_n^{-\frac{1}{\alpha}}) = 0$$

по переменным $p_1, \ldots, p_n$, получим тождество

$$(Mg)(z) \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha} - z_1) \cdots \Gamma(\frac{1}{\alpha} - z_n)}{\Gamma(\frac{n}{\alpha} - z_1 - \cdots - z_n)} = 0, \quad \operatorname{Re} z = \frac{I-c}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что $Mg(z) = 0$ при $\operatorname{Re} z = (I-c)/\alpha$. Учитывая формулу (2.30), получим, что $g = 0$ и $f = 0$.

Утверждение (4). Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n_+) \cap C^1(\mathbb{R}^n_+)$ и пусть $\Pi_q f = 0$, где $q = q_{-\infty}$. Достаточно рассмотреть случай, когда $a_1 = \cdots = a_n = 1$, так как общий случай сводится к нему заменой переменных p. Из формулы (1.43) следует, что $(R_q f)(p) = 0$, $p \in \mathbb{R}^n_+$, где

$$(R_q f)(p) = \sum_{j=1}^n \int\limits_1^\infty \cdots \int\limits_1^\infty f\left(\frac{x_1}{p_1}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{p_{j-1}}, \frac{1}{p_j}, \frac{x_{j+1}}{p_{j+1}}, \ldots, \frac{x_n}{p_n}\right) \frac{(dx)^{\wedge j}}{p_1 \cdots p_n}, \tag{2.32}$$

и $(dx)^{\wedge j} = dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n$. Заметим, что в данном случае функция q не является гладкой и мы не можем использовать формулу (1.12), чтобы определить $R_q f$.

Дифференцируя тождество $(R_q f)(p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}) \equiv 0$ по переменным $p_1, \dots, p_n$, мы получаем следующее тождество:

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + p_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = -n f(p), \quad p \in \mathbb{R}^n_+.$$

Используя метод характеристик, мы находим, что в сферических координатах (ϑ, r) справедлива формула $f(\vartheta, r) = C(\vartheta) r^{-n}$. Учитывая, что $f \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$, мы получаем, что $C = 0$ и $f = 0$. Теорема 2.4 доказана. $\square$

Следующей нашей целью является доказательство предложения 2.1. Нам потребуется одна вспомогательная лемма, которая устанавливает, что свойство инъективности для оператора прибыли Π_q "наследуется" по отношению к частичной композиции (1.11).

Лемма 2.5. *Пусть функции* $q\colon \mathbb{R}^{k+1}_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k \geq 1$, $\phi \in \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $m \geq 2$, *удовлетворяют* (1.8), (1.10). *Предположим, что оператор* Π_q *инъективен в* $L^r_{I-c'}(\mathbb{R}^{k+1}_+)$, *а оператор* Π_ϕ *инъективен в* $L^r_{I-d}(\mathbb{R}^m_+)$ *при некоторых* $r \in \{1, 2, \infty\}$, $c' = (c, d_1 + \dots + d_m) \in \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^1_+$, $d = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^m_+$. *Положим* $\widetilde{q}(x, y) = q(x, \phi(y))$, $x \in \mathbb{R}^k_+$, $y \in \mathbb{R}^m_+$. *Тогда* $\widetilde{q}$ *удовлетворяет* (1.8), (1.10) *и оператор* $\Pi_{\widetilde{q}}$ *инъективен в* $L^r_{I-c''}(\mathbb{R}^{k+m})$, *где* $c'' = (c, d)$.

Доказательство леммы 2.5. Пользуясь формулой коплощади (1.36), мы получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{k+m}{2}} (Me^{-\widetilde{q}})(z, w) &= \int_{\mathbb{R}^k_+} \int_{\mathbb{R}^m_+} x^{z-I} y^{w-I} \exp(-q(x, \phi(y)))\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^k_+} \int_0^\infty x^{z-I} t^{s-1} \exp(-q(x,t))\, dx\, dt \int_{\phi^{-1}(1)} y^{w-I} \frac{dS_y}{|\nabla \phi(y)|},\end{aligned}$$

где $z \in \mathbb{C}^k$, $\operatorname{Re} z = c$, $w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^m$, $\operatorname{Re} w = d$. Отсюда с учётом формулы (1.63) получается формула

$$(Me^{-\widetilde{q}})(z, w) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{(Me^{-\phi})(w)\, (Me^{-q})(z, s)}{\Gamma(s)}, \quad s = w_1 + \dots + w_m. \tag{2.33}$$

Утверждение предложения следует из формулы (2.33) и теоремы 2.2. $\square$

Доказательство предложения 2.1. Можно видеть, что предложение 2.1 непосредственно следует из первого пункта теоремы 2.4 и леммы 2.5. $\square$

Теперь мы перейдём к доказательству теоремы 2.5.

Доказательство теоремы 2.5. Для простоты обозначений мы будем предполагать, что $q_j(x) = C_j(x_1^{\alpha_j} + \cdots + x_n^{\alpha_j})^{1/\alpha_j}$, $j = 1, 2$. В общем случае доказательство аналогично.

Применяя формулу (1.39), мы получаем, что

$$\mu_1(L_{q_1}(p_0, p)) = \mu_2(L_{q_2}(p_0, p)), \quad p_0 > 0, p \in \mathbb{R}_+^n.$$

Отсюда, пользуясь леммой 1.4 с $h(t) = \exp(-t^{\alpha_1})$, приходим к следующему равенству при всех $p \in \mathbb{R}_+^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp\bigl(-C_1^{\alpha_1}\bigl((p_1x_1)^{\alpha_1} + \cdots + (p_nx_n)^{\alpha_1}\bigr)\bigr)\,\mu_1(dx)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp\bigl(-C_2^{\alpha_1}\bigl((p_1x_1)^{\alpha_2} + \cdots + (p_nx_n)^{\alpha_2}\bigr)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\bigr)\,\mu_2(dx).$$

Сделаем в первом интеграле замену переменных $y_j = x_j^{\alpha_1}$, а во втором — $y_j = x_j^{\alpha_2}$. Обозначим получающиеся меры через μ_1' и μ_2', соответственно. Кроме того, сделаем замену параметров $u_j = (C_2p_j)^{\alpha_1}$. Мы получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp(-Cuy)\,\mu_1'(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp\bigl(-(u^\gamma y)^{\frac{1}{\gamma}}\bigr)\,\mu_2'(dy), \quad u \in \mathbb{R}_+^n, \tag{2.34}$$

где $C = (C_1/C_2)^{\alpha_1}$, $\gamma = \alpha_2/\alpha_1$, $u^\gamma = (u_1^\gamma, \ldots, u_n^\gamma)$.

Заметим, что левый интеграл в формуле (2.34) является вполне монотонной функцией u. Следовательно, правый интеграл также является вполне монотонной функцией. В частности, вторая производная по первой паре индексов неотрицательна при всех $u \in \mathbb{R}_+^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{u_k y_k^{\frac{1}{\gamma}}}{u_1 + \cdots + u_n}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}-2} y_1y_2\left((u^\gamma y)^{\frac{1}{\gamma}} + \gamma - 1\right) e^{-(u^\gamma y)^{\frac{1}{\gamma}}}\mu_2'(dy) \geq 0. \tag{2.35}$$

Положим $u_1 = \cdots = u_n = t$ и заметим, что подынтегральная функция в формуле (2.35) мажорируется сверху выражением

$$n^{2\gamma-1}(y_1 + \cdots + y_n)^{\frac{1}{\gamma}}\bigl(t(y_1 + \cdots + y_n)^{\frac{1}{\gamma}} + |\gamma| + 1\bigr).$$

Также отметим, что условие $|x|^{2\alpha_1} \in L^1(\mathbb{R}_+^n, \mu_2)$ влечёт условие $(y_1+\cdots+y_n)^{2/\gamma} \in L^1(\mathbb{R}_+^n, \mu_2')$. Пользуясь теоремой о мажорируемой сходимости, перейдём в формуле (2.35) к пределу при $t \to +0$. Получим следующее неравенство:

$$(\gamma-1)n^{2\gamma-1}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} y_1y_2(y_1+\cdots+y_n)^{\frac{1}{\gamma}-2}\mu_2'(dy) \geq 0.$$

Далее заметим, что так как $\gamma < 1$, то отсюда следует, что $\mu_2' = 0$ и $\mu_2 = 0$. Следовательно, $\Pi_{q_1}\mu_1 = 0$. По теореме 2.4 получим, что $\mu_1 = 0$. Теорема 2.5 доказана. $\square$

Для доказательства предложения 2.2 нам потребуются одно вспомогательное утверждение. Напомним, что преобразование Лапласа меры θ на $\mathbb{R}_+^n$ задаётся формулой

$$(L\theta)(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-px}\,\theta(dx), \quad p \in \mathbb{R}_+^n.$$

Для всякой неотрицательной борелевской меры θ на $\mathbb{R}_+^2$ определим меру $\sqrt{\theta}$ правилом $\sqrt{\theta}(A) = \theta(\sqrt{A})$ для всякого борелевского множества A, где

$$\sqrt{A} = \big\{(\sqrt{x}_1, \sqrt{x}_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid (x_1, x_2) \in A\big\}.$$

Лемма 2.6. *(A) Пусть мера μ определена формулой* (2.9). *Тогда*

$$(L\mu)(p_1,p_2) = \int\limits_0^\infty \exp\big(-t - \tfrac{1}{\sqrt{t}}\big(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}\big)\big)\frac{dt}{t}, \quad p_1, p_2 > 0. \tag{2.36}$$

(B) Пусть мера ν определена формулой (2.10). *Тогда*

$$(L\sqrt{\nu})(p_1,p_2) = \int_0^\infty \exp\big(-\sqrt{t} - \tfrac{1}{\sqrt{t}}\big(p_1+p_2\big)\big)\frac{dt}{t}, \quad p_1, p_2 > 0. \tag{2.37}$$

Доказательство леммы 2.6. Утверждение (A). Для всякого $c > 0$ справедлива формула

$$\frac{2}{c}K_1(2c) = \int\limits_0^\infty \exp\left(-t - \frac{c^2}{t}\right)\frac{dt}{t^2},$$

где функция K_1 определена в формуле (2.7). Полагая $c = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_1+x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}$ и используя формулу (2.9), получим следующее равенство:

$$\mu(dx_1, dx_2) = \frac{dx_1\, dx_2}{4\pi(x_1x_2)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^\infty \exp\biggl(-t - \frac{1}{4t}\biggl(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\biggr)\biggr)\frac{dt}{t^2}. \tag{2.38}$$

Определим функцию

$$e_a(u) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}u^{\frac{3}{2}}} \exp\biggl(-\frac{a}{4u}\biggr), \quad a > 0,\ u > 0. \tag{2.39}$$

Преобразование Лапласа функции e_a задаётся следующей формулой (см. [89, с. 35, формула (28)]):

$$(Le_a)(s) = e^{-\sqrt{as}}, \quad s > 0. \tag{2.40}$$

Из формул (2.38) и (2.39), (2.40) при $a = t^{-1}$ следует формула (2.36).

Утверждение (B). Пусть $A \subset \mathbb{R}^2_+$ — произвольное борелевское множество. Обозначим

$$A_{\mathrm{diag}} = \bigl\{u \in \mathbb{R}^1_+ \mid (u,u) \in A\bigr\}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sqrt{\nu}(A) = \nu(\sqrt{A}) \overset{(2.10)}{=\!=} 4 \int\limits_{(\sqrt{A})_{\mathrm{diag}}} \exp\bigl(-\tfrac{1}{v^2}\bigr)\,\frac{dv}{v} \overset{v=\sqrt{u}}{=\!=} 2 \int\limits_{A_{\mathrm{diag}}} \exp\bigl(-\tfrac{1}{u}\bigr)\,\frac{du}{u}.$$

Это равенство можно сформулировать в следующем виде:

$$\sqrt{\nu}(dx_1, dx_2) = 2x_1^{-1} \exp\bigl(-\tfrac{1}{x_1}\bigr)\delta(x_1 - x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Пользуясь этой формулой, получим следующую цепочку равенств, которая доказывает формулу (2.37):

$$(L\sqrt{\nu})(p_1, p_2) = 2\int\limits_0^\infty e^{-s(p_1+p_2)} s^{-1} \exp\bigl(-\tfrac{1}{s}\bigr)\, ds$$

$$\overset{s^{-1}=\sqrt{t}}{=\!=\!=} \int\limits_0^\infty \exp\bigl(-\sqrt{t} - \tfrac{1}{\sqrt{t}}(p_1+p_2)\bigr)\frac{dt}{t}.$$

$\square$

Доказательство предложения 2.2. Мы применим теорему характеризации 1.4 к функции П. Из определения (2.8) видно, что функция П удовлетворяет свойству (3) теоремы 1.4. Повторным дифференцированием формулы (2.8) по p_0 мы получаем следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_0^2}(p_0, p) = \frac{1}{p_0}\exp\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{p_0}}\bigl(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}\bigr)\bigr), \quad p_0 > 0,\ p \in \mathbb{R}_+^2. \tag{2.41}$$

Из формулы (2.41) видно, что $\partial^2\Pi/\partial p_0^2 \geq 0$. Следовательно, выполнено свойство (1) теоремы 1.4. Кроме того, из формулы (2.41) следует, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_0^2}(\lambda t, p) = \lambda^{-1}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_0^2}(t, p), \quad \lambda > 0,\ t > 0,\ p \in \mathbb{R}_+^2.$$

Следовательно, П удовлетворяет свойству (2) теоремы 1.4.

Теперь отметим, учитывая формулы (2.36) и (2.37), что справедливы равенства $F_1 = L\mu$ и $F_{1/2} = L\sqrt{\nu}$, где функции F_1 и $F_{1/2}$ определены в формуле (1.35). Следовательно, функции F_1 и $F_{1/2}$ вполне монотонны. Таким образом, функция П удовлетворяет свойству (4) теоремы 1.4 при $\alpha = 1$ и $\alpha = 1/2$. Из теоремы 1.4 с учётом формулы (1.78) следуют представления $\Pi = \Pi_{q_1}\mu$ и $\Pi = \Pi_{q_{1/2}}\nu$. Предложение 2.2 доказано. □

3 Обратная задача Дирихле–Неймана и её приложения в акустической томографии

3.1 Основные определения и постановка задач

В этом параграфе мы определим оператор Дирихле–Неймана и сформулируем обратную задачу Дирихле–Неймана. Мы не будем формулировать требования к регулярности возникающих функций и областей в общем случае, так как эти требования будут различными при изучении различных вопросов.

Пусть $M_n(\mathbb{C})$ обозначает множество комплексных матриц размера $n \times n$. Мы рассматриваем оператор

$$L_{A,V} = -\Delta - 2i \sum_{j=1}^{d} A_j(x) \tfrac{\partial}{\partial x_j} + V(x), \tag{3.1}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad A = (A_1, \ldots, A_d),$$

где $x \in D$, коэффициенты A_1, $\ldots$, A_d, V — достаточно регулярные $M_n(\mathbb{C})$-значные функции в D, а $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ — ограниченная область с гладкой границей ∂D.

Мы рассматриваем задачу Дирихле для оператора $L_{A,V}$ в D:

$$\begin{cases} L_{A,V}\psi = E\psi \quad \text{в области } D, & (3.2\text{a}) \\ \psi|_{\partial D} = f, & (3.2\text{b}) \end{cases}$$

где f — достаточно регулярная функция на ∂D, а $E \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Мы предполагаем, что

$$\begin{gathered} E \textit{ не является собственным значением задачи Дирихле} \\ \textit{для оператора } L_{A,V} \textit{ в } D, \end{gathered} \tag{3.3}$$

так что задача (3.2a), (3.2b) имеет единственное решение ψ в подходящем классе функций.

Оператор Дирихле–Неймана $\Lambda_{A,V} = \Lambda_{A,V}(E)$ сопоставляет функции f на ∂D функцию $\Lambda_{A,V} f$ на ∂D, которая определяется следующим образом:

$$\Lambda_{A,V} f = \big(\tfrac{\partial \psi}{\partial \nu} + \textstyle\sum_{j=1}^{d} A_j \nu_j f\big)|_{\partial D}, \tag{3.4}$$

где ψ — решение задачи (3.2a), (3.2b), а ν — единичный внешний вектор нормали к ∂D.

В последующих параграфах наибольшее внимание будет уделяться случаю $n = 1$. В этом случае, если не оговорено противное, мы предполагаем, что A_j и V принадлежат $L^\infty(D, \mathbb{C})$, задача Дирихле (3.2a)–(3.2b) рассматривается с $f \in H^{1/2}(\partial D)$, а решение ψ ищется в классе $H^1(D)$. При этом оператор Дирихле–Неймана $\Lambda_{A,V}$ отображает функцию $f \in H^{1/2}(\partial D)$ в распределение $\Lambda_{A,V} f \in H^{-1/2}(\partial D)$, опредяемое по формуле (3.4), в которой $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\partial D} \in H^{-1/2}(\partial D)$ определяется следующим соотношением:

$$\left\langle \tfrac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\partial D}, u \right\rangle = \int\limits_D \left(\nabla\psi \cdot \nabla\widetilde{u} - 2i\widetilde{u}A \cdot \widetilde{\psi} + \widetilde{u}(V - E)\psi \right) dx, \tag{3.5}$$

где $u \in H^{1/2}(\partial D)$, а $\widetilde{u}$ — произвольная функция класса $H^1(D)$, удовлетворяющая $\widetilde{u}|_{\partial D} = u$. Заметим, что если ψ удовлетворяет (3.2a), то определение (3.5) не зависит от выбора продолжения $\widetilde{u}$ функции u.

Пусть теперь g – достаточно регулярная $GL_n(\mathbb{C})$-значная функция в $\overline{D}$, такая что $g(x) = \mathrm{Id}_n$, где $GL_n(\mathbb{C})$ обозначает множество обратимых комплексных матриц размера $n \times n$, а Id_n — единичная матрица размера $n \times n$. Рассмотрим следующее преобразование коэффициентов:

$$\begin{cases} A_j \to A_j^g = gA_jg^{-1} + i\dfrac{\partial g}{\partial x_j}g^{-1}, \quad j = 1, \ldots, d, & \text{(3.6a)} \\ V \to V^g = gVg^{-1} - g\Delta g^{-1} - 2i\displaystyle\sum_{j=1}^{d} gA_j\dfrac{\partial g^{-1}}{\partial x_j}, & \text{(3.6b)} \end{cases}$$

и обозначим $A^g = (A_1^g, \ldots, A_d^g)$. Подстановкой проверяется, что справедливы формулы

$$gL_{A,V}g^{-1} = -\Delta - 2i\sum_{j=1}^{d} A_j^g(x)\tfrac{\partial}{\partial x_j} + V^g(x),$$
$$\Lambda_{A^g,V^g} = \Lambda_{A,V},$$

где g и g^{-1} понимаются как операторы умножения на соответствующую функцию. Таким образом, оператор $\Lambda_{A,V}$ инвариантен относительно преобразований (3.6a), (3.6b), которые мы будем называть калибровочными преобразованиями.

Основная задача, которая нас будет интересовать, формулируется следующим образом.

Задача 3.1. *Пусть задан оператор $\Lambda_{A,V}(E)$ при фиксированном E (или при E из фиксированного множества). Найти A и V по модулю калибровочных преобразований* (3.6a), (3.6b).

Мы будем называть задачу 3.1 обратной задачей Дирихле–Неймана. Задача 3.1 возникает при рассмотрении многих вопросов математической физики. Отметим некоторые из них.

При $n = 1$ уравнение (3.2a) является модельным уравнением для гармонического по времени ($e^{-i\omega t}$) акустического давления в движущейся жидкости. При таком рассмотрении $E = 0$,

$$A = \frac{\omega}{c^2}v + \frac{i}{2}\frac{\nabla\rho}{\rho}, \quad V = \frac{\omega^2}{c^2} + 2i\omega\frac{a_\omega}{c}, \tag{3.7}$$

где c — скорость звука, ρ — плотность, v — скорость жидкости, α_ω — коэффициент поглощения, а ω — фиксированная частота. В различных частных случаях такая модель рассматривалась в работах [7, 97, 40, 105, 67, 66]. Задача 3.1 в этой модели переформулируется как задача восстановления параметров жидкости c, ρ, v и α_ω по граничным измерениям. Эта задача имеет приложения в медицинской диагностике. Мы рассматриваем эту задачу более подробно в §3.2.

При $n \geq 2$ и $d = 2$ уравнение (3.2a) возникает как волновое уравнение в модовом представлении для гармонического по времени ($e^{-i\omega t}$) акустического давления в движущейся жидкости в трёхмерном цилиндре конечной высоты и с основанием D. В этом случая задача (3.1) имеет приложения к акустической томографии океана, см. [11].

Кроме того, при $n = 1$ уравнение (3.2a) возникает как уравнение Шрёдингера при фиксированной энергии E с магнитным потенциалом A и электрическим потенциалом v, где

$$v(x) = V(x) - \sum_{j=1}^{d} A_j^2(x) + i\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial A_j(x)}{\partial x_j}. \tag{3.8}$$

В этой постановке задача 3.1 имеет приложения в квантовой теории рассеяния, см., например, [101, 25, 26].

Отметим также, что при $n \geq 2$ уравнение (3.2a) возникает в математической физике как уравнение Шрёдингера при фиксированной энергии E для частицы во внешнем поле Янга–Миллса, см., например, работы [70, 71, 78, 27].

Задаче 3.1, в силу её практической важности, посвящено множество работ. Случай $A \not\equiv 0$ рассматривался, например, в работах [55, 63, 22, 51, 45, 52] при $n = 1$ и в работе [24] при $n \geq 2$. Случай $d = 2$, $A \equiv 0$, $n \geq 1$ был рассмотрен, в частности, в работах [60, 61]. Изучение наиболее простого случая $n = 1$, $A = 0$ восходит к работе [18], где изучалась задача восстановления проводимости металлического тела по электрическим измерениям на его границе.

Существует два основных подхода к решению задачи 3.1 в частных случаях (например, при $n = 1$ и $A = 0$). Первый подход заключается в сведении задачи 3.1 к подходящей эквивалентной многомерной обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии. После этого обратная задача рассеяния решается подходом, восходящим к работам [108, 101, 98, 57]. Этот подход позволяет, в частности, получить явные формулы и интегральные уравнения для нахождения коэффициентов A и V. В диссертации мы используем этот подход для решения задачи 3.1.

Второй основной подход к решению задачи 3.1 восходит к работе [76]. В случае $A = 0$, $n = 1$ он заключается в использовании тождества Алессандрини (см. [9]), которое связывает решения u_1 и u_2 задач $-\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = Eu_1$ и $-\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = Eu_2$ в D с операторами $\Lambda_{0,V_1}(E)$ и $\Lambda_{0,V_2}(E)$:

$$\int\limits_{\partial D} u_1|_{\partial D}\big(\Lambda_{0,V_1}(E) - \Lambda_{0,V_2}(E)\big)u_2|_{\partial D}\, dx = \int\limits_{D} (V_1 - V_2)u_1u_2\, dx.$$

Как видно из этого равенства, если $\Lambda_{0,V_1}(E) = \Lambda_{0,V_2}(E)$, то функции u_1 и u_2 ортогональны с весом $V_1 - V_2$. Если V_1, $V_2 \in L^2(D)$, то задача (3.1) сводится к доказательству того, что произведения u_1u_2 плотны в $L^2(D)$. Однако, этот подход не позволяет получить явные формулы для нахождения коэффициентов по оператору Дирихле–Неймана. Мы не используем этот подход в диссертации.

Далее мы сформулируем многомерную обратную задачу рассеяния, к которой, как будет показано в главе 4, сводится задача 3.1. Для этого нам потребуется ввести несколько обозначений.

Мы рассматриваем уравнение

$$L_{A,V}\psi \equiv -\Delta\psi - 2i\sum_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + V(x)\psi = E\psi, \tag{3.9}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, а коэффициенты $A_1, \ldots, A_d$, V — достаточно регулярные $M_n(\mathbb{C})$-значные функции в $\mathbb{R}^d$, быстро убывающие на бесконечности. Нас будут интересовать специальные решения уравнения (3.9). Для простоты, рассмотрим сначала случай $n = 1$ и $E > 0$. Мы рассматриваем решения $\psi^+(x,k)$ уравнения (3.9), параметризованные вектором $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$, которые задаются следующей асимптотикой при фиксированном k:

$$\begin{gathered}\psi^+(x,k) = e^{ikx} + C(d)|k|^{(d-3)/2}\frac{e^{i|k||x|}}{|x|^{(d-1)/2}} f_{A,V}\big(k, |k|\vartheta\big) + O\big(|x|^{-\frac{d+1}{2}}\big),\\ |x| \to \infty, \quad C(d) = -\pi i\big(\sqrt{2\pi}e^{-i\pi/4}\big)^{(d-1)/2},\end{gathered} \tag{3.10}$$

где функция $f_{A,V}$ определена однозначно и называется амплитудой рассеяния для уравнения (3.9) при фиксированной энергии E. Функция $f_{A,V}$ определена на множестве

$$\mathcal{M}_E = \big\{(k,l) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid k^2 = l^2 = E\big\}. \tag{3.11}$$

Как и оператор Дирихле–Неймана $\Lambda_{A,V}$ из формулы (3.4), амплитуда рассеяния $f_{A,V}$ инвариантна относительно калибровочных преобразований вида (3.6a), (3.6b), где $g(x) = e^{i\varphi(x)}$, $\varphi(x) = O(|x|^{-(d+1)/2})$ при $|x| \to \infty$.

Обратная задача рассеяния для уравнения (3.9) в случае $n = 1$ и $E > 0$ формулируется следующим образом.

Задача 3.2. *Пусть задана амплитуда рассеяния $f_{A,V}$ на множестве $\mathcal{M}_E$ для уравнения* (3.9) *при фиксированном E (или при E из фиксированного множества). Найти коэффициенты A, V по модулю калибровочных преобразований* (3.6a), (3.6b).

Теперь рассмотрим уравнение (3.9), в котором $n \geq 1$. В этом случае мы определяем функции ψ^+ и $f = f_{A,V}$ другим способом, который эквивалентен указанному выше способу при $n = 1$. Функция ψ^+ определяется из уравнения

$$\begin{gathered}\psi^+(x,k) = e^{ikx}\mathrm{Id}_n + \int_{\mathbb{R}^d} G^+(x-y,k)\times\\ \times\left(-2i\sum_{j=1}^d A_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + V(y)\right)\psi^+(y,k)\,dy,\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$G^+(x,k) = -(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{i\xi x}\,d\xi}{\xi^2 - k^2 - i0}, \tag{3.13}$$

где x, $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$. Мы рассматриваем уравнение (3.12) и его продифференцированные по x_j, $j = 1, \ldots, d$, версии как систему линейных интегральных уравнений для функций ψ^+, $\partial_{x_j}\psi^+$, $j = 1, \ldots, d$.

Амплитуда рассеяния $f = f_{A,V}$ определяется по функции ψ^+ с помощью явной формулы

$$f(k,l) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} \left(-2i \sum_{j=1}^{d} A_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) \right) \psi^+(x,k)\, dx, \tag{3.14}$$

где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$.

Наконец, рассмотрим уравнение (3.9) в случае, когда $n \geq 1$, $E \in \mathbb{C} \setminus (0,\infty)$. В этом случае мы определим аналоги ψ и h функций ψ^+ и f. Функция ψ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \psi(x,k) = e^{ikx}\mathrm{Id}_n + \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,k) \times \\ \times \left(-2i \sum_{j=1}^{d} A_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + V(y) \right) \psi(y,k)\, dy, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$G(x,k) = e^{ikx} g(x,k), \quad g(x,k) = -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ikx}\, d\xi}{\xi^2 + 2k\xi}, \tag{3.16}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$. Аналогично уравнению (3.12), мы рассматриваем (3.15) и его продифференцированные по x_j, $j = 1, \ldots, d$, версии как систему линейных интегральных уравнений для функций ψ, $\partial_{x_j}\psi$, $j = 1, \ldots, d$ (или, более точно, для функций μ, $\partial_{x_j}\mu$, $j = 1, \ldots, d$, где $\psi = e^{ikx}\mu$).

Обобщённая амплитуда рассеяния h определяется по ψ с помощью явной формулы, аналогичной формуле (3.14) для амплитуды рассеяния f:

$$h(k,l) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} \left(-2i \sum_{j=1}^{d} A_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) \right) \psi(x,k)\, dx, \tag{3.17}$$

где k, $l \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, $\mathrm{Im}\, k = \mathrm{Im}\, l$, $k^2 = l^2$.

Можно показать, что справедливы соотношения $\psi^+(x,k) = \psi(x, k + i0k/|k|)$, где $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$, и $f(k,l) = h(k + i0k/|k|, l + i0l/|l|)$, где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$. Отталкиваясь от этих формул, мы можем определить аналоги ψ_γ и h_γ функций ψ и f следующим образом:

$$\psi_\gamma(x,k) = \psi(x, k + i0\gamma), \quad h_\gamma(k,l) = h(k + i0\gamma, l + i0\gamma), \tag{3.18}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, $(k,l) \in \mathcal{M}_E$, $\gamma \in S^{d-1} = \{u \in \mathbb{R}^d \mid |u| = 1\}$.

Заметим, что впервые функции типа ψ, h и ψ_γ, h_γ использовались в работах [107, 108].

Функция $f(k,l)$ либо функции $h_\gamma(k,l)$, где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$, $\gamma \in S^{d-1}$, рассматриваются как данные рассеяния $S_{A,V}(E)$ для уравнения (3.9) при фиксированной энергии $E > 0$. Функция $h(k,l)$, где k, $l \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$, $k^2 = l^2 = E$, рассматривается как данные рассеяния $S_{A,V}(E)$ для уравнения (3.9) при фиксированной энергии $E \in \mathbb{C} \setminus (0, +\infty)$.

Можно показать, что данные рассеяния $S_{A,V}(E)$ инвариантны относительно калибровочных преобразований (3.6a), (3.6b), где g — достаточно регулярная $GL_n(\mathbb{C})$-значная функция, быстро убывающая на бесконечности. Обратная задача рассеяния для уравнения (3.9) в общем случае формулируется следующим образом.

Задача 3.3. *Пусть заданы данные рассеяния $S_{A,V}(E)$ при фиксированном E (или при E из некоторого фиксированного множества). Найти A, V по модулю калибровочных преобразований* (3.6a), (3.6b).

Задаче 3.3 посвящено множество работ. Так, задача 3.3 без предположения $A \equiv 0$ изучалась в статьях [74, 40, 25, 26, 10, 56, 62, 7] и [57, с. 457] при $n = 1$ и в работах [102, 27, 24, 80] при $n \geq 2$. Случай $A \equiv 0$, $n \geq 1$ рассматривался, например, в работе [61]. Касательно результатов для случая $n = 1$, $A \equiv 0$, см. [100] и ссылки в этой работе.

3.2 Приложения к акустической томографии

В этом параграфе мы рассматриваем модельное уравнение для гармонического по времени ($e^{-i\omega t}$) акустического давления ψ в движущейся жидкости со скоросью звука $c = c(x)$, скоростью течения $v = v(x)$, плотностью $\rho = \rho(x)$ и коэффициентом поглощения звука $\alpha = \alpha(x, \omega)$ при частоте ω:

$$L_\omega \psi = 0, \quad L_\omega = -\Delta - 2iA_\omega(x)\nabla - U_\omega(x), \quad x \in D, \tag{3.19}$$

где $D \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, занимаемая жидкостью,

$$\begin{aligned} A_\omega(x) &= \frac{\omega v(x)}{c^2(x)} + \frac{i}{2}\frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)}, \\ U_\omega(x) &= \frac{\omega^2}{c^2(x)} + 2i\omega\frac{\alpha(x,\omega)}{c(x)}, \\ \alpha(x,\omega) &= \omega^{\zeta(x)}\alpha_0(x). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Из физических соображений вытекают следующие требования:

$$\begin{gathered} c \ge c_{min} > 0,\ \rho \ge \rho_{min} > 0,\ \alpha_0 \ge 0,\ v = \overline{v},\ \zeta = \overline{\zeta} \\ \textit{для некоторых констант } c_{min} \textit{ и } \rho_{min}. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Для простоты мы также предполагаем, что $\omega \notin \sigma(L_z)$, где

$$\begin{gathered} \sigma(L_z) \textit{ состоит из тех } z \in \mathbb{C}, \textit{ при которых } 0 \textit{ является} \\ \textit{собственным значением Дирихле для оператора } L_z \textit{ в } D. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Модельное уравнение (3.19) в разных частных случаях изучалось, в частности, в работах [7, 11, 97, 40, 66, 105, 67].

Заметим, что $L_\omega = L_{A,V}$, где $A = A_\omega$, $V = -U_\omega$, а оператор $L_{A,V}$ определён в формуле (3.1). Мы используем обозначение L_ω для оператора $L_{A,V}$, чтобы подчеркнуть зависимость от частоты ω. Мы также полагаем $\Lambda_\omega = \Lambda_{A,V}(0)$, где оператор $\Lambda_{A,V}(E)$ определён в формуле (3.4). Нас будет интересовать следующая модификация задачи 3.1:

Задача 3.4. *Пусть задан оператор Λ_ω при одной или нескольких частотах ω. Найти параметры жидкости c, v, ρ и α.*

Заметим, что в общем случае есть препятствие для однозначной разрешимости задачи 3.4, заключающееся в инвариантности оператора Λ_ω относительно преобразований (3.6a), (3.6b).

Мы начнём рассмотрение задачи 3.4 со случая, когда заранее известно, что плотность жидкости постоянна (т.е. $\rho = \text{const}$), а поглощение отсутствует (т.е. $\alpha = 0$). В этом случае задача 3.4 эквивалентна задаче 3.1 с $A = A_\omega$, $V = -U_\omega$ при фиксированной частоте ω и с дополнительным условием, что $A = \overline{A}$ и $V = \overline{V}$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Мы покажем, что в этом случае задача 3.1 имеет не более одного решения.

Заметим, что в общем случае, если граница ∂D достаточно гладкая, а коэффициенты A и V оператора $L_{A,V}$ из формулы (3.1) достаточно регулярны, то оператор $\Lambda_{A,V}$ из формулы (3.4) однозначно определяет 1-форму dA и функцию q в области D, а также касательную компоненту поля A на ∂D, где

$$dA = \sum_{1 \le k < l \le d} \left(\frac{\partial A^l}{\partial x_k} - \frac{\partial A^k}{\partial x_l} \right) dx_k \wedge dx_l, \tag{3.23}$$

$$q = V + i\nabla \cdot A - A \cdot A, \tag{3.24}$$

и используется обозначение $A = (A^1, \ldots, A^d)$ (в настоящем параграфе и в параграфах 3.3, 3.4 мы будем писать индексы у компонент поля A сверху, чтобы избежать громоздких обозначений).

В частности, в работе [52] показывается, что при $d \ge 3$ отображению $\Lambda_{A,V}$ соответствуют единственные dA и q, если предполагается, что $A \in L^\infty(D, \mathbb{C}^d)$ и $V \in L^\infty(D, \mathbb{C})$. Из результатов статьи [36] следует, что в размерности $d = 2$ оператор $\Lambda_{A,V}$ однозначно определяет dA и q, если $\partial D \in C^\infty$ и известно, что $A \in W^{2,p}(D, \mathbb{R}^d)$ и $V \in W^{1,p}(D, \mathbb{C})$, $p > 2$.

Кроме того, в работе [17] показывается, что если $\partial D \in C^1$ $(d \ge 3)$ или $\partial D \in C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ $(d = 2)$ и если $A \in C(\overline{D}, \mathbb{C}^d)$, $V \in L^\infty(D, \mathbb{C})$, то $\Lambda_{A,V}$ однозначно определяет $A - \nu(A \cdot \nu)$ на ∂D, где ν обозначает единичную внешнюю нормаль к ∂D.

Мы воспользуемся этими результатами в доказательстве следующих теорем. Мы начнём со следующих результатов единственности для задачи 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \ge 3)$ — ограниченная односвязная область с линейно связной границей $\partial D \in C^1$. Предположим, что $A^{(1)}$, $A^{(2)} \in W^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^d)$ и $V^{(1)}$, $V^{(2)} \in L^\infty(D, \mathbb{R})$. Пусть 0 не является собственным значением Дирихле для операторов $L_{A^{(1)},V^{(1)}}$ и $L_{A^{(2)},V^{(2)}}$ в D. При этих условиях из равенства $\Lambda_{A^{(1)},V^{(1)}} = \Lambda_{A^{(2)},V^{(2)}}$ следует, что $A^{(1)} = A^{(2)}$ и $V^{(1)} = V^{(2)}$.*

Теорема 3.2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с линейно связной границей $\partial D \in C^\infty$. Предположим, что $A^{(1)}$, $A^{(2)} \in W^{2,p}(D, \mathbb{R}^2)$ и $V^{(1)}$, $V^{(2)} \in W^{1,p}(D, \mathbb{R})$, где $p > 2$. Пусть 0 не является собственным значением Дирихле для операторов $L_{A^{(1)},V^{(1)}}$ и $L_{A^{(2)},V^{(2)}}$ в D. При этих условиях из равенства $\Lambda_{A^{(1)},V^{(1)}} = \Lambda_{A^{(2)},V^{(2)}}$ следует, что $A^{(1)} = A^{(2)}$ и $V^{(1)} = V^{(2)}$.*

Для формулировки следующих результатов нам удобно отдельно выписать требования к коэффициентам. Мы предполагаем, что:

$$\begin{gathered} c \in W^{1,\infty}(D,\mathbb{R}),\ \ \rho \in C(\bar{D}) \cup C^2(D),\ \ v \in W^{1,\infty}(D,\mathbb{R}^d), \\ \alpha_0 \in C(\bar{D}),\ \ \zeta \in C(\bar{D}),\ \ \zeta \neq 0, \quad \textit{где } d \geq 3, \end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered} c \in W^{2,p}(D,\mathbb{R}),\ \ \rho \in W^{3,p}(D,\mathbb{R}),\ \ v \in W^{2,p}(D,\mathbb{R}^d), \\ \alpha_0 \in W^{1,p}(D,\mathbb{R}),\ \ \zeta \in C(\bar{D}),\ \ \zeta \neq 0, \quad \textit{где } p > 2,\ d = 2. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Теперь мы перейдём к условиям единственности в задаче 3.4. Начнём со случая непоглощающей жидкости постоянной плотности. Следующее предложение является следствием теорем 3.1 и 3.2.

Предложение 3.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ — ограниченная односвязная область с линейно связной границей ∂D, где $\partial D \in C^\infty$ $(d = 2)$ или $\partial D \in C^1$ $(d \geq 3)$. Пусть операторы $L_\omega^{(j)}$ и $\Lambda_\omega^{(j)}$ соответствуют коэффициентам $c^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, где $c^{(j)}$ и $v^{(j)}$ удовлетворяют* (3.21) *и* (3.25)–(3.26), *а $\rho_j = \mathrm{const} > 0$ и $\alpha^{(j)} = 0$, $j = 1$, 2. Предположим, что $\omega \in \mathbb{R} \setminus (\sigma(L_\omega^{(1)}) \cup \sigma(L_\omega^{(2)}))$ зафиксировано. Тогда из равенства операторов $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$ следует, что $c^{(1)} = c^{(2)}$ и $v^{(1)} = v^{(2)}$.*

Следующий результат соответствует случаю непоглощающей жидкости переменной плотности.

Теорема 3.3. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ — ограниченная односвязная область с линейно связной границей ∂D, где $\partial D \in C^\infty$ $(d = 2)$ или $\partial D \in C^1$ $(d \geq 3)$. Пусть операторы $L_\omega^{(j)}$ и $\Lambda_\omega^{(j)}$ соответствуют коэффициентам $c^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, где $c^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $v^{(j)}$ удовлетворяют* (3.21) *и* (3.25)–(3.26), *а $\alpha^{(j)} = 0$, $j = 1$, 2. Пусть ω_1, $\omega_2 \in (0, +\infty) \setminus (\sigma(L_\omega^{(1)}) \cup \sigma(L_\omega^{(2)}))$, $\omega_1 \neq \omega_2$. Тогда из равенства операторов $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$ при $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$ следует, что $c^{(1)} = c^{(2)}$ и $\rho^{(1)} = C\rho^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$, где $C = const > 0$.*

В следующей теореме рассматривается случай поглощающих жидкостей переменной плотности.

Теорема 3.4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ — ограниченная односвязная область с линейно связной границей ∂D, где $\partial D \in C^\infty$ $(d = 2)$ или $\partial D \in C^1$ $(d \geq 3)$. Пусть операторы $L_\omega^{(j)}$ и $\Lambda_\omega^{(j)}$ соответствуют коэффициентам $c^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\alpha_0^{(j)}$ и $\zeta^{(j)}$, удовлетворяющим* (3.21) *и* (3.25)–(3.26), *$j = 1$, 2. Предположим, что ω_1, ω_2, $\omega_3 \in (0, +\infty) \setminus (\sigma(L_\omega^{(1)}) \cup \sigma(L_\omega^{(2)}))$ — три попарно различные частоты. Тогда из равенства операторов $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$ при $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ следует,* *что* $c^{(1)} = c^{(2)}$, $\rho^{(1)} = C\rho^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$ *и* $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$, *где* $C = const > 0$ *и* $\alpha^{(j)}(x,\omega) = \omega^{\zeta^{(j)}(x)}\alpha_0^{(j)}(x)$.

Ниже мы приведём пример двух наборов параметров $c^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, $j = 1$, 2, обладающих тем свойством, что при всех ω справедливо равенство $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$. В этом примере поглощение жидкостей не зависит от частоты. Для формулировки примера нам потребуется ввести следующие обозначения. Предположим, что

$$h \in C^2(D,\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h \subset D \text{ и } |\nabla h| < 1 \text{ в } D, \tag{3.27}$$

где $D \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область. Определим коэффициенты $c^{(1)}$, $\rho^{(1)}$, $v^{(1)}$ и $\alpha_0^{(1)}$ формулой

$$\begin{gathered} c^{(1)} = \text{const} > 0, \quad \rho^{(1)} = \text{const} > 0, \\ v^{(1)} = 0, \quad \alpha_0^{(1)} = \text{const} > -\tfrac{1}{2}\min_{x\in D}\Delta h, \end{gathered} \tag{3.28}$$

а коэффициенты $c^{(2)}$, $\rho^{(2)}$, $v^{(2)}$ и $\alpha_0^{(2)}$ — формулой

$$\begin{gathered} c^{(2)} = c^{(1)}(1-|\nabla h|^2)^{-1/2}, \quad \rho^{(2)} \equiv \text{const} > 0, \\ v^{(2)} = c^{(1)}(1-|\nabla h|^2)^{-1}\nabla h, \\ \alpha_0^{(2)} = (1-|\nabla h|^2)^{-1/2}(\alpha_0^{(1)} + \tfrac{1}{2}\Delta h). \end{gathered} \tag{3.29}$$

Заметим, что наборы коэффициентов $c^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $\alpha_0^{(j)}$ удовлетворяют свойствам (3.21) и (3.25)–(3.26) при $j = 1$, 2.

Теорема 3.5. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ *— ограниченная область с границей* $\partial D \in C^\infty$. *Предположим, что* h *удовлетворяет* (3.27), $h \not\equiv 0$, *а функции* $c^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, $j = 1$, 2, *определены в формулах* (3.28) *и* (3.29). *Пусть операторы* $L_\omega^{(j)}$ *и* $\Lambda_\omega^{(j)}$ *соответствуют коэффициентам* $c^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\alpha_0^{(j)}$ *с* $\zeta^{(j)} = 0$. *При этих условиях для любого* $\omega \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ *справедливо равенство операторов* $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$, *где* $\sigma = \sigma(L_z^{(1)}) = \sigma(L_z^{(2)})$.

3.3 Доказательство теорем 3.1, 3.2 и 3.5

Доказательство теорем 3.1 и 3.2. Мы докажем теоремы 3.1 и 3.2 одновременно. Пусть область D и коэффициенты $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ и $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1 (соотв. теоремы 3.2) и предположим, что $\Lambda_{A^{(1)},V^{(1)}} = \Lambda_{A^{(2)},V^{(2)}}$.

Используя [17, Theorem 1.1], мы получаем равенство

$$\big(A^{(1)} - \nu(A^{(1)} \cdot \nu)\big)|_{\partial D} = \big(A^{(2)} - \nu(A^{(2)} \cdot \nu)\big)|_{\partial D}, \tag{3.30}$$

где ν обозначает единичную внешнюю нормаль к ∂D. Используя [52, Theorem 1.1] (соотв. [36, Theorem 1.1]), мы получаем равенства

$$dA^{(1)} = dA^{(2)} \ \ \textit{в области } D, \tag{3.31}$$

$$q^{(1)} = q^{(2)} \ \ \textit{в области } D, \tag{3.32}$$

где используются обозначения

$$dA^{(j)} = \sum_{1 \le k < l \le d} \Big(\frac{\partial A^{(j),l}}{\partial x_k} - \frac{\partial A^{(j),k}}{\partial x_l}\Big) dx_k \wedge dx_l,$$
$$q^{(j)} = V^{(j)} + i\nabla \cdot A^{(j)} - A^{(j)} \cdot A^{(j)},$$

и $A^{(j)} = (A^{(j),1}, \dots, A^{(j),d})$, $j = 1, 2$.

Так как область D односвязна, то из равенства (3.31) следует, что существует такая функция $\varphi \in W^{2,\infty}(D, \mathbb{R})$, что

$$A^{(1)} - A^{(2)} = \nabla\varphi \ \ \textit{в области } D. \tag{3.33}$$

Из формул (3.30), (3.33) и из линейной связности ∂D следует, что функция φ постоянна на границе ∂D.

Пользуясь формулами (3.32) и (3.33), мы получаем равенство

$$V^{(1)} - V^{(2)} = -i\Delta\varphi - (\nabla\varphi)^2 + 2A^{(1)}\nabla\varphi \ \ \textit{в области } D. \tag{3.34}$$

Беря мнимую часть от этого равенства, мы получаем уравнение $\Delta\varphi = 0$ в области D. Из этого уравнения, в силу того, что $\varphi = \mathrm{const}$ на ∂D и $\varphi \in W^{2,\infty}(D)$, следует, что $\varphi = \mathrm{const}$ в замкнутой области $\overline{D}$. Из формул (3.33) и (3.34) вытекают равенства $A^{(1)} = A^{(2)}$ и $V^{(1)} = V^{(2)}$. Теоремы 3.1 и 3.2 доказаны. $\square$

Доказательство теоремы 3.5. Положим

$$\mu = \frac{\omega}{c^{(1)}} h.$$

Прямым вычислением проверяется, что

$$e^{-i\mu}L_\omega^{(1)}e^{i\mu} = -\Delta - 2iA_\omega^{(2)}\nabla - U_\omega^{(2)}, \tag{3.35}$$

где используются обозначения

$$A_\omega^{(2)} = \frac{\omega}{c^{(1)}}\nabla h,$$
$$U_\omega^{(2)} = \frac{\omega^2}{(c^{(1)})^2}(1 - |\nabla h|^2) + \frac{2i\omega}{c^{(1)}}(\alpha_0^{(1)} + \tfrac{1}{2}\Delta h),$$

а $e^{\pm i\mu}$ обозначают операторы умножения на функции $e^{\pm i\mu}$. Из формулы (3.35) следует, что

$$L_\omega^{(2)} = e^{-i\mu}L_\omega^{(1)}e^{i\mu}. \tag{3.36}$$

Кроме того, из предположений настоящей теоремы вытекает, что

$$e^{\pm i\mu} - 1 \text{ *имеет носитель в области* } D. \tag{3.37}$$

Используя формулы (3.36) и (3.37), мы получаем, что

$$\sigma(L_z^{(1)}) = \sigma(L_z^{(2)}),$$
$$\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)} \textit{ при всех } \omega \in \mathbb{C} \setminus \sigma,$$

где введено обозначение $\sigma = \sigma(L_z^{(1)}) = \sigma(L_z^{(2)})$. Этим завершается доказательство теоремы 3.5. □

3.4 Доказательство теорем 3.3 и 3.4

Мы начнём этот параграф с доказательства теоремы 3.3, последовательно рассмотрев случаи $d \geq 3$ и $d = 2$.

Доказательство теоремы 3.3. Случай $d \geq 3$. Заметим, что справедливо представление

$$L_\omega^{(j)} = \sum_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} + A_\omega^{(j),k}\right)^2 + q_\omega^{(j)}, \tag{3.38}$$

где

$$A_\omega^{(j)} = (A_\omega^{(j),1}, \dots, A_\omega^{(j),d}) = \frac{\omega v^{(j)}}{(c^{(j)})^2} + \frac{i}{2}\frac{\nabla \rho^{(j)}}{\rho^{(j)}},$$

$$q_\omega^{(j)} = -\frac{\omega^2}{(c^{(j)})^2} + i\nabla \cdot \left(\frac{\omega}{(c^{(j)})^2} v^{(j)} + \frac{i}{2}\frac{\nabla \rho^{(j)}}{\rho^{(j)}}\right) - \frac{\omega^2}{(c^{(j)})^4}(v^{(j)})^2 \qquad (3.39)$$

$$+\frac{1}{4}(\rho^{(j)})^{-2}(\nabla \rho^{(j)})^2 - \frac{i\omega v^{(j)} \nabla \rho^{(j)}}{(c^{(j)})^2 \rho^{(j)}},$$

а оператор $\nabla\cdot$ обозначает дивергенцию.

Из [17, Theorem 1.1] следует, что касательные компоненты полей $A_\omega^{(1)}$ и $A_\omega^{(2)}$ на границе ∂D равны. Следовательно,

$$\textit{касательные компоненты полей } \frac{\nabla \rho^{(1)}}{\rho^{(1)}} \textit{ и } \frac{\nabla \rho^{(2)}}{\rho^{(2)}} \textit{ на } \partial D \textit{ равны}, \qquad (3.40)$$

$$\textit{касательные компоненты полей } \frac{v^{(1)}}{(c^{(1)})^2} \textit{ и } \frac{v^{(2)}}{(c^{(2)})^2} \textit{ на } \partial D \textit{ равны}. \qquad (3.41)$$

Из формулы (3.40) и из линейной связности границы ∂D следует, что

$$\begin{gathered} \ln \rho^{(2)} - \ln \rho^{(1)} = \ln C \quad \textit{на } \partial D, \\ \rho^{(2)}|_{\partial D} = C \rho^{(1)}|_{\partial D}, \quad \textit{где } C = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \qquad (3.42)$$

Пользуясь [52, Theorem 1.1] и односвязностью D, мы получаем равенства

$$q_\omega^{(2)} - q_\omega^{(1)} = 0 \quad \textit{в области } D \qquad (3.43)$$

$$A_\omega^{(2)} - A_\omega^{(1)} = \nabla \varphi_\omega \quad \textit{в области } D, \qquad (3.44)$$

где $\varphi_\omega \in W^{2,\infty}(D, \mathbb{C})$ и $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$.

Разделяя вещественную и мнимую части в равенстве (3.43), мы получаем формулу

$$\begin{gathered} \omega^2 \left[\frac{1}{(c^{(1)})^2} - \frac{1}{(c^{(2)})^2} + \frac{(v^{(1)})^2}{(c^{(1)})^4} - \frac{(v^{(2)})^2}{(c^{(2)})^4}\right] \\ + \left[\left(\frac{\nabla \rho^{(2)}}{2\rho^{(2)}}\right)^2 - \left(\frac{\nabla \rho^{(1)}}{2\rho^{(1)}}\right)^2 - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \rho^{(2)}}{2\rho^{(2)}}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \rho^{(1)}}{2\nabla \rho^{(1)}}\right)\right] = 0, \end{gathered} \qquad (3.45)$$

где $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$, и формулу

$$\nabla \cdot \left(\frac{v^{(1)}}{(c^{(1)})^2} - \frac{v^{(2)}}{(c^{(2)})^2} \right) - \frac{\nabla \rho^{(1)}}{\rho^{(1)}} \frac{v^{(1)}}{(c^{(1)})^2} + \frac{\nabla \rho^{(2)}}{\rho^{(2)}} \frac{v^{(2)}}{(c^{(2)})^2} = 0. \tag{3.46}$$

Из формулы (3.45) и из предположения, что ω_1, $\omega_2 > 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, следуют равенства

$$\left(\frac{\nabla \rho^{(2)}}{2\rho^{(2)}} \right)^2 - \left(\frac{\nabla \rho^{(1)}}{2\rho^{(1)}} \right)^2 - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \rho^{(2)}}{2\rho^{(2)}} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \rho^{(1)}}{2\rho^{(1)}} \right) = 0, \tag{3.47}$$

$$\frac{1}{(c^{(1)})^2} - \frac{1}{(c^{(2)})^2} + \frac{(v^{(1)})^2}{(c^{(1)})^4} - \frac{(v^{(2)})^2}{(c^{(2)})^4} = 0. \tag{3.48}$$

Положим по определению

$$u^{(j)} = \tfrac{1}{2} \ln \rho^{(j)}, \quad j = 1, 2. \tag{3.49}$$

Из формул (3.42), (3.47) и (3.49) следует, что функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ удовлетворяют следующей задаче:

$$\begin{cases} \Delta u^{(2)} - (\nabla u^{(2)})^2 = \Delta u^{(1)} - (\nabla u^{(1)})^2 & \textit{в } D, \\ u^{(2)} = u^{(1)} + \tfrac{1}{2} \ln C & \textit{на } \partial D. \end{cases} \tag{3.50}$$

Из этой системы, с учётом того, что $u^{(1)}$, $u^{(2)} \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, а также из [33, Theorem 10.1] вытекает следующее соотношение

$$u^{(2)} = u^{(1)} + \tfrac{1}{2} \ln C \quad \textit{в области } D.$$

В силу формулы (3.49) справедливо равенство

$$\rho^{(2)} = C \rho^{(1)} \quad \textit{в области } D. \tag{3.51}$$

Теперь возьмём действительную часть от равенства (3.44) и воспользуемся формулой (3.41). Мы получим равенство

$$\frac{v^{(2)}}{(c^{(2)})^2} - \frac{v^{(1)}}{(c^{(1)})^2} = \nabla \beta_\omega \quad \textit{в области } D, \tag{3.52}$$

в котором

$$\beta_\omega = \mathrm{const} \quad \textit{на } \partial D, \tag{3.53}$$

где функция β_ω определена по формуле

$$\beta_\omega = \operatorname{Re}\varphi_\omega. \tag{3.54}$$

Учитывая формулу (3.51), мы полагаем по определению

$$a := \frac{\nabla\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}} = \frac{\nabla\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}}. \tag{3.55}$$

Из формул (3.46), (3.52), (3.53), (3.54) и (3.55) следует, что функция β_ω удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} -\Delta\beta_\omega + a\nabla\beta_\omega = 0 \quad \textit{в области } D, \\ \beta_\omega = \mathrm{const} \quad \textit{на } \partial D. \end{cases} \tag{3.56}$$

Отсюда, используя [33, Theorem 8.1], мы получаем, что $\beta_\omega = \mathrm{const}$ в области D. Поэтому, с учётом формулы (3.52), справедливо равенство

$$\frac{v^{(1)}}{(c^{(1)})^2} = \frac{v^{(2)}}{(c^{(2)})^2} \quad \textit{в области } D. \tag{3.57}$$

Наконец, пользуясь формулами (3.48) и (3.57), мы получаем, что

$$c^{(2)} = c^{(1)} \ \textit{и} \ v^{(2)} = v^{(1)} \ \textit{в области } D. \tag{3.58}$$

Это завершает доказательство теоремы 3.3 в случае $d \geq 3$.

Случай $d = 2$. Действуя как при доказательстве теоремы 3.3 при $d \geq 3$, мы получаем формулы (3.38)–(3.42) при $d = 2$.

Определим функции $\mu^{(j)}$ формулой

$$\mu^{(j)} = -\frac{i}{2}\ln\rho^{(j)}, \quad j = 1, 2, \tag{3.59}$$

а операторы $\widetilde{L}_\omega^{(j)}$ — формулой

$$\widetilde{L}_\omega^{(j)} = e^{-i\mu^{(j)}} L_\omega^{(j)} e^{i\mu^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \tag{3.60}$$

где $e^{\pm i\mu^{(j)}}$ обозначают операторы умножения на функции $e^{\pm i\mu^{(j)}}$.

Из определений (3.59) и (3.60) следуют равенства

$$\sigma(\widetilde{L}_z^{(j)}) = \sigma(L_z^{(j)}), \quad j = 1, 2, \tag{3.61}$$

$$\widetilde{\Lambda}_\omega^{(1)} = \widetilde{\Lambda}_\omega^{(2)}, \tag{3.62}$$

где $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$, а $\widetilde{\Lambda}_\omega^{(1)}$ и $\widetilde{\Lambda}_\omega^{(2)}$ обозначают операторы Дирихле–Неймана для операторов $\widetilde{L}_\omega^{(1)}$ и $\widetilde{L}_\omega^{(2)}$ в области D соответственно (см. определение (3.4)).

Прямым вычислением мы получаем следующую формулу:

$$\widetilde{L}_\omega^{(j)} = \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \widetilde{A}_\omega^{(j),k} \right)^2 + \widetilde{q}_\omega^{(j)}, \tag{3.63}$$

где используются обозначения

$$\begin{gathered} \widetilde{A}_\omega^{(j)} = (\widetilde{A}_\omega^{(j),1}, \widetilde{A}_\omega^{(j),2}) = \frac{\omega}{(c^{(j)})^2} v^{(j)}, \\ \widetilde{q}_\omega^{(j)} = q_\omega^{(j)}. \end{gathered} \tag{3.64}$$

Заметим, что поля $\widetilde{A}_\omega^{(1)}$ и $\widetilde{A}_\omega^{(2)}$ не содержат мнимой части в отличие от полей $A_\omega^{(1)}$ и $A_\omega^{(2)}$.

Пользуясь формулами (3.61), (3.62), (3.64), а также теоремой [36, Theorem 1.1] и односвязностью области D, мы получаем равенства (3.45) и (3.46) при $d = 2$ и $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$, а также равенство

$$\widetilde{A}_\omega^{(2)} - \widetilde{A}_\omega^{(1)} = \nabla \widetilde{\varphi}_\omega \quad \text{\textit{в области} } D, \tag{3.65}$$

где $\widetilde{\varphi}_\omega \in W^{2,\infty}(D, \mathbb{R})$ и $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$.

Как и при доказательстве теоремы 3.3 при $d \geq 3$, пользуясь формулами (3.42) и (3.45) при $d = 2$, мы получаем формулу (3.51) при $d = 2$.

Далее, пользуясь формулами (3.41), (3.64) и (3.65), мы получаем формулы (3.52) и (3.53) при $d = 2$, где

$$\beta_\omega = \widetilde{\varphi}_\omega. \tag{3.66}$$

Наконец, используя формулы (3.46), (3.51), (3.52), (3.53) при $d = 2$ и формулу (3.66), мы завершаем доказательство теоремы 3.3 в случае $d = 2$ аналогично тому, как мы закончили доказательство этой теоремы в случае $d \geq 3$. $\square$

Теперь мы перейдём к доказательству теоремы 3.4. Мы будем ссылаться на формулы, полученные при доказательстве теоремы 3.3. Как и при доказательстве теоремы 3.3, мы последовательно рассмотрим случаи $d \geq 3$ и $d = 2$.

Доказательство теоремы 3.4. Заметим, что при предположениях теоремы 3.4 для операторов $L_\omega^{(j)}$, $j = 1,\ 2$, справедливо представление (3.38), где $A_\omega^{(j)}$ и $q_\omega^{(j)}$ определяются формулами

$$\begin{gathered} A_\omega^{(j)} = (A_\omega^{(j),1}, \ldots, A_\omega^{(j),d}) = \frac{\omega v^{(j)}}{(c^{(j)})^2} + \frac{i}{2}\frac{\nabla \rho^{(j)}}{\rho^{(j)}}, \\ q_\omega^{(j)} = -\frac{\omega^2}{(c^{(j)})^2} + i\nabla \cdot \left(\frac{\omega}{(c^{(j)})^2} v^{(j)} + \frac{i}{2}\frac{\nabla \rho^{(j)}}{\rho^{(j)}} \right) - \frac{\omega^2}{(c^{(j)})^4}(v^{(j)})^2 \\ + \frac{1}{4}(\rho^{(j)})^{-2}(\nabla \rho^{(j)})^2 - \frac{i\omega v^{(j)} \nabla \rho^{(j)}}{(c^{(j)})^2 \rho^{(j)}} - 2i\omega^{1+\zeta^{(j)}} \frac{\alpha_0^{(j)}}{c^{(j)}}. \end{gathered} \tag{3.67}$$

Случай $d \geq 3$. Как и при доказательстве теоремы 3.3 в случае $d \geq 3$, можно показать, что справедливы формулы (3.40)–(3.44), в которых функции $q_\omega^{(1)}$, $q_\omega^{(2)}$ и $A_\omega^{(1)}$, $A_\omega^{(2)}$ определяются в соответствии с формулой (3.67), а $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Разделяя вещественную и мнимую части в равенстве (3.43), мы получаем равенство (3.45) и равенство

$$\begin{gathered} \left[\nabla \cdot \left(\frac{v^{(1)}}{(c^{(1)})^2} - \frac{v^{(2)}}{(c^{(2)})^2} \right) - \frac{\nabla \rho^{(1)}}{\rho^{(1)}} \frac{v^{(1)}}{(c^{(1)})^2} + \frac{\nabla \rho^{(2)}}{\rho^{(2)}} \frac{v^{(2)}}{(c^{(2)})^2} \right] \\ + 2\omega^{\zeta^{(2)}} \left[\frac{\alpha_0^{(2)}}{(c^{(2)})^2} \right] - 2\omega^{\zeta^{(1)}} \left[\frac{\alpha_0^{(1)}}{(c^{(1)})^2} \right] = 0, \end{gathered} \tag{3.68}$$

в котором $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Пользуясь формулой (3.68) и предположением, что ω_1, ω_2, ω_3 положительны и попарно различны, мы получаем равенство (3.46).

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 3.3 в случае $d \geq 3$, из формул (3.41)–(3.46) мы получаем формулу (3.58).

Мы покажем, что $\alpha_0^{(2)}(x) = \alpha_0^{(1)}(x)$ при фиксированном $x \in D$, рассматривая два случая: (a) $\zeta^{(1)}(x) \neq \zeta^{(2)}(x)$; (b) $\zeta^{(1)}(x) = \zeta^{(2)}(x)$.

В случае (a), пользуясь равенством (3.68) и предположением, что ω_1, ω_2, ω_3 положительны и попарно различны, мы получаем, что

$$\frac{\alpha_0^{(j)}}{(c^{(j)})^2} = 0 \quad \textit{в точке } x, \quad j = 1, 2, \tag{3.69}$$

и, как следствие,

$$\alpha_0^{(1)}(x) = \alpha_0^{(2)}(x) = 0. \tag{3.70}$$

В случае (b), пользуясь формулой (3.68) и предположением, что ω_1, ω_2, ω_3 положительны и попарно различны, мы получаем, что

$$\frac{\alpha_0^{(2)}}{(c^{(2)})^2} - \frac{\alpha_0^{(1)}}{(c^{(1)})^2} = 0 \quad \textit{в точке } x. \tag{3.71}$$

Из формул (3.58) и (3.71) следует равенство

$$\alpha_0^{(2)}(x) = \alpha_0^{(1)}(x). \tag{3.72}$$

Наконец, равенство $\alpha^{(2)} = \alpha^{(1)}$ во всей области D следует из формулы (3.70) в случае (a) и из формулы (3.72) в случае (b).

Это завершает доказательство теоремы 3.4 в случае $d \geq 3$.

Случай $d = 2$. Действуя как при доказательстве теоремы 3.3, мы получаем формулы (3.38), (3.67), (3.40)–(3.43) при $d = 2$ и формулы (3.59)–(3.65), где в формулах (3.43), (3.62) и (3.65) полагается $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Разделяя вещественную и мнимую части в равенстве (3.43), мы получаем равенства (3.45) и (3.68) при $d = 2$, где $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Пользуясь формулой (3.68) и предположением, что ω_1, ω_2, ω_3 попарно различны, мы получаем формулу (3.46) при $d = 2$.

Как и при доказательстве теоремы 3.3 в случае $d \geq 3$, мы используем формулы (3.42) и (3.45) для получения формулы (3.51).

Из формул (3.41), (3.46), (3.51) при $d = 2$ и из формулы (3.65) следует формула (3.58) при $d = 2$ (см. доказательство теоремы 3.3 в случае $d = 2$).

Наконец, используя равенство (3.68), мы завершаем доказательство теоремы 3.4 в случае $d = 2$ аналогично тому, как мы завершили доказательство теоремы 3.4 в случае $d \geq 3$. $\square$

4 Сведение обратной задачи Дирихле–Неймана к обратной задаче рассеяния

4.1 Случай нулевых фоновых коэффициентов

В §3.1 мы сформулировали обратную задачу Дирихле–Неймана 3.1 и заметили, что одним из двух основных подходов к решению задачи 3.1 является её сведение к подходяшей многомерной задаче рассеяния. В §3.1 мы также сформулировали соответствующую многомерную обратную задачу рассеяния 3.3. В этом и следующем параграфах мы приведём формулы и уравнения, сводящие задачу 3.1 к задаче 3.3. Более точно, мы приведём формулы и уравнения для нахождения данных рассеяния $S_{A,V}(E)$ по оператору Дирихле–Неймана $\Lambda_{A,V}(E)$ из формулы (3.1).

Мы рассматриваем уравнение (3.9) при $E \in \mathbb{C}$ и $x \in D$, где

$$D \text{ — \textit{ограниченная область в} } \mathbb{R}^d \ (d \in \{2,3\}) \text{ \textit{с границей} } \partial D \in C^2. \tag{4.1}$$

Пусть $C^{0,\alpha}_{\mathrm{comp}}(D, M_n(\mathbb{C}))$ обозначает множество $M_n(\mathbb{C})$-значных покомпонентно гёльдер-непрерывных с показателем α функций на $\mathbb{R}^d$ с носителем в D. Кроме того, пусть $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ обозначает множество функций из пространства $C^1(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ с покомпонентно гёльдер-непрерывными с показателем β первыми производными.

Мы предполагаем, что коэффициенты A_j и V уравнения (3.9) удовлетворяют следующему условию:

$$A_1, \ldots, A_d, V \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{comp}}(D, M_n(\mathbb{C})), \quad \alpha \in (0,1]. \tag{4.2}$$

Мы считаем, что E не является собственным значением Дирихле для операторов $L_{A,V}$ и $-\Delta$ из формулы (3.1) в области D, так что задача (3.2a), (3.2b) однозначно разрешима относительно $\psi \in C^2(D, M_n(\mathbb{C})) \cap C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ для всех $f \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, $\beta \in (0,1)$ (мы докажем это утверждение в лемме 4.3 из §4.4). Пусть $\Lambda_{A,V}(E)$ обозначает оператор Дирихле–Неймана для уравнения (3.9) в области D. Этот оператор определяется формулой (3.4), где ψ — решение задачи (3.2a), (3.2b).

Мы также рассматриваем уравнение (3.9) при $x \in \mathbb{R}^d$ (заметим, что определение (4.2) предполагает, что $A = 0$, $V = 0$ вне D). Для этого уравнения мы рассматриваем данные рассеяния $S_{A,V}(E)$, которые представляют собой одну из функций f или h_γ, $\gamma \in S^{d-1}$, определённых в формулах (3.14) и (3.18), если $E > 0$, и функцию h из формулы (3.17), если $E \in \mathbb{C} \setminus (0, \infty)$. Мы сведём обратную задачу Дирихле–Неймана 3.1 к обратной задаче рассеяния 3.3 из §3.1, указав формулы нахождения данных рассеяния $S_{A,V}(E)$ по $\Lambda_{A,V}$.

Для формулировки основных результатов нам необходимо ввести несколько обозначений. Мы определяем множества $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_\gamma$, $\gamma \in S^{d-1}$, и $\mathcal{E}^+$ следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathcal{E} = \big\{\zeta \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d \mid \textit{уравнение } (3.15) \textit{ при } k = \zeta \textit{ не разрешимо}\\ \textit{однозначно относительно } \psi = e^{ikx}\mu, \textit{ где } \mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))\big\},\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_\gamma = \big\{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus 0 \mid \textit{уравнение } (3.15) \textit{ при } k = \zeta + i0\gamma \textit{ не разрешимо}\\ \textit{однозначно относительно } \psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))\big\},\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{E}^+ = \big\{\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus 0 \mid \textit{уравнение } (3.12) \textit{ при } k = \zeta \textit{ не}\\ \textit{разрешимо однозначно относительно } \psi^+ \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))\big\}.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Свойства множеств $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_\gamma$ и $\mathcal{E}^+$ изучались в литературе в случае $n = 1$, $A \equiv 0$, см. [59] и ссылки в этой работе.

Положим $\Lambda(E) = \Lambda_{A,V}(E)$, $\Lambda^0(E) = \Lambda_{0,0}(E)$, а через $(\Lambda - \Lambda^0)(x, y, E)$, x, $y \in \partial D$, обозначим ядро (в смысле Шварца) оператора $\Lambda(E) - \Lambda^0(E)$.

Теорема 4.1. *Пусть D удовлетворяет (4.1) и $E \in \mathbb{C}$ зафиксировано. Пусть коэффициенты A, V удовлетворяют (4.2) и E не является собственным значением Дирихле для операторов $L_{A,V}$ и $-\Delta$ в D. Тогда справедливы следующие формулы и уравнения:*

$$h(k, l) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\partial D} \int\limits_{\partial D} e^{-ilx} (\Lambda - \Lambda^0)(x, y, E) \psi(y, k)\, dy\, dx, \tag{4.6}$$

где k, $l \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E})$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$, $k^2 = l^2 = E$,

$$\psi(x, k) = e^{ikx}\mathrm{Id}_n + \int\limits_{\partial D} A(x, y, k) \psi(y, k)\, dy, \quad x \in \partial D, \tag{4.7}$$

$$A(x, y, k) = \int\limits_{\partial D} G(x - z, k)(\Lambda - \Lambda^0)(z, y, E)\, dz, \quad x, y \in \partial D, \tag{4.8}$$

где $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E})$, $k^2 = E$, *а* G *определено в формуле* (3.16);

$$h_\gamma(k,l) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\partial D} \int\limits_{\partial D} e^{-ilx} (\Lambda - \Lambda^0)(x,y,E) \psi_\gamma(y,k)\, dy\, dx, \tag{4.9}$$

где $\gamma \in S^{d-1}$, k, $l \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_\gamma)$, $k^2 = l^2 = E$,

$$\psi_\gamma(x,k) = e^{ikx} \mathrm{Id}_n + \int\limits_{\partial D} A_\gamma(x,y,k) \psi_\gamma(y,k)\, dy, \quad x \in \partial D, \tag{4.10}$$

$$A_\gamma(x,y,k) = \int\limits_{\partial D} G_\gamma(x-z,k)(\Lambda - \Lambda^0)(z,y,E)\, dz, \quad x,y \in \partial D, \tag{4.11}$$

$$G_\gamma(x,k) \stackrel{def}{=\!=} G(x, k + i0\gamma), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.12}$$

где $\gamma \in S^{d-1}$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_\gamma)$, $k^2 = E$;

$$f(k,l) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\partial D} \int\limits_{\partial D} e^{-ilx} (\Lambda - \Lambda^0)(x,y,E) \psi^+(y,k)\, dy\, dx, \tag{4.13}$$

где k, $l \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+)$, $k^2 = l^2 = E$,

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} \mathrm{Id}_n + \int\limits_{\partial D} A^+(x,y,k) \psi^+(y,k)\, dy, \quad x \in \partial D, \tag{4.14}$$

$$A^+(x,y,k) = \int\limits_{\partial D} G^+(x-z,k)(\Lambda - \Lambda^0)(z,y,E)\, dz, \quad x,y \in \partial D, \tag{4.15}$$

где $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+)$, $k^2 = E$, *а* G^+ *определено в формуле* (3.13).

Мы рассматриваем (4.6), (4.9) и (4.13) как явные формулы для нахождения h, h_γ и f по оператору $\Lambda(E) - \Lambda^0(E)$ и функциям ψ, ψ_γ и ψ^+ соответственно. При этом функции ψ, ψ_γ и ψ^+ находится по оператору $\Lambda(E) - \Lambda^0(E)$ из интегральных уравнений (4.7), (4.10) и (4.14). В следующей теореме приводятся условия разрешимости этих уравнений.

Заметим, что норма в пространстве $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ определяется формулой

$$\|\psi\|_{C^{1,\beta}} = \|\psi\|_{C^1} + \max_k \max_{i,j} \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{\left|\partial_k \varphi_{ij}(x_1) - \partial_k \varphi_{ij}(x_2)\right|}{|x_1 - x_2|^\beta},$$

где $\varphi(x) = \big(\varphi_{ij}(x)\big) \in M_n(\mathbb{C})$, $\partial_k = \partial/\partial x_k$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1 и пусть* $\beta \in (0,1)$.

(A) Пусть $k \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$. *Тогда уравнение* (4.7) *является уравнением Фредгольма второго рода относительно* $\psi \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, *которое однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда* $k \notin \mathcal{E}$.

(B) Пусть $\gamma \in S^{d-1}$, $k \in \mathbb{R}^d \backslash 0$, $k^2 = E$. *Тогда уравнение* (4.10) *является уравнением Фредгольма второго рода относительно* $\psi_\gamma \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, *которое однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда* $k \notin \mathcal{E}_\gamma$.

(C) Пусть $k \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, $k^2 = E$. *Тогда уравнение* (4.14) *является уравнением Фредгольма второго рода относительно* $\psi^+ \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, *которое однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда* $k \notin \mathcal{E}^+$.

Теоремы 4.1 и 4.2 являются частными случаями теорем 4.3 и 4.4, которые формулируются в следующем параграфе.

4.2 Случай известных фоновых коэффициентов

На практике для решения уравнений типа (4.7), (4.10) и (4.14) из теоремы 4.1 используется метод последовательных приближений. Однако, для применимости этого метода требуется, чтобы норма интегральных операторов из этих уравнений была мала. Это соответствует случаю, когда коэффициенты A и V малы. На практике же часто возникает случай, когда коэффициент V близок к некоторому известному фоновому коэффициенту V^0, см., например, [11, 61]. В настоящем разделе мы приведём обобщение теорем 4.1 и 4.2 на случай известного фонового коэффициента V^0.

Для формулировки этих результатов нам потребуется ввести новые обозначения. Пусть V^0 — $M_n(\mathbb{C})$-значная функция в области D такая, что либо

$$V^0(x) \text{ — \textit{диагональная матрица для всех} } x \in D, \tag{4.16}$$

либо

$$\begin{gathered} V^0(x) = \mathscr{V}^0 v^0(x) \text{ \textit{при} } x \in D, \text{ \textit{где} } \mathscr{V}^0 \in M_n(\mathbb{C}), \\ \text{\textit{а} } v^0 \text{ — \textit{скалярная функция в} } D. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Мы рассматриваем функции R^0, R^0_γ, $\gamma \in S^{d-1}$, и $R^{+,0}$, определяемые следующим образом:

$$R^0(x,y,k) = G(x-y,k)\mathrm{Id}_n + \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(x-z,k)V^0(z)R^0(z,y,k)\,dz, \tag{4.18}$$

где x, $y \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, а G определяется в формуле (3.16);

$$R^0_\gamma(x,y,k) \stackrel{\text{def}}{=\!=} R^0(x,y,k+i0\gamma), \tag{4.19}$$

$$R^{+,0}(x,y,k) \stackrel{\text{def}}{=\!=} R^0_{k/|k|}(x,y,k), \tag{4.20}$$

где x, $y \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, $\gamma \in S^{d-1}$.

Мы рассматриваем (4.18) при фиксированных y, k как интегральное уравнение на функцию

$$R^0(x,y,k) = G(x-y,k)\mathrm{Id}_n + e^{ik(x-y)}r^0(x,y,k), \tag{4.21}$$

где $r^0(\cdot,y,k) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$.

Из формул (4.18) и (4.21) следует, что функция r^0 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} r^0(x,y,k) = &\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x-z,k)V^0(z)g(z-y,k)\,dz \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x-z,k)V^0(z)r^0(z,y,k)\,dy, \end{aligned} \tag{4.22}$$

где x, $y \in \mathbb{R}^d$, а g определяется в формуле (3.16).

Пусть V^0 удовлетворяет (4.2). Определим L_{0,V^0}, $\mathcal{E}_{V^0}$, $\mathcal{E}_{V^0,\gamma}$, $\gamma \in S^{d-1}$, и $\mathcal{E}^+_{V^0}$ формулами (3.1), (4.3), (4.4), (4.5), используя коэффициенты $A = 0$, $V = V^0$ в формулах (3.1), (3.12) и (3.15). Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $k \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$. Тогда уравнение (4.22) однозначно разрешимо относительно $r^0(\cdot,y,k) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ при всех $y \in \mathbb{R}^d$ тогда и только тогда, когда $k \notin \mathcal{E}_{V^0}$.

2. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, $\gamma \in S^{d-1}$. Тогда уравнение (4.22) с $k = \zeta + i0\gamma$ однозначно разрешимо относительно $r^0(\cdot,y,k) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$ тогда и только тогда, когда $\zeta \notin \mathcal{E}_{V^0,\gamma}$.

3. Пусть $y \in \mathbb{R}^d$, $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus 0$. Тогда уравнение (4.22) с $k = \zeta + i0\zeta/|\zeta|$ однозначно разрешимо относительно $r^0(\cdot, y, k) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$ тогда и только тогда, когда $\zeta \notin \mathcal{E}^+_{V^0}$.

Кроме того, если уравнение (4.22) при фиксированном k однозначно разрешимо относительно $r^0(\cdot, y, k) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ при всех $y \in \mathbb{R}^d$, то функция r^0 обладает следующими свойствами:

$$r^0(\cdot, \cdot, k) \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C})) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C})), \tag{4.23}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x - z, k) V^0(z) r^0(z, y, k)\, dz = \int\limits_{\mathbb{R}^d} r^0(x, z, k) V^0(z) g(z - y, k)\, dz, \tag{4.24}$$

где x, $y \in \mathbb{R}^d$.

Определим функцию $\widetilde{\psi}^0_\gamma$ следующим образом:

$$\widetilde{\psi}^0_\gamma(x, k, l) = e^{ilx}\mathrm{Id}_n + \int_{\mathbb{R}^d} G_\gamma(x - y, k) V^0(y) \widetilde{\psi}^0_\gamma(y, k, l)\, dy, \tag{4.25}$$

где x, k, $l \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2 > 0$, $\gamma \in S^{d-1}$. Мы рассматриваем (4.25) при фиксированных k, l, γ как интегральное уравнение относительно $\widetilde{\psi}^0_\gamma(\cdot, k, l) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$.

Пусть $\Lambda = \Lambda_{A,V}$, ψ, ψ_γ, ψ^+, h, h_γ, f, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_\gamma$, $\mathcal{E}^+$ соответствуют коэффициентам A, V (как было определено выше), а $\Lambda_{V^0} = \Lambda_{0,V^0}$, ψ^0, ψ^0_γ, $\psi^{+,0}$, h^0, h^0_γ, f^0, $\mathcal{E}_{V^0}$, $\mathcal{E}_{V^0,\gamma}$, $\mathcal{E}^+_{V^0}$ соответствуют коэффициентам $A^0 = 0$, V^0. Через $(\Lambda - \Lambda_{V^0})(x, y, E)$, x, $y \in \partial D$, обозначим ядро (в смысле Шварца) оператора $\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E)$.

Теорема 4.3. *Пусть D удовлетворяет* (4.1). *Предположим, что коэффициенты A, V и $A^0 = 0$, V^0 удовлетворяют* (4.2). *Пусть, кроме того, V^0 удовлетворяет либо* (4.16), *либо* (4.17), *а E не является собственным значением Дирихле для операторов $L_{A,V}$, L_{0,V^0} и $-\Delta$ в D. Тогда справедливы следующие формулы и уравнения:*

$$\begin{gathered} h(k, l) = h^0(k, l) \\ +(2\pi)^{-d} \int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D} \psi^0(x, -l)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(x, y, E)\psi(y, k)\, dy\, dx, \end{gathered} \tag{4.26}$$

где $k,\ l \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{V^0}),\ \mathrm{Im}\, k = \mathrm{Im}\, l,\ k^2 = l^2 = E,$

$$\psi(x,k) = \psi^0(x,k) + \int\limits_{\partial D} A(x,y,k)\psi(y,k)\,dy, \quad x \in \partial D, \tag{4.27}$$

$$A(x,y,k) = \int\limits_{\partial D} R^0(x,z,k)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(z,y,E)\,dz, \quad x,y \in \partial D, \tag{4.28}$$

где $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{V^0}),\ k^2 = E;$

$$\begin{gathered} h_\gamma(k,l) = h^0_\gamma(k,l) \\ +(2\pi)^{-d} \int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D} \widetilde{\psi}^0_{-\gamma}(x,-k,-l)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(x,y,E)\psi_\gamma(y,k)\,dy\,dx, \end{gathered} \tag{4.29}$$

где $\gamma \in S^{d-1},\ k,\ l \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_\gamma \cup \mathcal{E}_{V^0,\gamma}),\ k^2 = l^2 = E,$

$$\psi_\gamma(x,k) = \psi^0_\gamma(x,k) + \int\limits_{\partial D} A_\gamma(x,y,k)\psi_\gamma(y,k)\,dy, \quad x \in \partial D, \tag{4.30}$$

$$A_\gamma(x,y,k) = \int\limits_{\partial D} R^0_\gamma(x,z,k)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(z,y,E)\,dz, \quad x,y \in \partial D, \tag{4.31}$$

где $\gamma \in S^{d-1},\ k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_\gamma \cup \mathcal{E}_{V^0,\gamma}),\ k^2 = E;$

$$\begin{gathered} f(k,l) = f^0(k,l) \\ +(2\pi)^{-d} \int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D} \psi^{+,0}(x,-l)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(x,y,E)\psi^+(y,k)\,dy\,dx, \end{gathered} \tag{4.32}$$

где $k,\ l \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^+_{V^0}),\ k^2 = l^2 = E,$

$$\psi^+(x,k) = \psi^{+,0}(x,k) + \int\limits_{\partial D} A^+(x,y,k)\psi^+(y,k)\,dy, \quad x \in \partial D, \tag{4.33}$$

$$A^+(x,y,k) = \int\limits_{\partial D} R^{+,0}(x,z,k)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(z,y,E)\,dz, \quad x,y \in \partial D, \tag{4.34}$$

где $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^+_{V^0}),\ k^2 = E.$

Как и в случае теоремы 4.1, мы рассматриваем (4.26), (4.29) и (4.32) как явные формулы для нахождения h, h_γ и f по оператору $\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E)$, известным функциям h^0, h^0_γ, f^0, ψ^0, ψ^0_γ, $\psi^{+,0}$ и функциям ψ, ψ_γ, ψ^+. При этом функции ψ, ψ_γ и ψ^+ находятся из интегральных уравнений (4.27), (4.30) и (4.33) соответственно. Теорема 4.3 доказывается в §4.3. В следующей теореме приводится критерий разрешимости уравнений (4.27), (4.30) и (4.33).

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия теоремы 4.3 и пусть* $\beta \in (0,1)$.

(A) Пусть $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E}_{V^0})$, $k^2 = E$. *Тогда уравнение* (4.27) *является интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно* $\psi \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, *которое однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда* $k \notin \mathcal{E}$.

(B) Пусть $\gamma \in S^{d-1}$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_{V^0,\gamma})$, $k^2 = E$. *Тогда уравнение* (4.30) *является интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно* $\psi_\gamma \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, *которое однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда* $k \notin \mathcal{E}_\gamma$.

(C) Пусть $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+_{V^0})$, $k^2 = E$. *Тогда уравнение* (4.33) *является интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно* $\psi^+ \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, *которое однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда* $k \notin \mathcal{E}^+$.

Теорема 4.4 доказывается в §4.4.

4.3 Доказательство теоремы 4.3

Интегральное тождество

Мы начнём доказательство теоремы 4.3 с доказательства следующего интегрального тождества:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\partial D} u^0(x)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(u|_{\partial D})(x)\,dx \\ &= \int\limits_D u^0(x)\Big(-2i\sum_{j=1}^d A_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) - V_0(x)\Big)u(x)\,dx, \end{aligned} \tag{4.35}$$

где u и u^0 — достаточно регулярные $M_n(\mathbb{C})$-значные функции в области D (например, u, $u^0 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$), удовлетворяющие уравнениям

$$-\Delta u - 2i \sum_{j=1}^{d} A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x)u = Eu, \quad x \in D, \tag{4.36}$$

$$-\Delta u^0 + V^0(x)u^0 = Ev^0, \quad x \in D, \tag{4.37}$$

$$V^0(x)u^0(x) = u^0(x)V^0(x), \quad x \in D. \tag{4.38}$$

Тождество (4.35) в случае $n = 1$, $A = (A_1, \ldots, A_d) = 0$ впервые было получено в работе [9]. Оно было обобщено на случай $n \geq 2$, $A = 0$ в работе [60]. Тождество (4.35) является следствием второй формулы Грина. Следующая цепочка равенств доказывает (4.35):

$$\begin{aligned}
&\int_D u^0(x)\Big(-2i \sum_{j=1}^{d} A_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) - V^0(x)\Big)u(x)\,dx \\
&\overset{(4.36),(4.38)}{=\!=\!=} \int_D \big(u^0(x)(\Delta + E)u(x) - V^0(x)u^0(x)u(x)\big)\,dx \\
&\overset{(4.37)}{=\!=} \int_D \big(u^0(x)\Delta u(x) - \Delta u^0(x)u(x)\big)\,dx \\
&= \int_{\partial D} u^0(x)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(u|_{\partial D})(x)\,dx \\
&+ \int_{\partial D} \Big(u^0(x)\Lambda_{V^0}(u|_{\partial D})(x) - \Lambda_{V^0}(u^0|_{\partial D})(x)u(x)\Big)\,dx \\
&= \int_{\partial D} u^0(x)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(u|_{\partial D})(x)\,dx \\
&+ \int_D \Big(u^0(x)V^0(x)\widetilde{u}(x) - V^0(x)u^0(x)\widetilde{u}(x)\Big)dx \\
&\overset{(4.38)}{=\!=} \int_{\partial D} u^0(x)(\Lambda - \Lambda_{V^0})(u|_{\partial D})(x)\,dx,
\end{aligned}$$

где $\widetilde{u}$ — решение уравнения (4.37) с граничным условием $\widetilde{u}|_{\partial D} = u|_{\partial D}$.

Симметрии функций ψ^0, ψ^0_γ, $\psi^{+,0}$ и R^0, R^0_γ, $R^{+,0}$

Обозначим через $L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$ множество функций из $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ с компактным носителем.

Лемма 4.1. *Пусть $V^0 \in L^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d)$ и пусть V^0 удовлетворяет либо* (4.16), *либо* (4.17)*. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$V^0(x)\psi^0(x,k) = \psi^0(x,k)V^0(x), \tag{4.39}$$

$$V^0(x)R^0(x,y,k) = R^0(x,y,k)V^0(x), \tag{4.40}$$

$$R^0(x,y,k) = R^0(y,x,-k), \tag{4.41}$$

где x*,* $y \in \mathbb{R}^d$*,* $x \neq y$*,* $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E}_{V^0})$*.*

Доказательство. Мы начнём с доказательства свойства (4.39). Пусть $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E}_{V^0})$ зафиксировано. Тогда уравнение (3.15) с $A = 0$, $V = V^0$ однозначно разрешимо относительно $\psi^0 = e^{ikx}\mu^0$, где $\mu^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$.

Предположим, что V^0 удовлетворяет (4.16). В этом случае из формулы (3.15) следует, что $\psi^0(x,k)$ — диагональная матрица при всех $x \in \mathbb{R}^d$. Следовательно, справедливо соотношение (4.39).

Предположим теперь, что V^0 удовлетворяет (4.17), так что $V^0(x) = \mathscr{V}^0 v^0(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Пусть $U \in GL_n(\mathbb{C})$ приводит $\mathscr{V}^0$ к нормальной форме:

$$U\mathscr{V}^0U^{-1} \overset{\text{def}}{=\!=} \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Lambda_s \end{bmatrix}, \quad \Lambda_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix},$$

где $\Lambda_j \in M_{n_j}(\mathbb{C})$, $j = 1, \ldots, s$. Определим $\psi' = U\psi^0U^{-1}$. Тогда ψ' удовлетворяет уравнению

$$\psi'(x,k) = e^{ikx}\mathrm{Id}_n + \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(x-y,k)\Lambda v^0(y)\psi'(y,k)\,dy. \tag{4.42}$$

Из условия $k \notin \mathcal{E}_{V^0}$ следует, что уравнение (4.42) имеет единственное решение. Отсюда вытекает, что ψ' имеет блочно-диагональную форму:

$$\psi' = \begin{bmatrix} \psi'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \psi'_s \end{bmatrix},$$

где $\psi'_j(x) \in M_{n_j}(\mathbb{C})$, $x \in D$, $j = 1, \ldots, s$. Из уравнения (4.42) следует, что справедливы и однозначно разрешимы следующие уравнения:

$$\psi'_j(x,k) = e^{ikx}\mathrm{Id}_{n_j} + \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(x-y,k)\Lambda_j v^0(y)\psi'_j(y,k)\,dy, \tag{4.43}$$

где $j = 1, \ldots, s$. Обозначим через $\psi'_{j,il}$ элемент в позиции (i,l) в матрице ψ'_j. Из матричного уравнения (4.43) следует уравнение

$$\psi'_{j,il}(x,k) = \lambda_j \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(x-y,k)v^0(y)\psi'_{j,il}(y,k)\,dy, \quad i = n_j, \ \ l < n_j. \tag{4.44}$$

Покажем, что уравнение (4.44) имеет только тривиальное решение. Предположим, от противного, что существует решение $\phi \not\equiv 0$ уравнения (4.44). Тогда мы можем построить решение $\widetilde{\psi}'_j$ уравнения (4.43), отличное от решения ψ'_j, полагая $\widetilde{\psi}'_{j,11} = \psi'_{j,11} + \phi$ и $\widetilde{\psi}'_{j,il} = \psi'_{j,il}$ для всех остальных i, l. Это противоречит однозначной разрешимости уравнения (4.43). Следовательно, уравнение (4.44) имеет только тривиальное решение и $\psi'_{j,il} \equiv 0$ для всех $i = n_j$ и $l < n_j$.

Записывая уравнение (4.43) покомпонентно для строк с номерами $i = n_j - 1$, $\ldots$, 2 мы получаем по индукции, что $\psi'_{j,il} \equiv 0$ при $i > l$.

Зафиксируем i, l такие, что $i \neq l$. Вычитая уравнение (4.43) для элемента в позиции (l,l) из уравнения (4.43) для элемента в позиции (i,i), мы получим уравнение

$$\psi'_{j,ii}(x,k) - \psi'_{j,ll}(x,k) = \lambda_j \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(x-y,k)v^0(y)\big(\psi'_{j,ii}(y,k) - \psi'_{j,ll}(y,k)\big)\,dy.$$

Так как уравнение (4.44) имеет только тривиальное решение, мы получаем, что $\psi'_{j,ii} \equiv \psi'_{j,ll}$.

Теперь зафиксируем i, l такие, что $i \neq l$, $i > 1$, $l > 1$. Запишем уравнение (4.43) для элементов в позициях $(i-1,i)$ и $(l-1,l)$ и вычтем одно из другого. Мы получим уравнение

$$\psi'_{j,i-1,i}(x,k) - \psi'_{j,l-1,l}(x,k) = \lambda_j \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(x-y,k)\times$$
$$\times v^0(y)\big(\psi'_{j,i-1,i}(y,k) - \psi'_{j,l-1,l}(y,k)\big)\,dy + \psi'_{j,ii}(x,k) - \psi'_{j,ll}(x,k).$$

Но нами было показано, что $\psi'_{j,ii} \equiv \psi'_{j,ll}$ и что уравнение (4.44) имеет только тривиальное решение. Отсюда следует, что $\psi'_{j,i-1,i} \equiv \psi'_{j,l-1,l}$. Продолжая эту процедуру, получим, что ψ'_j имеет следующую верхнюю треугольную форму:

$$\psi'_j = \begin{bmatrix} \psi'_{j,11} & \psi'_{j,12} & \psi'_{j,13} & \cdots & \psi'_{j,1,n-1} & \psi'_{j,1n} \\ 0 & \psi'_{j,11} & \psi'_{j,12} & \cdots & \psi'_{j,1,n-2} & \psi'_{j,1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \psi'_{j,11} & \psi'_{j,12} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \psi'_{j,11} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\psi'_j(x,k)$ коммутирует с Λ_j при всех $x \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, \ldots, s$. Следовательно, $\psi'(x,k)$ коммутирует с Λ и $\psi(x,k)$ коммутирует с $\mathcal{V}^0$ при всех $x \in \mathbb{R}^d$. Соотношение (4.39) доказано.

Формула (4.40) доказывается аналогичным образом.

Доказательство формулы (4.41) в случае $n = 1$ приводится в работе [58]. Это доказательство также работает в случае $n \geq 2$, если V^0 удовлетворяет либо (4.16), либо (4.17). $\square$

Замечание 4.1. *Тем же способом, каким была доказана лемма 4.1, можно показать, что если $V^0 \in L^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ и V^0 удовлетворяет либо* (4.16), *либо* (4.17), *то справедливы следующие формулы:*

$$V^0(x)\psi^0_\gamma(x,k) = \psi^0_\gamma(x,k)V^0(x), \tag{4.45}$$

$$V^0(x)R^0_\gamma(x,y,k) = R^0_\gamma(x,y,k)V^0(x), \tag{4.46}$$

$$R^0_\gamma(x,y,k) = R^0_{-\gamma}(y,x,-k), \tag{4.47}$$

где $\gamma \in S^{d-1}$, x, $y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_{V^0,\gamma})$;

$$V^0(x)\psi^{+,0}(x,k) = \psi^{+,0}(x,k)V^0(x), \tag{4.48}$$

$$V^0(x)R^{+,0}(x,y,k) = R^{+,0}(x,y,k)V^0(x), \tag{4.49}$$

$$R^{+,0}(x,y,k) = R^{+,0}(y,x,-k), \tag{4.50}$$

где x, $y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+_{V^0})$.

Лемма 4.2. *Пусть $V^0 \in L^\infty_{comp}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$. Тогда:*

(A) Если $k, l \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$, $k \notin \mathcal{E}_{V^0}$, то $l \notin \mathcal{E}_{V^0}$ и справедливо соотношение

$$R^0(x,y,k) = R^0(x,y,l), \tag{4.51}$$

где $x,\ y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$.

(B) Если $k,\ l \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, $k^2 = l^2$, $k \notin \mathcal{E}^+_{V^0}$, *то* $l \notin \mathcal{E}^+_{V^0}$ *и справедливо соотношение*

$$R^{+,0}(x, y, k) = R^{+,0}(x, y, l), \tag{4.52}$$

где $x,\ y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$.

Доказательство. Утверждение (A) следует из определения (4.18) и из следующей формулы из работы [101]:

$$G(x, k) = G(x, l), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus 0,\ k, l \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d,\ k^2 = l^2,\ \operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l.$$

Утвеждение (B) следует из формул (4.18), (4.20) и из тождества

$$G^+(x, k) = G^+(x, l), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus 0,\ k, l \in \mathbb{R}^d \setminus 0,\ k^2 = l^2,$$

которое вытекает из следующих явных формул:

$$G^+(x, k) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(|k||x|), \quad d = 2,$$
$$G^+(x, k) = -\frac{e^{i|k||x|}}{4\pi|x|}, \quad d = 3,$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода. □

Учёт фоновых коэффициентов в уравнениях и формулах

Мы собираемся переформулировать уравнения (3.12), (3.15) и формулы (3.14), (3.17) в терминах фоновых коэффициентов.

Вычитая уравнение (3.15), записанное для функции ψ, из уравнения (3.15), записанного для функции ψ^0, мы получаем формулу

$$\psi(x, k) - \psi^0(x, k) - \int\limits_D G(x - y, k) V^0(y)(\psi(y, k) - \psi^0(y, k))\, dy$$
$$= \int\limits_D G(x - y, k)\Big(-2i \sum_{j=1}^{d} A_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + V(y) - V^0(y)\Big)\psi(y, k)\, dy,$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{V^0})$. Сравнивая эту формулу с уравнением (4.18), мы получаем следующее соотношение:

$$\psi(x,k) = \psi^0(x,k) + \int\limits_D R^0(x,y,k) \times \\ \times \left(-2i \sum_{j=1}^d A_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + V(y) - V^0(y) \right) \psi(y,k)\, dy, \tag{4.53}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{V^0})$.

Аналогичным образом мы получаем следующие уравнения:

$$\psi_\gamma(x,k) = \psi_\gamma^0(x,k) + \int\limits_D R_\gamma^0(x,y,k) \times \\ \times \left(-2i \sum_{j=1}^d A_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + V(y) - V^0(y) \right) \psi_\gamma(y,k)\, dy, \tag{4.54}$$

где $\gamma \in S^{d-1}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_\gamma \cup \mathcal{E}_{V^0,\gamma})$;

$$\psi^+(x,k) = \psi^{+,0}(x,k) + \int\limits_D R^{+,0}(x,y,k) \times \\ \times \left(-2i \sum_{j=1}^d A_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + V(y) - V^0(y) \right) \psi^+(y,k)\, dy, \tag{4.55}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^+_{V^0})$.

Из формулы (4.53) с $A_1 = 0, \ldots, A_d = 0$, $V = 0$ и из формул (4.40), (4.41), (4.51) следует соотношение

$$e^{-ilx}\mathrm{Id}_n = \psi^0(x,-l) - \int\limits_D e^{-ily} V^0(y) R^0(y,x,k)\, dy, \tag{4.56}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, k, $l \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$, $k \notin \mathcal{E}_{V^0}$.

Кроме того, справедлива следующая цепочка равенств:

$$
\begin{gathered}
(2\pi)^d h(k,l) \overset{(3.17)}{=\!=} \int_D e^{-ilx} V^0(x)\psi(x,k)\,dx \\
+\int_D e^{-ilx}\left(-2i\sum_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) - V^0(x)\right)\psi(x,k)\,dx \\
\overset{(4.56)}{=\!=} \int_D e^{-ilx} V^0(x)\psi(x,k)\,dx + \int_D \psi^0(x,-l)\times \\
\times\left(-2i\sum_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) - V^0(x)\right)\psi(x,k)\,dx \\
-\int_D e^{-ily} V^0(y)\int_D R^0(y,x,k)\times \\
\times\left(-2i\sum_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) - V^0(x)\right)\psi(x,k)\,dx\,dy,
\end{gathered}
$$

где $k,\ l \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$, $k \notin \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{V^0}$.

Из этой цепочки равенств и из формулы (4.53) следует формула

$$
\begin{gathered}
h(k,l) = h^0(k,l) + (2\pi)^{-d}\int\limits_D \psi^0(x,-l)\times \\
\times\left(-2i\sum_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) - V^0(x)\right)\psi(x,k)\,dx,
\end{gathered}
\tag{4.57}
$$

где $k,\ l \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$, $k \notin \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{V^0}$.

Тем же способом, каким была доказана формула (4.57), но с использованием формул (4.49), (4.50), (4.52), (4.55) вместо формул (4.40), (4.41), (4.51), (4.53), мы получаем формулу

$$
\begin{gathered}
f(k,l) = f^0(k,l) + (2\pi)^{-d}\int\limits_D \psi^{+,0}(x,-l)\times \\
\times\left(-2i\sum_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + V(x) - V^0(x)\right)\psi^+(x,k)\,dx,
\end{gathered}
\tag{4.58}
$$

где $k,\ l \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, $k^2 = l^2$, $k \notin \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^+_{V^0}$.

Окончание доказательства теоремы 4.3

Из формул (4.39) и (4.48) следует, что мы можем воспользоваться тождеством (4.35) в формулах (4.57) и (4.58). Примененяя тождество (4.35) к интегралам в формулах (4.57) и (4.58), мы получаем формулы (4.26) и (4.32), соответственно.

Заметим, что функция $G(x,k)$ удовлетворяет следующему уравнению при фиксированном $k \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$ (см., например, [107]):

$$\Delta_x G(x,k) + k^2 G(x,k) = \delta(x). \tag{4.59}$$

Из формул (4.18), (4.21), (4.24), (4.59) следует, что функция $R^0(x,y,k)$ при фиксированном $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E}_{V^0})$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &(\Delta_x - V^0(x) + k^2)R(x,y,k) = \delta_y(x)\mathrm{Id}_n, \quad \textit{при фикс. } y \in \mathbb{R}^d,\\ &(\Delta_y - V^0(y) + k^2)R(x,y,k) = \delta_x(y)\mathrm{Id}_n, \quad \textit{при фикс. } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Пусть $x \notin \overline{D}$. Применим тождество (4.35) к интегралу в формуле (4.53), учитывая формулы (4.40), (4.60), и устремим x к точке на ∂D. Мы получим формулу (4.27). Формулы (4.30) и (4.33) получаются аналогичным образом, с использованием уравнений (4.54) и (4.55) вместо уравнения (4.53).

Мы докажем формулу (4.29), используя идеи из работы [59]. Заметим, что формула (4.25) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} e^{ilx}\mathrm{Id}_n - \widetilde{\psi}^0_\gamma(x,k,l) - \int_D G_\gamma(x-y,k)V^0(y)\big(e^{ily} - \widetilde{\psi}^0_\gamma(y,k,l)\big)\,dy&\\ = -\int_D G(x-y,k)V^0(y)e^{ily}\,dy.& \end{aligned} \tag{4.61}$$

Из формул (4.12), (4.18) и (4.19) следует, что функция $R^0_\gamma(\cdot,y,k)$ корректно определена при фиксированных $y \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_{V^0,\gamma})$ и удовлетворяет уравнению

$$R^0_\gamma(x,y,k) = G_\gamma(x-y,k) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} G_\gamma(x-z,k)V^0(z)R^0_\gamma(z,y,k)\,dz, \tag{4.62}$$

где x, $y \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in S^{d-1}$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_{V^0,\gamma})$.

Сравнивая формулы (4.61) и (4.62), мы получаем следующую формулу:

$$e^{ilx}\mathrm{Id}_n = \widetilde{\psi}^0_\gamma(x,k,l) - \int\limits_D R^0_\gamma(x,y,k)V^0(y)e^{ily}\,dy, \tag{4.63}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}_{V^0,\gamma})$, $l \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2$, $\gamma \in S^{d-1}$.

Заменяя k, l, γ на $-k$, $-l$, $-\gamma$ в формуле (4.63) и используя формулы (4.46) и (4.47), мы получаем равенство

$$e^{-ilx}\mathrm{Id}_n = \widetilde{\psi}^0_{-\gamma}(x,-k,-l) - \int\limits_D e^{-ily}V^0(y)R^0_\gamma(y,x,k)\,dy, \tag{4.64}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, k, $l \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, $k^2 = l^2$, $k \notin \mathcal{E}_{V^0,\gamma}$, $\gamma \in S^{d-1}$.

Доказательство формулы (4.29) повторяет доказательство формулы (4.26), если вместо формулы (4.56) использовать формулу (4.64). Теорема 4.3 доказана.

4.4 Доказательство теоремы 4.4

Вспомогательные результаты

Пусть f — заданная функция на ∂D. Мы рассматриваем следующую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} L_{A,V}\psi \equiv -\Delta\psi - 2i\sum\limits_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + V(x)\psi = E\psi, \quad x \in D, \\ \psi|_{\partial D} = f. \end{cases} \tag{4.65}$$

Мы докажем следующую лемму.

Лемма 4.3. *Пусть $A_1, \ldots, A_d, V \in C^{0,\alpha}_{comp}(D, M_n(\mathbb{C}))$ при некотором $\alpha \in (0,1]$. Предположим, что E не является собственным значением Дирихле для операторов $L_{A,V}$ и $-\Delta$ в области D. Тогда:*

1. *Для любого $f \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, $0 < \beta < 1$, существует единственное решение ψ класса $C^2(D, M_n(\mathbb{C})) \cap C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ задачи (4.65).*

2. *ψ является единственным решением класса $C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ уравнения*

$$\psi(x) = \psi^0(x) + \int\limits_D \Gamma(x,y,E)\left(-2i\sum_{j=1}^{d} A_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + V(y)\right)\psi(y)\,dy, \tag{4.66}$$

где $\Gamma(x,y,E)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора $\Delta+E$ в области D, а ψ^0 — единственное решение класса $C^2(D,M_n(\mathbb{C}))\cap C^1(\overline{D},M_n(\mathbb{C}))$ задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta\psi^0+E\psi^0=0 \quad \text{в области } D, \\ \psi^0|_{\partial D}=f. \end{cases} \tag{4.67}$$

3. *Линейный оператор $S\colon C^{1,\beta}(\partial D,M_n(\mathbb{C}))\to C^1(\overline{D},M_n(\mathbb{C}))$, $S(f)=\psi$, является непрерывным.*

Для доказательства леммы 4.3 нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.4. *Пусть $A_1,\ \ldots,\ A_d,\ V\in C^{0,\alpha}_{comp}(D,M_n(\mathbb{C}))$ при некотором $\alpha\in(0,1]$. Предположим, что E не является собственным значением задачи Дирихле для оператора $L_{A,V}$ в области D. Тогда:*

1. *Для любого $\psi^0\in C^2(D,M_n(\mathbb{C}))\cap C^1(\overline{D},M_n(\mathbb{C}))$, удовлетворяющего уравнению $(\Delta+E)\psi^0=0$ в области D, существует единственное решение ψ класса $C^1(\overline{D},M_n(\mathbb{C}))$ уравнения (4.66).*
2. *ψ принадлежит $C^2(D,M_n(\mathbb{C}))$ и удовлетворяет (4.65) с $f=\psi^0|_{\partial D}$.*
3. *Существует константа $C>0$, не зависящая от ψ^0, такая что*

$$\|\psi\|_{C^1(\overline{D})}\le C\|\psi^0\|_{C^1(\overline{D})}. \tag{4.68}$$

Доказательство леммы 4.4. Шаг 1. Сведение к системе интегральных уравнений. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\psi_0(x)=\psi(x), && \psi_j(x)=\partial_{x_j}\psi(x),\\ &\psi^0_0(x)=\psi^0(x), && \psi^0_j(x)=\partial_{x_j}\psi^0(x),\\ &a_0(x)=V(x), && a_j(x)=-2iA_j(x),\\ &\Gamma_0(x,y,E)=\Gamma(x,y,E), && \Gamma_j(x,y,E)=\partial_{x_j}\Gamma(x,y,E), \end{aligned}$$

где $\partial_{x_j}=\partial/\partial x_j$. Дифференцируя уравнение (4.66), мы получаем следующую систему линейных интегральных уравнений на функции $\psi_j\in C(\overline{D})$:

$$\psi_j(x)=\psi^0_j(x)+\sum_{m=0}^{d}\int\limits_D\Gamma_j(x,y,E)a_m(y)\psi_m(y)\,dy,\quad j=0,\ldots,d. \tag{4.69}$$

Система (4.69) рассматривается как уравнение Фредгольма второго рода в пространстве $(C(\overline{D}, M_n(\mathbb{C})))^{d+1}$.

Предположим, что функции $\psi_j \in C(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$, $j = 0, \ldots, d$, удовлетворяют системе (4.69). Обозначим $\psi = \psi_0$. Из первого уравнения системы (4.69) следует, что $\psi \in C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$. Дифференцируя первое уравнение системы (4.69) по x_j, мы получаем, что $\partial_{x_j}\psi = \psi_j$, где $j = 1, \ldots, d$. Следовательно, ψ удовлетворяет (4.66).

Таким образом, решения ψ класса $C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ уравнения (4.66) находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями $\psi_j \in C(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$, $j = 0, \ldots, d$, системы (4.69).

Шаг 2. Гладкость решений уравнения (4.66). Из свойств фундаментального решения Γ следует, что всякое решение $\psi \in C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ задачи (4.66) принадлежит $C^{1,\gamma}_{\mathrm{loc}}(D, M_n(\mathbb{C}))$ (пространству непрерывно дифференцируемых $M_n(\mathbb{C})$-значных функций в области D с локально гёльдер-непрерывными производными) для любого $0 < \gamma < 1$.

Тем же способом, как доказывается лемма [33, Lemma 4.2, с. 55], можно показать, что $\psi \in C^2(D, M_n(\mathbb{C}))$ и что ψ удовлетворяет (4.65) с $f = \psi^0|_{\partial D}$.

Шаг 3. Существование и единственность. Как было отмечено на шаге 1 доказательства настоящей леммы, система уравнений (4.69) рассматривается как уравнение Фредгольма второго рода в пространстве $(C(\overline{D}, M_n(\mathbb{C})))^{d+1}$. В силу альтернативы Фредгольма для этого уравнения и в силу доказанного на шагах 1 и 2, разрешимость и единственность решения этого уравнения вытекают из требования, что E не является собственным значением задачи Дирихле для оператора $L_{A,V}$ в области D.

Из доказанного на шаге 1 следует, что единственное решение системы (4.69) соответствует единственному решению ψ класса $C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ уравнения (4.66). Из доказанного на шаге 2 следует, что $\psi \in C^2(D, M_n(\mathbb{C}))$ и что ψ удовлетворяет (4.65) с $f = \psi^0|_{\partial D}$.

Утверждение 3 следует из альтернативы Фредгольма для оператора из системы (4.69), рассматриваемого в пространстве $(C(\overline{D}, M_n(\mathbb{C})))^{d+1}$. $\square$

Лемма 4.5. *Предположим, что E не является собственным значением задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в области D. Тогда для любого $f \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, $0 < \beta < 1$, существует единственное решение ψ^0 класса $C^2(D, M_n(\mathbb{C})) \cap C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ задачи* (4.67)*. Более того, существует такая константа $C_\beta >$*

0*, не зависящая от* f*, что*

$$\|\psi^0\|_{C^1(\overline{D})} \le C_\beta \|f\|_{C^{1,\beta}(\partial D)}. \tag{4.70}$$

Доказательство леммы 4.5. Решение единственно в силу требования, что E не является собственным значением задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в области D. Чтобы доказать существование решения, мы можем свести задачу (4.65) к подходящему уравнению Фредгольма второго рода, как было сделано при доказательстве леммы 4.4.

Существование константы $C_\beta > 0$ такой, что выполнена оценка (4.70), следует из лемм [21, Lemma 2.16, Lemma 2.23]. □

Доказательство леммы 4.3. Единственность решения задачи (4.65) следует из того, что E не является собственным значением задачи Дирихле для оператора $L_{A,V}$ в D.

Обозначим через ψ^0 единственное решение задачи (4.67), существование которого доказано в лемме 4.5. Из леммы 4.4 следует существование решения задачи (4.65) с требуемыми свойствами.

Утвеждение 3 следует из формул (4.68) и (4.70). □

Компактность интегральных операторов

Перепишем уравнение (4.27) следующим образом:

$$\psi = \psi^0 + R^0(k)\big(\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E)\big)\psi, \tag{4.71}$$

где $R^0(k)$ — интегральный оператор с ядром (в смысле Шварца) $R^0(x, y, k)$, x, $y \in \partial D$. Мы считаем, что $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E}_{V^0})$ зафиксировано. Мы покажем, что оператор $R^0(k)\big(\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E)\big)$ является компактным в пространстве $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ для любого $\beta \in (0, 1)$. Аналогичным образом можно показать, что соответствующие интегральные операторы из формул (4.30) и (4.33) являются компактными.

Нам достаточно показать, что оператор $R^0(k)$ является непрерывным, а оператор $\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E)$ — компактным.

Начнём с непрерывности оператора $R^0(k)$. Из теорем [21, Theorem 2.12, Theorem 2.17] следует, что интегральный оператор с ядром (в смысле Шварца) $G(x - y, k)$, x, $y \in \partial D$, является непрерывным в $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$. Из формул (4.22) и (4.23) следует (если учесть, что носитель V^0 содержится в D), что производные $\partial_{x_i} r^0(x,y,k)$, $\partial_{x_i}\partial_{x_j} r^0(x,y,k)$, i, $j = 1, \ldots, d$, где $\partial x_k = \partial/\partial x_k$, существуют и непрерывны при x и y принадлежащих некоторой окрестности множества ∂D. Следовательно, оператор с ядром $e^{ik(x-y)} r^0(x,y,k)$, x, $y \in \partial D$, непрерывен в пространстве $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$. Отсюда и из формулы (4.21) следует, что $R^0(k)$ непрерывен в $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$.

Теперь покажем, что оператор $\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E)$ компактен в пространстве $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$. Пусть операторы S и S_{V^0} определяются, как в утверждении 3 леммы 4.3, с использованием коэффициентов A, V и $A^0 = 0$, V^0 в уравнении (4.66) соответственно. Из утвеждения 3 леммы 4.3 следует, что операторы S и S_{V^0} являются непрерывными операторами из пространства $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ в пространство $C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$.

Учитывая уравнение (4.66), мы получаем следующую формулу:

$$\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E) = NS - N_{V^0} S_{V^0}, \tag{4.72}$$

где N и N_{V^0} обозначают линейные непрерывные операторы, действующие из $C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ в $C^2(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ и определяемые следующим образом:

$$(N\psi)(x) = \int\limits_D \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x,y,E)\left(-2i\sum_{j=1}^{d} A_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + V(y)\right)\psi(y)\,dy,$$

$$(N_{V^0}\psi)(x) = \int\limits_D \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x,y,E) V^0(y)\psi(y)\,dy,$$

где Γ обозначает функцию Грина задачи Дирихле для оператора $\Delta + E$ в области D, а ν_x обозначает единичную внешнюю нормаль к ∂D в точке $x \in \partial D$. Учитывая компактность вложения $C^2(\partial D, M_n(\mathbb{C})) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, мы получаем, что операторы N и N_{V^0} компактно отображают $C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ в $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$. Из непрерывности операторов S и S_{V^0}, из компактности операторов N и N_{V^0} и из формулы (4.72) следует, что оператор $\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E)$ является компактным оператором в пространстве $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$.

Таким образом, мы показали, что оператор $R^0(k)\big(\Lambda(E) - \Lambda_{V^0}(E)\big)$ является компактным в пространстве $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$. Таким же способом показывается, что соответствующие интегральные операторы в уравнениях (4.30) и (4.33) являются компактными.

Однозначная разрешимость уравнений

Итак, мы показали что уравнения (4.27), (4.30) и (4.33) являются уравнениями Фредгольма второго рода в соответствующих пространствах. Теперь мы докажем утверждение об однозначной разрешимости уравнения (4.27). Доказательство утверждений об однозначной разрешимости уравнений (4.30) и (4.33) может быть проведено аналогичным способом.

Мы докажем следующую лемму.

Лемма 4.6. *Пусть $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E}_{V^0})$, $k^2 = E$, и $\beta \in (0,1)$ зафиксированы. Предположим, что выполнены условия теоремы 4.3. Тогда уравнение* (4.27) *однозначно разрешимо относительно $\psi \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ тогда и только тогда, когда уравнение* (4.53) *однозначно разрешимо относительно $\psi(x,k) = e^{ikx}\mu(x,k)$ с $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$.*

Заметим, что из леммы 4.6 вытекает утверждение об однозначной разрешимости уравнения (4.27), так как уравнение (4.53) при фиксированном $k \in \mathbb{C}^d \setminus (\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E}_{V^0})$ однозначно разрешимо относительно $\psi(x,k) = e^{ikx}\mu(x,k)$ с $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ тогда и только тогда, когда $k \notin \mathcal{E}$.

Перед тем как перейти к доказательству леммы 4.6, напомним, что функция $\psi^0(x,k)$ из формулы (4.27) определена как решение уравнения (3.15) с коэффициентами $A^0 = 0, V^0$, такое, что $\psi^0(x,k) = e^{ikx}\mu^0(x,k)$, где $\mu^0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$. Рассуждая как при доказательстве утверждений 1 и 2 леммы 4.4, можно показать, что функция $\psi^0(x,k)$ принадлежит $C^2(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ и удовлетворяет уравнению

$$-\Delta\psi^0 + V^0(x)\psi^0 = E\psi^0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.73}$$

Мы докажем лемму 4.6 в два шага.

Шаг 1. Продолжение решения уравнения (4.27) *до решения уравнения* (4.53). Обозначим через φ решение класса $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, $\beta \in (0,1)$, уравнения (4.27). Мы покажем, что φ соответсвует решение $\psi(x,k) = e^{ikx}\mu(x,k)$, $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$, уравнения (4.53).

Обозначим через $\varphi^+ \in C^2(D, M_n(\mathbb{C})) \cap C^1(\overline{D}, M_n(\mathbb{C}))$ единственное решение системы (4.65) с $f = \varphi$, существование которого утверждается в лемме 4.3. Определим φ^- формулой

$$\varphi^-(x) = \psi^0(x,k) + \int\limits_{\partial D} A(x,y,k)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus D. \tag{4.74}$$

Используя формулы (4.28) и (4.35), мы получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned}\int\limits_D R^0(x,y,k)\Big(-2i\sum_{j=1}^d A_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}+V(y)-V^0(y)\Big)\varphi^+(y)\,dy\\ =\int\limits_{\partial D} A(x,y,k)\varphi(y)\,dy,\end{aligned}\tag{4.75}$$

где $x\in\mathbb{R}^d\setminus\overline{D}$. Из формул (4.21) и (4.23) следует, что формула (4.75) справедлива при $x\in\mathbb{R}^d\setminus D$. Используя формулы (4.74) и (4.75), мы получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\varphi^-(x)=\psi^0(x,k)+\int\limits_D R^0(x,y,k)\times\\ \times\Big(-2i\sum_{j=1}^d A_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}+V(y)-V^0(y)\Big)\varphi^+(y)\,dy,\end{aligned}\tag{4.76}$$

где $x\in\mathbb{R}^d\setminus D$. Из формул (4.21), (4.22), (4.23) и (4.76) следует, что $\varphi^-\in C^1(\mathbb{R}^d\setminus D, M_n(\mathbb{C}))$.

Заметим, что справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned}\int\limits_D R^0(x,y,k)\Big(-2i\sum_{j=1}^d A_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}+V(y)-V^0(y)\Big)\varphi^+(y)\,dy\\ =\int\limits_D \delta_x(y)\varphi^+(y)\,dy+\int\limits_{\partial D}\Big(R^0(x,y,k)\frac{\partial\varphi^+(y)}{\partial\nu_y}-\frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x,y,k)\varphi(y)\Big)dy,\end{aligned}\tag{4.77}$$

где $x \notin \partial D$. Формула (4.77) вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_D R^0(x,y,k)\Big(-2i\sum_{j=1}^d A_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + V(y) - V^0(y)\Big)\varphi^+(y)\,dy \\
&\overset{(4.65)}{=\!=} \int\limits_D R^0(x,y,k)\big(\Delta_y + E - V^0(y)\big)\varphi^+(y)\,dy \\
&\overset{(4.40)}{=\!=} \int\limits_D \big(\Delta_y + E - V^0(y)\big)R^0(x,y,k)\varphi^+(y)\,dy \\
&+ \int\limits_{\partial D}\Big(R^0(x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y) - \frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x,y,k)\varphi(y)\Big)dy \\
&\overset{(4.60)}{=\!=} \int\limits_D \delta_x(y)\varphi^+(y)\,dy + \int\limits_{\partial D}\Big(R^0(x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y) - \frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x,y,k)\varphi(y)\Big)dy.
\end{aligned}$$

Используя формулы (4.76) и (4.77), мы получаем формулу

$$\varphi^-(x) = \psi^0(x,k) + \int\limits_{\partial D}\Big(R^0(x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y) - \frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x,y,k)\varphi(y)\Big)dy, \tag{4.78}$$

где $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{D}$.

Из формул (4.18), (4.21), (4.23) и из свойств потенциалов простого и двойного слоёв вытекают следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial D} R^0(x+0\nu_x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y)\,dy &= \int\limits_{\partial D} R^0(x-0\nu_x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y)\,dy, \\
\int\limits_{\partial D} \frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x+0\nu_x,y,k)\varphi(y)\,dy &= -\varphi(x) + \int\limits_{\partial D}\frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x-0\nu_x,y,k)\varphi(y)\,dy,
\end{aligned} \tag{4.79}$$

где ν_x обозначает единичную внешнюю нормаль к ∂D в точке $x \in \partial D$, а обозначение $x + 0\nu_x$ (соотв. $x - 0\nu_x$) подразумевает вычисление функции в точке $x + \varepsilon\nu_x$ (соотв. $x - \varepsilon\nu_x$), $\varepsilon > 0$, и переход к пределу при $\varepsilon \to +0$.

Также заметим, что из определения φ^+ и из формул (4.60), (4.77) следует соотношение

$$\begin{aligned}\big(\Delta_x - V^0(x) + E\big)\Bigg(\int\limits_{\partial D} R^0(x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y)\,dy \\ - \int\limits_{\partial D}\frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x,y,k)\varphi(y)\,dy\Bigg) = 0,\end{aligned} \tag{4.80}$$

где $x \in D$. Из формул (4.73) и (4.80) следует, что функция в правой части уравнения (4.78) лежит в ядре оператора $\Delta - V^0 + E$ в области D. Кроме того, из формул (4.78), (4.79) и из свойства $\varphi^-|_{\partial D} = \varphi$ следует, что

$$\psi^0(x,k) + \int\limits_{\partial D}\left(R^0(x-0\nu_x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y) - \frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x-0\nu_x,y,k)\varphi(y)\right)dy$$

$$\stackrel{(4.79)}{=\!=} \psi^0(x,k) + \int\limits_{\partial D}\left(R^0(x+0\nu_x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y) - \frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x+0\nu_x,y,k)\varphi(y)\right)dy - \varphi(x)$$

$$\stackrel{(4.78)}{=\!=} \varphi^-(x) - \varphi(x) = 0,$$

для всех $x \in \partial D$.

Следовательно, с учётом того, что E не является собственным значением задачи Дирихле для оператора L_{0,V^0} в области D, справедлива формула

$$\psi^0(x,k) + \int\limits_{\partial D}\left(R^0(x,y,k)\frac{\partial\varphi^+}{\partial\nu_y}(y) - \frac{\partial R^0}{\partial\nu_y}(x,y,k)\varphi(y)\right)dy = 0, \tag{4.81}$$

где $x \in D$. Определим

$$\psi(x) = \begin{cases}\varphi^-(x), & x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{D},\\ \varphi(x), & x \in \partial D,\\ \varphi^+(x), & x \in D.\end{cases} \tag{4.82}$$

Из формул (4.76), (4.77) и (4.81) следует, что ψ удовлетворяет (4.53) в $\mathbb{R}^d$.

Используя формулы (4.18), (4.21), (4.23) и (4.53), мы получаем, что $\psi \in C^1(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$.

Из формул (4.22) и (4.23) следует, что функции $r^0(x,y,k)$, $\partial_{x_j} r^0(x,y,k)$, $j = 1, \ldots, d$, равномерно ограничены при $y \in D$, $x \notin D$, $\operatorname{dist}(x, \partial D) > 1$. Отсюда, с учётом представления $\psi^0(x,k) = e^{ikx}\mu^0(x,k)$, $\mu^0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$, и формулы (4.53), мы получаем, что $\psi(x,k) = e^{ikx}\mu(x,k)$, где μ принадлежит

$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$.

Таким образом, мы показали, что если уравнение (4.27) имеет решение φ класса $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$, то уравнение (4.53) имеет решение вида $\psi(x,k) = e^{ikx}\mu(x,k)$, где $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ и $\psi|_{\partial D} = \varphi$. Кроме того, из свойства $\psi|_{\partial D} = \varphi$ следует, что разным решениям (4.27) соответствуют разные решения уравнения (4.53).

Шаг 2. Ограничение решения уравнения (4.53) *до решения уравнения* (4.27). Пусть $\psi(x,k) = e^{ikx}\mu(x,k)$, $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$, является решением уравнения (4.53). Из вложения $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C})) \subset C(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ следует, что $\varphi = \psi|_{\partial D}$ — непрерывная функция на ∂D. Повторяя доказательство теоремы 4.3, можно видеть, что φ удовлетворяет (4.27). Покажем, что $\varphi \in C^2(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$.

Из формулы (4.53) следует, что $\psi \in C^1(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$. Так как функции A_1, $\ldots$, A_d, V имеют компактные носители в области D, то из формул (4.21), (4.23), (4.22) и (4.53) следует, что $\psi \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus D, M_n(\mathbb{C}))$. Следовательно, φ принадлежит $C^2(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$.

Ясно, что если ψ' и ψ'' — два решения уравнения (4.53) такие, что $\psi'|_{\partial D} \neq \psi''|_{\partial D}$, то им соответствуют разные решения уравнения (4.27). С другой стороны, если $\psi'|_{\partial D} = \psi''|_{\partial D}$, то из обсуждения в конце шага 1 доказательства настоящей леммы следует, что $\psi' = \psi''$.

Мы показали, что решения φ класса $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ уравнения (4.27) находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями ψ уравнения (4.53) такими, что $\psi(x,k) = e^{ikx}\mu(x,k)$, $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$. Лемма 4.6 доказана.

5 Решение обратной задачи рассеяния

5.1 Нелинеаризованный алгоритм

Мы рассматриваем уравнение (3.9) в $\mathbb{R}^2$ при фиксированном $E > 0$. Мы предполагаем, что коэффициенты A_1, A_2, V являются скалярными функциями, достаточно быстро убывающими на бесконечности. Для уравнения (3.9) мы рассматриваем решения рассеяния $\psi^+(x, k)$, параметризованные вектором $k \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = E$, которые определяются асимптотикой (3.10) с заранее неизвестной функцией $f_{A,V}$, где $A = (A_1, A_2)$. Функция $f_{A,V}$ называется амплитудой рассеяния для уравнения (3.9). Амплитуда рассеяния $f_{A,V}$ определена на торе $\mathcal{M}_E$, который определяется в формуле (3.11). В этой главе мы решаем обратную задачу рассеяния 3.2, которая заключается в нахождении коэффициентов A и V по амплитуде рассеяния $f_{A,V}$.

Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ и

$$\varphi = O(|x|^{-3/2}), \quad |x| \to \infty. \tag{5.1}$$

Рассмотрим следующее преобразование коэффициентов A и V:

$$\begin{cases} A \to A^\varphi = A + \nabla\varphi, & (5.2\text{a}) \\ V \to V^\varphi = V - i\Delta\varphi + (\nabla\varphi)^2 + 2A\nabla\varphi, & (5.2\text{b}) \end{cases}$$

и преобразование функций ψ^+:

$$\psi^+ \to (\psi^+)^\varphi = e^{-i\varphi}\psi^+. \tag{5.3}$$

Из асимптотического представления (3.10) для функции ψ^+ и из формулы (5.1) следует, что функция $(\psi^+)^\varphi$ также обладает асимптотикой (3.10). Кроме того, прямой подстановкой проверяется, что справедливы следующие соотношения:

$$L_{A^\varphi,V^\varphi}(\psi^+)^\varphi = E(\psi^+)^\varphi, \quad L_{A^\varphi,V^\varphi} = e^{-i\varphi}L_{A,V}e^{i\varphi},$$

где операторы $L_{A,V}$ и L_{A^φ,V^φ} определяются по формуле (3.1), а $e^{\pm i\varphi}$ обозначают операторы умножения на функции $e^{\pm i\varphi}$. Следовательно, $f_{A^\varphi,V^\varphi} = f_{A,V}$ и задача нахождения A, V по $f_{A,V}$ имеет неединственное решение. Мы будем называть множество всех пар коэффициентов (A^φ, V^φ), где $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ и φ удовлетворяет (5.1), калибровочным классом пары коэффициентов (A, V). Для определённости мы будем решать задачу восстанавливления пары коэффициентов $(A^{\mathrm{div}}, V^{\mathrm{div}})$ из калибровочного класса пары коэффициентов (A, V), обладающую тем свойством, что $\operatorname{div} A^{\mathrm{div}} = 0$.

Сделаем одно замечание относительно физического смысла инвариантности амплитуды рассеяния $f_{A,V}$ по отношению к калибровочным преобразованиям (5.2a), (5.2b). Уравнение (3.9) при $n = 1$ описывает описывает взаимодействие заряженной частицы с электромагнитным полем. При этом ψ — волновая функция заряженной частицы, A — магнитный потенциал, а функция v, определённая в формуле (3.8), — электрический потенциал. Инвариантность уравнения (3.9) относительно калибровочных преобразований (5.2a), (5.2b) является отражением принципа относительности Вейля, согласно которому конфигурации ψ, A, V и ψ^{φ}, A^{φ}, V^{φ} описывают одну и ту же физическую ситуацию, см. [106]. Выбор из этого множества эквивалентных с физической точки зрения конфигураций конфигурации ψ^{div}, A^{div}, V^{div} с $\operatorname{div} A^{\mathrm{div}} = 0$ называется кулоновской калибровкой магнитного потенциала. Амплитуда рассеяния $f_{A,V}$ также имеет физическую интерпретацию. Величина $|f(k, E\vartheta)|^2$, $\vartheta \in S^1$, есть плотность вероятности обнаружить заряженную частицу в направлении ϑ после взаимодействия с электромагнитным полем, если до взаимодействия частица имела фиксированный импульс k (и если постоянная Планка $\hbar = 1$). Кроме того, величина $\partial/\partial|k| \arg f(k, l)$, называемая фазовым сдвигом, имеет смысл временной задержки, с которой заряженная частица проходит от источника до детектора, и связанной с взаимодействием частицы с электромагнитным полем.

Используемые обозначения

Нам потребуется ввести несколько обозначений. Пусть функция φ^{div} определяется как решение задачи

$$\begin{cases} \Delta\varphi^{\mathrm{div}}(x) = -A(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, & (5.4\mathrm{a}) \\ \varphi^{\mathrm{div}}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, & (5.4\mathrm{b}) \end{cases}$$

а функции $\varphi^{\pm}$ — как решения задач

$$\begin{cases} \partial_z \varphi^{-}(x) = -\dfrac{1}{2}(A_1(x) - iA_2(x)), \quad x \in \mathbb{R}^2, & (5.5\mathrm{a}) \\ \varphi^{-}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, & (5.5\mathrm{b}) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\partial_{\bar z}\varphi^+(x) = -\dfrac{1}{2}(A_1(x) + iA_2(x)), \quad x \in \mathbb{R}^2, & \text{(5.6a)}\\
\varphi^+(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, & \text{(5.6b)}
\end{cases}
$$

где ∂_z и $\partial_{\bar z}$ обозначают операторы Дольбо:

$$
\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \ \partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.7}
$$

Определим функции A^{div}, V^{div} и $A^{\pm}$, $V^{\pm}$ следующими формулами:

$$
A^{\mathrm{div}} = A + \nabla\varphi^{\mathrm{div}}, \quad V^{\mathrm{div}} = V - i\Delta\varphi^{\mathrm{div}} + (\nabla\varphi^{\mathrm{div}})^2 + 2A\nabla\varphi^{\mathrm{div}}, \tag{5.8a}
$$

$$
A^{\pm} = A + \nabla\varphi^{\pm}, \quad V^{\pm} = V - i\Delta\varphi^{\pm} + (\nabla\varphi^{\pm})^2 + 2A\nabla\varphi^{\pm}. \tag{5.8b}
$$

Заметим, что функции A^{div}, V^{div} и функции $A^{\pm}$, $V^{\pm}$ связаны с функциями A, V калибровочными преобразованиями вида (5.2a), (5.2b). В силу калибровочной инвариантности амплитуды рассеяния $f = f_{A,V}$, мы будем рассматривать задачу восстановления коэффициентов A^{div}, V^{div} и $A^{\pm}$, $V^{\pm}$ по f. В практических задачах часто доступна дополнительная информация, которая позволяет найти A, V по A^{div}, V^{div} или $A^{\pm}$, $V^{\pm}$, см. §3.2.

Нам также понадобятся следующие обозначения:

$$
z = x_1 + ix_2, \quad \bar z = x_1 - ix_2, \tag{5.9}
$$

$$
\lambda = E^{-1/2}(k_1 + ik_2), \quad \lambda' = E^{-1/2}(l_1 + il_2), \tag{5.10}
$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $k = (k_1, k_2) \in \Sigma_E$, $l = (l_1, l_2) \in \Sigma_E$,

$$
\Sigma_E = \big\{m = (m_1, m_2) \in \mathbb{C}^2 \colon m_1^2 + m_2^2 = E\big\}, \quad E > 0. \tag{5.11}
$$

В таких обозначениях

$$
k_1 = \frac{1}{2}E^{1/2}(\lambda + \lambda^{-1}), \quad k_2 = \frac{i}{2}E^{1/2}(\lambda^{-1} - \lambda), \tag{5.12a}
$$

$$
l_1 = \frac{1}{2}E^{1/2}(\lambda' + \lambda'^{-1}), \quad l_2 = \frac{i}{2}E^{1/2}(\lambda'^{-1} - \lambda'), \tag{5.12b}
$$

$$
\exp(ikx) = \exp\big(\tfrac{i}{2}E^{1/2}(\lambda\bar z + \lambda^{-1}z)\big),
$$

где λ, $\lambda' \in \mathbb{C} \setminus 0$, $z \in \mathbb{C}$, k, $l \in \Sigma_E$.

Из формул (3.11), (5.10), (5.11), (5.12a) и (5.12b) следует, что

$$\begin{gathered}\Sigma_E \cong \mathbb{C} \setminus 0,\\ \Sigma_E \cap \mathbb{R}^2 = S^1_{\sqrt{E}} \cong T,\\ \mathcal{M}_E \cong T \times T,\end{gathered} \tag{5.13}$$

где $S^1_r = \{m \in \mathbb{R}^2\colon |m| = r\}$ и $T = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| = 1\}$. С учётом введённых обозначений, функции ψ^+ и f из формулы (3.10) могут быть записаны как

$$\psi^+ = \psi^+(z, \lambda, E), \quad f = f(\lambda, \lambda', E), \tag{5.14}$$

где λ, $\lambda' \in T$, $z \in \mathbb{C}$, $E > 0$. Мы готовы к формулировке алгоритма приближённого решения задачи 3.2.

Алгоритм восстановления

Для приближённого нахождения коэффициентов A^{div}, V^{div} из формулы (5.8a) и коэффициентов $A^{\pm}$, $V^{\pm}$ из формулы (5.8b) на $\mathbb{R}^2$ по амплитуде рассеяния f из формулы (3.14) на $\mathcal{M}_E$ можно использовать следующую схему:

$$f \xrightarrow{1} h_{\pm} \xrightarrow{2} \mu^+ \xrightarrow{3} \mu_{\pm} \xrightarrow{4} A^{\pm}_{\mathrm{appr}}, V^{\pm}_{\mathrm{appr}} \xrightarrow{5} A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}, V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}} \tag{5.15}$$

Схема восстановления (5.15) состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Найти функции $h_{\pm}(\lambda, \lambda', E)$, λ, $\lambda' \in T$, из следующих линейных интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}h_{\pm}(\lambda, \lambda', E) - \pi i \int\limits_T h_{\pm}(\lambda, \lambda'', E) \chi\left(\pm i \left[\frac{\lambda}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda}\right]\right) \times\\ \times f(\lambda'', \lambda', E)\, |d\lambda''| = f(\lambda, \lambda', E),\end{gathered} \tag{5.16}$$

где $|d\lambda''|$ обозначает угловую меру на T, а χ определяется как

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0\\ 0, & s < 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Шаг 2. Разрешить следующее интегральное уравнение относительно $\mu^+(z, \lambda, E)$,

$z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in T$:

$$\mu^+(z,\lambda,E) + \int\limits_T B(\lambda,\lambda',z,E)\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'| = 1, \tag{5.18}$$

где функция B определяется формулой

$$\begin{aligned} B(\lambda,\lambda',z,E) = \frac{1}{2}\int\limits_T h_-(\zeta,\lambda',z,E)\chi\left(-i\left[\frac{\zeta}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\zeta}\right]\right)\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda(1-0)} - \\ -\frac{1}{2}\int\limits_T h_+(\zeta,\lambda',z,E)\chi\left(i\left[\frac{\zeta}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\zeta}\right]\right)\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda(1+0)}, \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{gathered} h_\pm(\lambda,\lambda',z,E) \stackrel{\text{def}}{=\!=} h_\pm(\lambda,\lambda',E)\times \\ \times\exp\left(-i\frac{\sqrt{E}}{2}\big((\lambda-\lambda')\bar z + (\lambda^{-1}-\lambda'^{-1})z\big)\right), \end{gathered} \tag{5.20}$$

и λ, $\lambda' \in T$, $z \in \mathbb{C}$.

Шаг 3. Определяем функции $\mu_\pm(z,\lambda,E)$, $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in T$, по формулам

$$\begin{gathered} \mu_\pm(z,\lambda,E) = \mu^+(z,\lambda,E) + \pi i\int\limits_T h_\pm(\lambda,\lambda',z,E)\times \\ \times\chi\left(\pm i\left[\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right)\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'|, \end{gathered} \tag{5.21}$$

где функции $h_\pm(\lambda,\lambda',z,E)$ определены формулой (5.16), а χ определяется формулой (5.17).

Шаг 4. Функции $A^-_{\mathrm{appr,j}}(x,E)$ и $V^-_{\mathrm{appr}}(x,E)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, находятся по формулам

$$\begin{gathered} A^-_{\mathrm{appr},1}(x,E) = \frac{i}{4}a^-_z(z,E), \quad A^-_{\mathrm{appr},2}(x,E) = \frac{1}{4}a^-_z(z,E), \\ a^-_z(z,E) = 4\partial_{\bar z}\ln\int\limits_T \mu_+(z,\zeta,E)\,|d\zeta|, \\ V^-_{\mathrm{appr}}(x,E) = \frac{\sqrt{E}}{\pi}\int\limits_T \partial_z\mu_-(z,\zeta,E)\,d\zeta; \end{gathered} \tag{5.22}$$

а функции $A^+_{\mathrm{appr,j}}(x,E)$ и $V^+_{\mathrm{appr}}(x,E)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, находятся по формулам

$$
\begin{gathered}
A^{+}_{\mathrm{appr},1}(x,E)=\frac{i}{4}a^{+}_{\bar z}(z,E),\quad A^{+}_{\mathrm{appr},2}(x,E)=-\frac{1}{4}a^{+}_{\bar z}(z,E),\\
a^{+}_{\bar z}(z,E)=-4\partial_z\ln\int\limits_T\mu_+(z,\zeta,E)\,|d\zeta|,\\
V^{+}_{\mathrm{appr}}(x,E)=2i\sqrt{E}\partial_{\bar z}\biggl(\int\limits_T\mu_+(z,\zeta,E)\frac{d\zeta}{\zeta^2}\biggm/\int\limits_T\mu_+(z,\zeta,E)\frac{d\zeta}{\zeta}\biggr),
\end{gathered}
\tag{5.23}
$$

где z определено в формуле (5.9).

Шаг 5. Функции $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr,j}}(x,E)$ и $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}(x,E)$, $x\in\mathbb{R}^2$, $j=1,\,2$, находятся по формулам

$$
\begin{gathered}
A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr},1}(x,E)=\frac{i}{8}(a^{-}_{z}(z,E)+a^{+}_{\bar z}(z,E)),\\
A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr},2}(x,E)=\frac{1}{8}(a^{-}_{z}(z,E)-a^{+}_{\bar z}(z,E)),\\
V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}(x,E)=\frac{1}{2}\bigl(V^{-}_{\mathrm{appr}}(x,E)+V^{+}_{\mathrm{appr}}(z,E)\bigr)-\frac{1}{8}a^{-}_{z}(z,E)a^{+}_{\bar z}(z,E),
\end{gathered}
\tag{5.24}
$$

где z определено в формуле (5.9), а функции a^{-}_{z}, $a^{+}_{\bar z}$, $V^{\pm}_{\mathrm{appr}}$ определены в формулах (5.22) и (5.23).

Мы выводим этот алгоритм в §5.3. Вывод этого алгоритма восстановления основан на нелокальной задаче Римана-Гильберта и на методе $\bar\partial$-уравнения. В случае $A=0$ этот алгоритм сводится к алгоритму приближённого нахождения V на $\mathbb{R}^2$ по амплитуде рассеяния f на $\mathcal{M}_E$ из работы [99]. Алгоритм из статьи [99] содержит вышеуказанные шаги 1, 2, 3 и формулу $V_{\mathrm{appr}}=V^{-}_{\mathrm{appr}}$, где V^{-}_{appr} определено в формуле (5.22). Касательно численной реализации алгоритма из работы [99], см. [90].

Предлагаемый алгоритм может рассматриваться как упрощенённая и усовершенствованная версия алгоритма, упоминающегося в [57, с. 457]. В частности, нахождение $\mu_\pm$ по $h_\pm$ в работе [57] осуществляется более сложным способом. Кроме того, алгоритм из работы [57] приводится для случая

$$
A_1=\overline{A}_1,\quad A_2=\overline{A}_2,\quad -2i\,\mathrm{div}\,\overline{A}+\overline{V}=V,
$$

то есть когда оператор $L_{A,V}$ является самосопряжённым. В приведённом нами алгоритме это требование не является обязательным.

Свойства алгоритма

В следующем утверждении мы приведём достаточные условия разрешимости уравнений (5.16) и (5.18). Нам потребуется ввести несколько обозначений. Пусть

$$\begin{gathered}\|u_1\|_{L^2(T)} = \left(\int_T |u_1(\lambda)|^2\,|d\lambda|\right)^{1/2}, \\ \|u_2\|_{L^2(T^2)} = \left(\int_{T^2} |u_2(\lambda,\lambda')|^2\,|d\lambda|\,|d\lambda'|\right)^{1/2}, \quad T^2 = T\times T,\end{gathered} \tag{5.25}$$

где u_1 и u_2 — измеримые функции на T и T^2 соответственно. Через $L^2(T)$ и $L^2(T^2)$ обозначим множества измеримых функций на T и T^2 с конечными нормами $\|\cdot\|_{L^2(T)}$ и $\|\cdot\|_{L^2(T^2)}$ соответственно.

Предложение 5.1. *Пусть $E>0$ и $z\in\mathbb{C}$ зафиксированы. Пусть*

$$\|f\|_{L^2(T^2)} < \frac{1}{6\pi}, \tag{5.26}$$

где $f=f(\lambda,\lambda',E)$. Тогда уравнения (5.16) *однозначно разрешимы относительно $h_\pm(\cdot,\cdot,E)\in L^2(T^2)$, а уравнение* (5.18) *однозначно разрешимо относительно $\mu^+(z,\cdot,E)\in L^2(T)$. Кроме того,*

$$\int\limits_T \mu_+(z,\lambda,E)\,|d\lambda| \neq 0 \quad \textit{для всех } z\in\mathbb{C}, \tag{5.27}$$

а функции $A^{div}_{appr,j}$, V^{div}_{appr} и $A^{\pm}_{appr,j}$, $V^{\pm}_{appr}$ ограничены на $\mathbb{R}^2$, $j=1,\,2$.

Отметим, что условие (5.26) является лишь достаточным для однозначной разрешимости уравнений (5.16) и (5.18), выполнения соотношения (5.27) и ограниченности функций $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr,j}}$, $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ и $A^{\pm}_{\mathrm{appr,j}}$, $V^{\pm}_{\mathrm{appr}}$, $j=1,\,2$.

Доказательство предложения 5.1. Из условия (5.26) следует однозначная разрешимость уравнений (5.16) относительно $h_\pm\in L^2(T^2)$. Кроме того, имеют место оценки

$$\begin{gathered}\|h_\pm\|_{L^2(T^2)} < \frac{\|f\|_{L^2(T^2)}}{1-\pi\|f\|_{L^2(T^2)}}, \\ \|B\|_{L^2(T^2)} < \frac{2\pi\|f\|_{L^2(T^2)}}{1-\pi\|f\|_{L^2(T^2)}},\end{gathered} \tag{5.28}$$

где B определено в формуле (5.19) (при фиксированных z и E).

Из формул (5.26) и (5.28) следует, что $\|B\|_{L^2(T^2)} < 1$. Следовательно, уравнение (5.18) однозначно разрешимо относительно $\mu^+ \in L^2(T)$ и справедливы оценки

$$\|\mu^+\|_{L^2(T)} < \frac{(2\pi)^{1/2}}{1-\|B\|_{L^2(T^2)}}, \quad \|\mu^+ - 1\|_{L^2(T)} < \frac{(2\pi)^{1/2}\|B\|_{L^2(T^2)}}{1-\|B\|_{L^2(T^2)}},$$
$$\|\mu_\pm - 1\|_{L^2(T)} < \frac{3\pi(2\pi)^{1/2}\|f\|_{L^2(T^2)}}{1-3\pi\|f\|_{L^2(T^2)}}, \tag{5.29}$$

где функции $\mu_\pm(z,\cdot,E)$ определяются в формуле (5.21).

Из оценок (5.26), (5.29) и формул (5.23), (5.24) следует соотношение (5.27) и ограниченность функций $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr,j}}$, $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ и $A^{\pm}_{\mathrm{appr,j}}$, $V^{\pm}_{\mathrm{appr}}$ на $\mathbb{R}^2$. $\square$

Теорема 5.1. *Пусть $f \in L^2(T^2)$ при фиксированном $E > 0$. Предположим, что f удовлетворяет (5.26) и $f \in C^\infty(T^2)$. Пусть A^{div}_{appr} и V^{div}_{appr} построены по функции f с помощью вышеуказанного алгоритма. Тогда $A^{div}_{appr,1}$, $A^{div}_{appr,2}$, V^{div}_{appr} ограничены на $\mathbb{R}^2$ и убывают на бесконечности. Кроме того, f является амплитудой рассеяния для уравнения (3.9) с $A = A^{div}_{appr}(x,E)$ и $V = V^{div}_{appr}(x,E)$.*

Заметим, что требование на гладкость функции f в теореме 5.1 является сильно завышенным. При этом требовании функции $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr,1}}$, $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr,2}}$ и $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ из теоремы 5.1 оказываются вещественно аналитическими функциями $x \in \mathbb{R}^2$. Кроме того, требование 5.26 также является завышенным.

Доказательство теоремы 5.1 аналогично доказательству [57, Theorem 9.2] в случае $A = 0$, и мы не будем его повторять.

5.2 Алгоритм в борновском приближении

Если коэффициенты A и V уравнения (3.9) малы, то исходя из интегральных уравнений (3.12) и (3.14), мы получаем следующие формулы борновского приближения:

$$\psi^+(x,k) \approx e^{ikx}, \quad \nabla\psi^+(x,k) \approx e^{ikx} ik,$$
$$f(k,l) \approx f^{\mathrm{lin}}(k,l), \tag{5.30}$$

$$f^{\mathrm{lin}}(k,l) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(k-l)x} \big(2kA(x) + V(x)\big)\, dx, \tag{5.31}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $(k,l) \in \mathcal{M}_E$. Заметим, что функция f^{lin} инвариантна по отношению к калибровочным преобразованиям

$$\begin{cases} A \to A + \nabla\varphi, & (5.32\text{a}) \\ V \to V - i\Delta\varphi, & (5.32\text{b}) \end{cases}$$

для любой достаточно регулярной функции φ на $\mathbb{R}^2$, быстро убывающей на бесконечности. Для доказательства этой инвариантности достаточно воспользоваться в определении (5.31) интегрированием по частям и соотношением $k^2 - l^2 = 0$. Мы рассматриваем преобразование (5.32a), (5.32b) как линеаризацию преобразования (5.2a), (5.2b) при малых A, V и φ.

В этом параграфе мы рассматриваем следующую линеаризованную обратную задачу рассеяния для уравнения (3.9).

Задача 5.1. *Пусть задана линеаризованная амплитуда рассеяния f^{lin} на $\mathcal{M}_E$ при фиксированном $E > 0$. Найти коэффициенты A и V на $\mathbb{R}^2$ (по модулю калибровочных преобразований* (5.32a), (5.32b)*).*

Заметим, что дополнительная информация о потенциалах A и V в задаче 5.1 позволяет избавиться от калибровочной неединственности. Например, для единственности достаточно потребовать вещественности A и V.

Также заметим, что задача 5.1 может рассматриваться как линеаризация задачи 3.2 при малых A и V.

Для изучения задачи 5.1 удобно ввести следующие обозначения. Определим функции $A^{\text{div},0}$ и $V^{\text{div},0}$ формулами

$$A^{\text{div},0}(x) = A(x) + \nabla\varphi^{\text{div}}(x), \tag{5.33a}$$

$$V^{\text{div},0}(x) = V(x) - i\Delta\varphi^{\text{div}}(x), \tag{5.33b}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, а φ^{div} определяется как решение задачи (5.4a), (5.4b). Функции $A^{\pm,0}$ и $V^{\pm,0}$ определяются формулами

$$A^{\pm,0}(x) = A(x) + \nabla\varphi^{\pm}(x), \tag{5.34a}$$

$$V^{\pm,0}(x) = V(x) - i\Delta\varphi^{\pm}(x), \tag{5.34b}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, а φ^- и φ^+ определяется как решения задач (5.5a), (5.5b) и (5.6a), (5.6b) соответственно. Заметим, что справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{div} A^{\mathrm{div},0}(x) = 0,$$
$$A_1^{\pm,0}(x) \pm i A_2^{\pm,0}(x) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $A^{\pm,0} = (A_1^{\pm,0}, A_2^{\pm,0})$.

Определение (5.31) может быть переписано в виде системы:

$$f^{\mathrm{lin}}(k,l) - f^{\mathrm{lin}}(-l,-k) = 2(k+l)\widehat{A}(k-l), \tag{5.35a}$$
$$f^{\mathrm{lin}}(k,l) + f^{\mathrm{lin}}(-l,-k) = 2(k-l)\widehat{A}(k-l) + 2\widehat{V}(k-l), \tag{5.35b}$$

где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$, а $\widehat{A}$ и $\widehat{V}$ обозначают обратные преобразования Фурье:

$$\widehat{A}(p) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ipx} A(x)\,dx, \quad \widehat{V}(p) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ipx} V(x)\,dx. \tag{5.36}$$

Также заметим, что

$$\begin{aligned} (k,l) \in \mathcal{M}_E &\implies k - l \in B_{2\sqrt{E}}, \\ p \in B_{2\sqrt{E}} &\implies p = k - l \ \ \textit{для некоторых}\ (k,l) \in \mathcal{M}_E, \end{aligned} \tag{5.37}$$

где используется обозначение

$$B_r = \{p \in \mathbb{R}^2 \colon |p| \le r\}, \quad r > 0. \tag{5.38}$$

Мы будем использовать норму $\|\cdot\|_{N,\sigma}$ и пространства $C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^2)$, определённые в формуле (2.13). Заметим, что если A_1, A_2, $V \in C^{0,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ при некотором $\sigma > 2$ и $\|A_1\|_{0,\sigma} \le q$, $\|A_2\|_{0,\sigma} \le q$, $\|V\|_{0,\sigma} \le q$, то справедливы оценки

$$\begin{gathered} \psi^+(x,k) = e^{ikx} + O(q), \quad \nabla\psi^+(x,k) = e^{ikx} ik + O(q), \\ f(k,l) = f^{\mathrm{lin}}(k,l) + O(q^2), \quad q \to +0, \end{gathered} \tag{5.39}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^2$ и $(k,l) \in \mathcal{M}_E$ при фиксированном $E > 0$.

Мы также будем использовать обозначение

$$\|A\|_{N,\sigma} = \max\bigl(\|A_1\|_{N,\sigma}, \|A_2\|_{N,\sigma}\bigr), \quad A = (A_1, A_2). \tag{5.40}$$

Теорема 5.2. *Пусть A_1, A_2, V вещественнозначны и пусть A_1, A_2, $V \in$*

$C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ при некоторых $N \geq 3$, $\sigma > 2$. Тогда справедливы следующие формулы решения задачи 5.1:

$$\widehat{A}(k-l) = \frac{f^{lin}(k,l) - \overline{f^{lin}(l,k)}}{2}\frac{k-l}{|k-l|^2} + \frac{f^{lin}(k,l) - f^{lin}(-l,-k)}{2}\frac{k+l}{|k+l|^2},$$
$$\widehat{V}(k-l) = \frac{\overline{f^{lin}(l,k)} + f^{lin}(-l,-k)}{2}, \tag{5.41}$$

где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$, а функции $\widehat{A}$ и $\widehat{V}$ определены в формуле (5.36)*;*

$$A(x) = A_{appr}(x,E) + A_{err}(x,E), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ E > 0,$$
$$A_{appr}(x,E) = \int\limits_{|p|\leq 2\sqrt{E}} e^{-ipx}\widehat{A}(p)\,dp, \quad A_{err}(x,E) = \int\limits_{|p|\geq 2\sqrt{E}} e^{-ipx}\widehat{A}(p)\,dp, \tag{5.42a}$$
$$V(x) = V_{appr}(x,E) + V_{err}(x,E), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ E > 0,$$
$$V_{appr}(x,E) = \int\limits_{|p|\leq 2\sqrt{E}} e^{-ipx}\widehat{V}(p)\,dp, \quad V_{err}(x,E) = \int\limits_{|p|\geq 2\sqrt{E}} e^{-ipx}\widehat{V}(p)\,dp, \tag{5.42b}$$

где $\widehat{A}(p)$ и $\widehat{V}(p)$ при $|p| \leq 2\sqrt{E}$ определяются по значениям f^{lin} на $\mathcal{M}_E$ в соответствии с формулами (5.37), (5.41)*, и справедливы оценки*

$$|A_{err,j}(x,E)| \leq c_1(N,\sigma)\|A_j\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}}, \tag{5.43a}$$
$$|V_{err}(x,E)| \leq c_1(N,\sigma)\|V\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}}, \tag{5.43b}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $j = 1,\ 2$, $A_{err} = (A_{err,1}, A_{err,2})$, $E \geq \frac{1}{4}$ и

$$c_1(N,\sigma) = \frac{4}{(N-2)(\sigma-2)}. \tag{5.44}$$

Теорема 5.3. *Предположим, что A_1, A_2, $V \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ при некоторых $N \geq 4$ и $\sigma > 2$. Пусть $A^{div,0}$ и $V^{div,0}$ определяются формулами* (5.33a) *и* (5.33b)*. Тогда справедливы следующие формулы решения задачи 5.1:*

$$\widehat{A}^{div,0}(k-l) = \frac{f^{lin}(k,l) - f^{lin}(-l,-k)}{2}\frac{k+l}{|k+l|^2},$$
$$\widehat{V}^{div,0}(k-l) = \frac{f^{lin}(k,l) + f^{lin}(-l,-k)}{2}, \tag{5.45}$$

где $(k,l)\in\mathcal{M}_E$, *а* $\widehat{A}^{div,0}$ *и* $\widehat{V}^{div,0}$ *обозначают обратные преобразования Фурье функций* $A^{div,0}$ *и* $V^{div,0}$ *(см. формулу* (5.36)*);*

$$
\begin{gathered}
A^{div,0}(x)=A^{div,0}_{appr}(x,E)+A^{div,0}_{err}(x,E),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ E>0,\\
A^{div,0}_{appr}(x,E)=\int\limits_{|p|\le 2\sqrt{E}}e^{-ipx}\widehat{A}^{div,0}(p)\,dp,\quad A^{div,0}_{err}(x,E)=\int\limits_{|p|\ge 2\sqrt{E}}e^{-ipx}\widehat{A}^{div,0}(p)\,dp,
\end{gathered}\tag{5.46a}
$$

$$
\begin{gathered}
V^{div,0}(x)=V^{div,0}_{appr}(x,E)+V^{div,0}_{err}(x,E),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ E>0,\\
V^{div,0}_{appr}(x,E)=\int\limits_{|p|\le 2\sqrt{E}}e^{-ipx}\widehat{V}^{div,0}(p)\,dp,\quad V^{div,0}_{err}(x,E)=\int\limits_{|p|\ge 2\sqrt{E}}e^{-ipx}\widehat{V}^{div,0}(p)\,dp,
\end{gathered}\tag{5.46b}
$$

где $\widehat{A}^{div,0}(p)$ *и* $\widehat{V}^{div,0}(p)$ *при* $|p|\le 2\sqrt{E}$ *находятся по значениям функции* f^{lin} *на* $\mathcal{M}_E$ *в соответствии с формулами* (5.37), (5.45), *и справедливы оценки*

$$
|A^{div,0}_{err,j}(x,E)|\le(1+\sqrt{2})c_1(N,\sigma)\|A\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}},\tag{5.47a}
$$

$$
|V^{div,0}_{err}(x,E)|\le c_1(N,\sigma)\left(\|V\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}}+\sqrt{2}\|A\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-3}{2}}\right),\tag{5.47b}
$$

где $x\in\mathbb{R}^2$, $j=1,\ 2$, $E\ge\frac{1}{4}$, $A^{div,0}_{err}=(A^{div,0}_{err,1},A^{div,0}_{err,2})$, *а* $c_1(N,\sigma)$ *определено в формуле* (5.44). *Кроме того, если* $\operatorname{div}A=0$, *то* $A^{div,0}=A$ *и* $V^{div,0}=V$.

Теорема 5.4. *Предположим, что* $A_1,\ A_2,\ V\in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ *при некоторых* $N\ge 4$ *и* $\sigma>2$. *Пусть функции* $A^{\pm,0}$ *и* $V^{\pm,0}$ *определяются формулами* (5.34a)–(5.34b). *Тогда справедливы следующие формулы решения задачи 5.1:*

$$
\begin{gathered}
\widehat{A}^{\pm,0}_1(k-l)=\frac{1}{2}\frac{f(k,l)-f(-l,-k)}{k_1+l_1\pm i(k_2+l_2)},\quad \widehat{A}^{\pm,0}_2(k-l)=\pm i\widehat{A}^{\pm,0}_1(k-l),\\
\widehat{V}^{\pm,0}(k-l)=\frac{(l_1\pm il_2)f(k,l)+(k_1\pm ik_2)f(-l,-k)}{k_1+l_1\pm i(k_2+l_2)},
\end{gathered}\tag{5.48}
$$

где $(k,l)\in\mathcal{M}_E$, *а* $\widehat{A}^{\pm,0}$ *и* $\widehat{V}^{\pm,0}$ *обозначают обратные преобразования Фурье функций* $A^{\pm,0}$ *и* $V^{\pm,0}$ *(см. формулу* (5.36)*);*

$$
\begin{gathered}
A^{\pm,0}(x)=A^{\pm,0}_{appr}(x,E)+A^{\pm,0}_{err}(x,E),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ E>0,\\
A^{\pm,0}_{appr}(x,E)=\int\limits_{|p|\le 2\sqrt{E}}e^{-ipx}\widehat{A}^{\pm,0}(p)\,dp,\quad A^{\pm,0}_{err}(x,E)=\int\limits_{|p|\ge 2\sqrt{E}}e^{-ipx}\widehat{A}^{\pm,0}(p)\,dp,
\end{gathered}\tag{5.49a}
$$

$$V^{\pm,0}(x) = V^{\pm,0}_{appr}(x,E) + V^{\pm,0}_{err}(x,E), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ E > 0,$$
$$V^{\pm,0}_{appr}(x,E) = \int\limits_{|p|\le 2\sqrt{E}} e^{-ipx}\widehat{V}^{\pm,0}(p)\,dp, \quad V^{\pm,0}_{err}(x,E) = \int\limits_{|p|\ge 2\sqrt{E}} e^{-ipx}\widehat{V}^{\pm,0}(p)\,dp, \tag{5.49b}$$

где $\widehat{A}^{\pm,0}(p)$ *и* $\widehat{V}^{\pm,0}(p)$ *при* $|p| \le 2\sqrt{E}$ *выражаются через значения функции* f^{lin} *на* $\mathcal{M}_E$ *в соответствии с формулами* (5.37), (5.48), *и верны оценки*

$$|A^{\pm,0}_{err,j}(x,E)| \le (1+\sqrt{2})c_1(N,\sigma)\|A\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}}, \tag{5.50a}$$
$$|V^{\pm,0}_{err}(x,E)| \le c_1(N,\sigma)\left(\|V\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}} + \sqrt{2}\|A\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-3}{2}}\right), \tag{5.50b}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $j = 1,\ 2$, $A^{\pm,0}_{err} = (A^{\pm,0}_{err,1}, A^{\pm,0}_{err,2})$, $\|A\|_{N,\sigma}$ *определяется в формуле* (5.40), *а* $c_1(N,\sigma)$ *— в формуле* (5.44). *Кроме того, если* $A_1 \pm iA_2 = 0$, *то* $A = A^{\pm,0}$, $V = V^{\pm,0}$.

Теоремы 5.2, 5.3 и 5.4 доказываются в §5.4.

В двух следующих предложениях мы покажем, что формулы решения линеаризованной обратной задачи рассеяния 5.1, приводимые в теоремах 5.3 и 5.4, могут быть также получены линеаризацией алгоритма из §5.1 в случае малости коэффициентов A и V. Пусть задана измеримая функция f на $\mathcal{M}_E$, $f = f(\lambda,\lambda',E)$, $(\lambda,\lambda') \in T^2$, при фиксированном E и пусть

$$\|f\|_{L^2(T^2)} \le \varepsilon, \tag{5.51}$$

где норма $\|\cdot\|_{L^2(T^2)}$ определяется в формуле (5.25).

Предложение 5.2. *Предположим, что функция f удовлетворяет* (5.51) *при фиксированном* $E > 0$. *Тогда при* $\varepsilon \to +0$ *алгоритм восстановления из §5.1 сводится к следующим формулам при фиксированном* $E > 0$:

$$\begin{aligned} A^{\pm}_{appr,j}(x,E) &= \mathscr{A}^{\pm}_{appr,j}(x,E) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1,2,\\ V^{\pm}_{appr}(x,E) &= \mathscr{V}^{\pm}_{appr}(x,E) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{5.52a}$$
$$\begin{aligned} A^{div}_{appr}(x,E) &= \mathscr{A}^{div}_{appr,j}(x,E) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1,2,\\ V^{div}_{appr}(x,E) &= \mathscr{V}^{div}_{appr}(x,E) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{5.52b}$$

где $O(\varepsilon^2)$ *рассматривается в равномерном смысле по переменной* $x \in \mathbb{R}^2$, *функ-*

ции $\mathscr{A}^-_{appr,j}$, $\mathscr{V}^-_{appr}$ *находятся по функции* f *из формул*

$$\mathscr{A}^-_{appr,1}(x,E) = -\frac{i}{4}\sqrt{E}\int\limits_{T^2} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{i}\left[\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right)(\lambda-\lambda')\tilde{f}\,|d\lambda|\,|d\lambda'|, \tag{5.53a}$$

$$\mathscr{A}^-_{appr,2}(x,E) = -i\mathscr{A}^-_{appr,1}(x,E), \tag{5.53b}$$

$$\mathscr{V}^-_{appr}(x,E) = i\frac{E}{2}\int\limits_{T^2}(1-\lambda\overline{\lambda}')\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{i}\left[\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right)\tilde{f}\,|d\lambda|\,|d\lambda'|, \tag{5.53c}$$

функции $\mathscr{A}^+_{appr,j}$ *и* $\mathscr{V}^+_{appr}$ — *из формул*

$$\mathscr{A}^+_{appr,1}(x,E) = \frac{i}{4}\sqrt{E}\int\limits_{T^2} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{i}\left[\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right)\overline{(\lambda-\lambda')}\tilde{f}\,|d\lambda|\,|d\lambda'|, \tag{5.54a}$$

$$\mathscr{A}^+_{appr,2}(x,E) = i\mathscr{A}^+_{appr,1}(x,E), \tag{5.54b}$$

$$\mathscr{V}^+_{appr}(x,E) = -i\frac{E}{2}\int\limits_{T^2}(1-\overline{\lambda}\lambda')\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{i}\left[\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right)\tilde{f}\,|d\lambda|\,|d\lambda'|, \tag{5.54c}$$

а функции $\mathscr{A}^{div}_{appr,j}$ *и* $\mathscr{V}^{div}_{appr}$ — *из формул*

$$\mathscr{A}^{div}_{appr,j}(x,E) = \frac{1}{2}\big(\mathscr{A}^+_{appr,j}(x,E) + \mathscr{A}^-_{appr,j}(x,E)\big), \quad j=1,2, \tag{5.55a}$$

$$\mathscr{V}^{div}_{appr}(x,E) = \frac{E}{2}\int\limits_{T^2}\left|\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right|\tilde{f}\,|d\lambda|\,|d\lambda'|, \tag{5.55b}$$

где используется обозначение

$$\tilde{f} = f(\lambda,\lambda',E)\exp\left(-i\frac{\sqrt{E}}{2}\big((\lambda-\lambda')\bar{z} + (\lambda^{-1}-\lambda'^{-1})z\big)\right),$$

$\lambda \in T$, $\lambda' \in T$, *а* z *и* $\bar{z}$ *определяются в формуле* (5.9).

Предложение 5.3. *Предположим, что* A_1, A_2, $V \in C^{2,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ *при котором* $\sigma > 2$. *Пусть* f^{lin} *определено по формуле* (5.31) *и пусть функции* $A^{div,0}_{appr,j}$, $V^{div,0}_{appr}$, $A^{\pm,0}_{appr,j}$, $V^{\pm,0}_{appr}$, $j = 1$, 2, *определены с использованием функции* f^{lin} *по формулам* (5.45), (5.46a), (5.46b), (5.48), (5.49a), (5.49b). *Также предположим, что функции* $\mathscr{A}^{div}_{appr,j}$, $\mathscr{V}^{div}_{appr}$, $\mathscr{A}^{\pm}_{appr,j}$, $\mathscr{V}^{\pm}_{appr}$, $j = 1$, 2, *определены с использованием функции* $f = f^{lin}$ *по формулам* (5.53a)–(5.55b). *Тогда справедливы следующие равенства:*

$$\begin{aligned} A^{div,0}_{appr,j}(x,E) &= \mathscr{A}^{div}_{appr,j}(x,E), \\ V^{div,0}_{appr}(x,E) &= \mathscr{V}^{div}_{appr}(x,E), \end{aligned} \tag{5.56a}$$

$$\begin{aligned} A^{\pm,0}_{appr,j}(x,E) &= \mathscr{A}^{\pm}_{appr,j}(x,E), \\ V^{\pm,0}_{appr}(x,E) &= \mathscr{V}^{\pm}_{appr}(x,E), \end{aligned} \tag{5.56b}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $j = 1,\ 2$, $E > 0$.

Предложения 5.2 и 5.3 доказываются в §5.5.

5.3 Вывод нелинеаризованного алгоритма

Вспомогательные утверждения

Для вывода алгоритма из §5.1 нам понадобятся функции ψ и h из формул (3.15), (3.17), а также функции G и g из формулы (3.16).

Заметим, что функции $\psi(\cdot, k)$ являются «растущими решениями» уравнения (3.9) в терминах работы [107], параметризованными векторами $k \in \Sigma_E \setminus \mathbb{R}^2$, где Σ_E определено в формуле (5.11). Кроме того, функция G называется в литературе функцией Грина–Фаддеева для оператора $\Delta + k^2$. Впервые эта функция была определена в работе [107].

Уравнение (3.15) для ψ и формула (3.17) для h являются обобщениями на случай комплексного k уравнения (3.12) для ψ^+ и формулы (3.14) для f.

Заметим, что

$$k, l \in \Sigma_E \setminus \mathbb{R}^2,\ \operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l \implies l = k \text{ или } l = -\overline{k}. \tag{5.57}$$

Следовательно, функция h из формулы (3.17) может быть задана посредством двух функций

$$a(k) = h(k,k), \quad b(k) = h(k, -\overline{k}), \quad k \in \Sigma_E \setminus \mathbb{R}^2. \tag{5.58}$$

Также заметим, что при калибровочных преобразованиях (5.2a), (5.2b) функции a и b не изменяются, а функции ψ и $\mu = e^{-ikx}\psi$ преобразуются по правилу

$$\psi \to e^{-i\varphi}\psi, \quad \mu \to e^{-i\varphi}\mu. \tag{5.59}$$

Мы будем использовать обозначения (5.9) и (5.10). В соответствии с этими обозначениями, функции ψ^+ и f могут быть записаны в виде (5.14), а коэффициенты A_1, A_2, V уравнения (3.9) и функции ψ, $\mu = e^{-ikx}\psi$, b из формул (3.15) и (5.58) — в виде

$$\begin{gathered} A_1 = A_1(z), \quad A_2 = A_2(z), \quad V = V(z), \\ \psi = \psi(z,\lambda,E),\ \mu = \mu(z,\lambda,E),\ b = b(\lambda,E),\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0), \end{gathered} \tag{5.60}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $E > 0$.

Мы перечислим свойства, которыми обладает функция ψ (или $\mu = e^{-ikx}\psi$) при фиксированных $z \in \mathbb{C}$ и $E > 0$ (см. [57, с. 448]), которые понадобятся нам в дальнейшем. Функция μ удовлетворяет следующему $\bar{\partial}$-уравнению:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}\mu(z,\lambda,E) = r(\lambda,z,E)\mu\bigl(z,-\frac{1}{\overline{\lambda}},E\bigr), \\ r(\lambda,z,E) = \exp\biggl(-i\frac{\sqrt{E}}{2}\bigl(\lambda\overline{z} + \frac{z}{\lambda} + \overline{\lambda}z + \frac{\overline{z}}{\overline{\lambda}}\bigr)\biggr)\times \\ \times\frac{\pi}{\overline{\lambda}}\operatorname{sgn}\bigl(\lambda\overline{\lambda} - 1\bigr)b(\lambda,E). \end{gathered} \tag{5.61}$$

где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$. Функция μ имеет пределы при $\lambda \to \infty$ и $\lambda \to 0$:

$$\begin{aligned} \mu(z,\lambda,E) &= \mu_0^-(z) + o(1), \quad \lambda \to \infty, \\ \mu(z,\lambda,E) &= \mu_0^+(z) + o(1), \quad \lambda \to 0, \end{aligned} \tag{5.62}$$

где функции $\mu_0^\pm(z)$ являются решениями следующих задач:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} \pm i\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)\mu_0^\pm(z) = -i\bigl(A_1(z) \pm iA_2(z)\bigr)\mu_0^\pm(z), \quad z \in \mathbb{C}, & \text{(5.63a)} \\ \mu_0^\pm(z) \to 1, \quad z \to \infty. & \text{(5.63b)} \end{cases}$$

Обозначим через $\psi_\pm$ и $\mu_\pm$ скачки функций ψ и μ на единичной окружности:

$$\begin{aligned} \psi_\pm(z,\lambda,E) &= \psi(z,\lambda(1 \mp 0),E), \\ \mu_\pm(z,\lambda,E) &= \mu(z,\lambda(1 \mp 0),E), \end{aligned} \tag{5.64}$$

где $\lambda \in T$. Справедлива следующая формула:

$$\begin{gathered}\psi_\pm(z,\lambda,E) = \psi^+(z,\lambda,E) + \pi i \int\limits_T h_\pm(\lambda,\lambda'',E)\chi\left(\pm i\left[\frac{\lambda}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda}\right]\right) \times \\ \times \psi^+(z,\lambda'',E)\,|d\lambda''|\end{gathered} \tag{5.65}$$

где $\lambda \in T$, ψ^+ — решение уравнения (3.9), определяемое асимптотикой (3.10), функции $h_\pm$ определяются как решения уравнения (5.16), а χ задаётся формулой (5.17).

Более точно, справедливы следующие утверждения. Пусть $\mathcal{E}$ определено в формуле (4.3), $\mathcal{E}_+$ и $\mathcal{E}_-$ — в формуле (4.4) при $\gamma = 1$ и $\gamma = -1$ соответственно, и пусть k_1, k_2 определяются в соотвествии с формулой (5.12a).

1. Пусть $k = \big(k_1(\lambda,E), k_2(\lambda,E)\big) \notin \mathcal{E}$ при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$. Тогда справедливо (5.61).

2. Пусть $k = \big(k_1(\lambda(1 \mp 0),E), k_2(\lambda(1 \mp 0),E)\big) \notin \mathcal{E}_\mp$ при фиксированном $\lambda \in T$. Тогда справедливо (5.65).

В частности, эти условия выполнены, если коэффициенты A_1, A_2 и V уравнения (3.9) малы при фиксированном E.

Восстановление A и V по f и b

Используя определения (5.5a)–(5.5b), (5.6a)–(5.6b) и (5.8b) функций φ^-, φ^+ и $A^\pm$, $V^\pm$, учитывая инвариантность функций f и b по отношению к калибровочным пробразованиям (5.2a), (5.2b), а также формулы (5.3) и (5.59), можно видеть, что

При переходе от коэффициентов A, V к A^+, V^+ (соотв. A^-, V^-) в уравнении (3.9) *функция μ_0^+ (соотв. μ_0^-) из формулы* (5.62) *обращается в тождественную единицу.* (5.66)

Из свойств (5.61)–(5.66) функций μ и ψ вытекает следующий подход к решению обратной задачи рассеяния 3.2 по функциям f и b. Пусть операторы ∂_z и $\partial_{\bar z}$ определены по формуле (5.7).

Шаг 1. Найти функции μ и ψ, удовлетворяющие (5.61)–(5.62) и (5.64)–(5.65) с заранее неизвестной функцией ψ^+ в уравнении (5.65), считая, что $\mu_0^- \equiv 1$ и $\mu(z,\cdot,E) \in C(\mathbb{C} \setminus T)$.

Шаг 2. Найти A^- и V^- по формулам

$$A_1^-(z) - iA_2^-(z) = 0, \quad A_1^-(z) + iA_2^-(z) = 2i\partial_{\bar z} \ln \mu_0^+(z), \tag{5.67a}$$

$$\begin{gathered} V^-(z)\psi(z,\lambda,E) = \big(4\partial_z\partial_{\bar z} + \\ +2i\big(A_1^-(z) + iA_2^-(z)\big)\partial_z + E\big)\psi(z,\lambda,E), \end{gathered} \tag{5.67b}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$.

Эквивалентным является следующий алгоритм.

Шаг 1'. Найти функции μ и ψ, удовлетворяющие (5.61)–(5.62) и (5.64)–(5.65) с заранее неизвестной функцией ψ^+ в уравнении (5.65), считая, что $\mu_0^+ \equiv 1$ и $\mu(z,\cdot,E) \in C(\mathbb{C} \cup \infty \setminus T)$.

Шаг 2'. Найти A^+ и V^+ по формулам

$$A_1^+(z) - iA_2^+(z) = 2i\partial_z \ln \mu_0^-(z), \quad A_1^+(z) + iA_2^+(z) = 0, \tag{5.68a}$$

$$\begin{gathered} V^+(z)\psi(z,\lambda,E) = \big(4\partial_z\partial_{\bar z} + \\ +2i\big(A_1^+(z) - iA_2^+(z)\big)\partial_{\bar z} + E\big)\psi(z,\lambda,E), \end{gathered} \tag{5.68b}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$.

Заметим, что формула (5.67a) следует из формул (5.63a), (5.63b) при $\mu_0^- \equiv 1$, а формула (5.68a) следует из формул (5.63a), (5.63b) при $\mu_0^+ \equiv 1$. Формула (5.67b) (соотв. (5.68b)) следует из уравнения (3.9), записанного для функции ψ, соответствующей коэффициентам A^-, V^- (соотв. A^+, V^+). Также заметим, что функции ψ, μ, μ_0^+, определённые на шагах 1 и 2, и функции $\psi = \psi'$, $\mu = \mu'$, μ_0^-, определённые на шагах 1', 2', связаны формулами

$$\begin{gathered} \psi'(z,\lambda,E) = \big(\mu_0^+(z)\big)^{-1}\psi(z,\lambda,E), \\ \mu'(z,\lambda,E) = \big(\mu_0^+(z)\big)^{-1}\mu(z,\lambda,E), \quad \mu_0^-(z) = \big(\mu_0^+(z)\big)^{-1}, \end{gathered} \tag{5.69}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$.

Восстановив функции A^-, V^- или A^+, V^+, мы можем перейти к другим калибровкам посредством формул (5.2a), (5.2b). В частности, мы можем найти функции A^{div} и V^{div} из формулы (5.8a).

Заметим, что различные идеи из указанного подхода к обратной задаче рассеяния восходят к работам [53, 1, 29, 94, 93, 57, 99]. В частности, нахождение функций ψ и μ на вышеуказанных шагах 1 или 1' в случае $b = 0$ при фиксированном E сводится к решению нелокальной задачи Римана–Гильберта для голоморфных функций. Изучение таких нелокальных задач Римана–Гильберта восходит к работам [53, 29]; см. также [81, 29, 94, 93, 57, 99].

Восстановление A и V по функции f при $b = 0$

В случае малости коэффициентов A и V уравнения (3.9) справедливы следующие формулы борновского приближения при фиксированном $E > 0$:

$$f(k,l) \approx f^{\mathrm{lin}}(k,l) = 2k\widehat{A}(k-l) + \widehat{V}(k-l), \quad (k,l) \in \mathcal{M}_E, \tag{5.70a}$$

$$b(k) \approx b^{\mathrm{lin}}(k) = 2k\widehat{A}(2\operatorname{Re} k) + \widehat{V}(2\operatorname{Re} k), \quad k \in \Sigma_E \setminus \mathbb{R}^2, \tag{5.70b}$$

где $\widehat{A}$ и $\widehat{V}$ определены в формуле (5.36). Формула (5.70a) эквивалентна формулам (5.30), (5.31), а формула (5.70b) следует из определений (3.15), (3.17) и (5.58). Заметим, что

$$k \in \Sigma_E \setminus \mathbb{R}^2 \implies 2\operatorname{Re} k \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{2\sqrt{E}}, \quad E > 0, \tag{5.71}$$

где B_r определяется в формуле (5.38).

Из формул (5.37), (5.70a), (5.70b) и (5.71) видно, что функция f^{lin} при фиксированном E определяется по значениям $\widehat{A}$ и $\widehat{V}$ в шаре $B_{2\sqrt{E}}$, а функция b^{lin} — по значениям $\widehat{A}$ и $\widehat{V}$ в дополнении к этому шару. Кроме того, как видно из формул (5.45)–(5.46b) и (5.48)–(5.49b), функции $A^{\pm,0}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\pm,0}_{\mathrm{appr}}$ и $A^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}$ определяются значениями функции f^{lin} и не зависят от значений функции b^{lin} при фиксированном E.

Функции $A^{\pm}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\pm}_{\mathrm{appr}}$ и $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ из алгоритма в §5.1 могут рассматриваться как нелинеаризованные аналоги функций $A^{\pm,0}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\pm,0}_{\mathrm{appr}}$ и $A^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}$. Функции $A^{\pm}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\pm}_{\mathrm{appr}}$ и $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ получаются в результате применения алгоритмов восстановления A и V по f и b, приведённых выше в §5.3, в случае, когда на шаге 1 (соотв. на шаге 1') полагается $b = 0$. При этом шаг 1 и шаг 1' этих алгоритмов восстановления принимают следующий вид.

Шаг 1. Найти функцию $\psi = \exp\bigl((i/2)\sqrt{E}(\lambda\bar{z} + z/\lambda)\bigr)\mu(z,\lambda,E)$, $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$, удовлетворяющую (5.64), (5.65) с заранее неизвестной функцией

ψ^+, и такую, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}\mu(z,\lambda,E)=0,\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus(T\cup 0),\\ \mu(z,\lambda,E)\to 1,\quad \lambda\to\infty,\\ \mu(z,\cdot,E)\in C(\mathbb{C}\setminus T).\end{gathered}\tag{5.72}$$

Шаг 1'. Найти функцию $\psi=\exp\big((i/2)\sqrt{E}(\lambda\overline{z}+z/\lambda)\big)\mu(z,\lambda,E)$, $z\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(T\cup 0)$, удовлетворяющую (5.64), (5.65) с заранее неизвестной функцией ψ^+, и такую, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}\mu(z,\lambda,E)=0,\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus(T\cup 0),\\ \mu(z,\lambda,E)\to 1,\quad \lambda\to 0,\\ \mu(z,\cdot,E)\in C(\mathbb{C}\cup\infty\setminus T).\end{gathered}\tag{5.73}$$

Напомним, что функции $h_\pm$ из формулы (5.65) связаны с функцией f посредством интегрального уравнения (5.16). Также подчеркнём, что в требовании (5.64) подразумевается, что функция $\mu(z,\cdot,E)$ допускает продолжение по непрерывности на окружность T с каждой стороны.

В силу рассмотрений из работы [99, Раздел 2], нахождение функции μ на шаге 1 сводится к следующей последовательности действий:

(a) Решить уравнение (5.18) относительно $\mu^+(z,\cdot,E)$ на T.

(b) Найти функцию $\mu_\pm(z,\cdot,E)$ на T с помощью формулы (5.21) (то есть с помощью формулы (5.65), переписанной в терминах $\mu_\pm$ и μ^+).

(c) Найти функцию $\mu(z,\cdot,E)$ в $\mathbb{C}\setminus T$ с помощью формул типа Коши:

$$\begin{gathered}\mu(z,\lambda,E)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\mu_+(z,\zeta,E)}{\zeta-\lambda}d\zeta,\quad |\lambda|<1,\\ \mu(z,\lambda,E)=1-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{\mu_-(z,\zeta,E)}{\zeta-\lambda}d\zeta,\quad |\lambda|>1,\end{gathered}\tag{5.74}$$

$z\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus T$.

Заметим, что из формулы (5.74) следуют представления

$$\begin{aligned} &\mu(z,\lambda,E) = 1 + \mu_1^-(z)\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \to \infty, \\ &\mu(z,\lambda,E) = \mu_0^+(z) + \mu_1^+(z)\lambda + O(\lambda^2), \quad \lambda \to 0, \end{aligned} \tag{5.75}$$

где $z \in \mathbb{C}$, а μ_0^+ и $\mu_1^\pm$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \mu_0^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\mu_+(z,\zeta,E)}{\zeta}d\zeta \\ \mu_1^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\mu_+(z,\zeta,E)}{\zeta^2}d\zeta, \\ \mu_1^-(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \mu_-(z,\zeta,E)\,d\zeta. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Теперь заметим, что в силу формул (5.69) и (5.76), нахождение функций $\psi = \psi'$ и $\mu = \mu'$ из шага 1' сводится к нахождению функций ψ и μ из шага 1.

Сделаем одно замечание, касающегося задачи Римана–Гильберта, сформулированной на шагах 1 и 1' выше. В литературе эта задача часто формулируется другим, но эквивалентным образом. Заметим, что из равенства (5.65), записанного для ψ_+ и ψ_-, можно исключить функцию ψ^+, получив явное соотношение

$$\psi_+(\lambda) = \psi_-(\lambda) + \int\limits_T \rho(\lambda,\lambda')\psi_-(\lambda')\,|d\lambda'|, \quad \lambda \in T. \tag{5.77}$$

При этом функция ρ выражается через функции $h_\pm$ из формул (5.16), (5.65) посредством следующих формул и уравнений:

$$\begin{aligned} h_1(\lambda,\lambda',E) &= \chi\left(i\left[\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'}\right]\right)h_+(\lambda,\lambda',E) - \\ &\qquad - \chi\left(-i\left[\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'}\right]\right)h_-(\lambda,\lambda',E), \\ h_2(\lambda,\lambda',E) &= \chi\left(i\left[\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'}\right]\right)h_-(\lambda,\lambda',E) - \\ &\qquad - \chi\left(-i\left[\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'}\right]\right)h_+(\lambda,\lambda',E), \\ \rho(\lambda,\lambda',E) &+ \pi i\int\limits_T \rho(\lambda,\lambda'',E)\chi\left(-i\left[\frac{\lambda'}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda'}\right]\right)\times \end{aligned}$$

$$\times h_1(\lambda'', \lambda', E)\,|d\lambda''| = -\pi i h_1(\lambda, \lambda', E),$$

$$\rho(\lambda, \lambda', E) + \pi i \int\limits_T \chi\Big(i\left[\frac{\lambda'}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda'}\right]\Big)\times$$

$$\times h_2(\lambda'', \lambda', E)\,|d\lambda''| = -\pi i h_2(\lambda, \lambda', E),$$

где λ, $\lambda' \in T$, см. [57]. Уравнение (5.77) можно использовать вместо пары уравнений (5.65). Задача Римана–Гильберта в таком виде формулируется, например, в работах [53, 94, 93, 57].

Теперь заметим, что в силу результатов из работ [94, 57] и в силу предложения 5.1, выполнение оценки (5.26) гарантирует однозначную разрешимость нелокальных задач Римана–Гильберта, сформулированных на шагах 1 и 1', относительно ψ и ψ' соответственно. При этом справедливы формулы

$$\begin{gathered}\big(-4\partial_z\partial_{\bar z} + a_z^-(z)\partial_z + V^-(z)\big)\psi(z, \lambda, E) = E\psi(z, \lambda, E),\\ a_z^-(z) = 4\partial_{\bar z}\ln\mu_0^+(z), \quad V^-(z) = 2i\sqrt{E}\partial_z\mu_1^-(z),\end{gathered} \tag{5.78a}$$

$$\begin{gathered}\big(-4\partial_z\partial_{\bar z} + a_{\bar z}^+(z)\partial_{\bar z} + V^+(z)\big)\psi'(z, \lambda, E) = E\psi'(z, \lambda, E),\\ a_{\bar z}^+(z) = -4\partial_z\ln\mu_0^+(z), \quad V^+(z) = 2i\sqrt{E}\partial_{\bar z}\frac{\mu_1^+(z)}{\mu_0^+(z)},\end{gathered} \tag{5.78b}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$, а μ_0^+ и $\mu_1^\pm$ определены по формуле (5.76). Формула (5.78a) соответствует равенствам (5.67a)–(5.67b), а формула (5.78b) — равенствам (5.68a)–(5.68b).

Формулы (5.22) и (5.23) следуют из формул (5.76) и (5.78a)–(5.78b).

Наконец, формула (5.24) получается в результате рассмотрения калибровочных преобразований (5.2a), (5.2b), переводящих коэффициенты A^-, V^- и A^+, V^+ в коэффициенты A^{div}, V^{div}. Отметим, в частности, что для этих рассмотрений удобно переписать уравнение (3.9) в следующем виде:

$$\begin{gathered}\big(-4\partial_z\partial_{\bar z} + a_z\partial_z + a_{\bar z}\partial_{\bar z} + V\big)\psi = E\psi,\\ a_z = -2i(A_1 + iA_2), \quad a_{\bar z} = -2i(A_1 - iA_2).\end{gathered} \tag{5.79}$$

В таких обозначениях калибровочные преобразования (5.2a), (5.2b) принимают следующую форму:

$$\begin{cases} a_z \to a_z - 4i\partial_{\bar z}\varphi, \\ a_{\bar z} \to a_{\bar z} - 4i\partial_z\varphi, \\ V \to V - 4i\partial_z\partial_{\bar z}\varphi + 4\partial_z\varphi\partial_{\bar z}\varphi + ia_z\partial_z\varphi + ia_{\bar z}\partial_{\bar z}\varphi, \end{cases}$$

а задачи (5.4a)–(5.4b), (5.5a)–(5.5b) и (5.6a)–(5.6b) для функций φ^{div}, φ^- и φ^+ переписываются в виде

$$\begin{gathered} 8i\partial_z\partial_{\bar z}\varphi^{\mathrm{div}} = \partial_z a_z + \partial_{\bar z}a_{\bar z}, \quad \varphi^{\mathrm{div}}(z) \to 0,\ |z| \to \infty, \\ 4i\partial_z\varphi^- = a_{\bar z}, \quad \varphi^-(z) \to 0,\ |z| \to \infty, \\ 4i\partial_{\bar z}\varphi^+ = a_z, \quad \varphi^+(z) \to 0,\ |z| \to \infty. \end{gathered}$$

5.4 Доказательство теорем 5.2, 5.3 и 5.4

Мы будем использовать обозначения

$$\widehat{u}(p) = (2\pi)^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ipx}u(x)\,dx, \quad u_{\mathrm{err}}(x,E) = \int\limits_{|p|\ge 2\sqrt{E}} e^{-ipx}\widehat{u}(p)\,dp, \tag{5.80}$$

где $p \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, $E > 0$. Напомним также, что норма $\|\cdot\|_{N,\sigma}$ и пространства $C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ определяются в формуле (2.13).

Лемма 5.1. *Пусть $u \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ при некоторых $N \ge 3$, $\sigma > 2$. Тогда справедлива оценка*

$$|u_{err}(x,E)| \le c_1(N,\sigma)\|u\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}}, \tag{5.81}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $E \ge 1/2$, а $c_1(N,\sigma)$ определяется в формуле (5.44).

Доказательство леммы 5.1. Справедливо равенство

$$\widehat{\partial^\alpha u}(p) = (-ip_1)^{\alpha_1}(-ip_2)^{\alpha_2}\widehat{u}(p), \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}, \tag{5.82}$$

где $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $|\alpha| \le N$. Пользуясь этим равенством, мы получаем оценку

$$|\widehat{u}(p)| \le \frac{2^{N-1}}{\pi(\sigma-2)}\|u\|_{N,\sigma}\big(1+|p|^2\big)^{-\frac{N}{2}}$$

для всех $p \in \mathbb{R}^2$, $|p| \geq 1$. Из этой оценки следует оценка (5.81). $\square$

Доказательство теоремы 5.2. Так как коэффициенты A_1, A_2 и V вещественны, из формулы (5.31) следует равенство

$$f^{\mathrm{lin}}(k,l) - \overline{f^{\mathrm{lin}}(l,k)} = 2(k-l)\widehat{A}(k-l), \tag{5.83}$$

где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$. Мы рассматриваем (5.35a), (5.83) как систему линейных уравнений для нахождения $\widehat{A}(k-l)$ и $\widehat{V}(k-l)$. Кроме того, мы пользуемся равенством $(k-l)(k+l) = 0$, справедливым при $(k,l) \in \mathcal{M}_E$. В результате мы получаем формулы (5.41).

Формулы (5.42a) и (5.42b) могут рассматриваться как определения функций A_{appr}, A_{err} и V_{appr}, V_{err}. Оценки (5.43a) и (5.43b) следуют из леммы 5.1. $\square$

Лемма 5.2. *Предположим, что A_1, $A_2 \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ при некоторых $N \geq 4$, $\sigma > 2$. Пусть функция φ^{div} определяется как решение задачи* (5.4a), (5.4b)*, а функции $\widehat{\nabla\varphi}^{div}$, $(\nabla\varphi^{div})_{err}$, $\widehat{\Delta\varphi}^{div}$ и $(\Delta\varphi^{div})_{err}$ определяются в соответствии с формулой* (5.80)*. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \big|(\partial_{x_j}\varphi^{div})_{err}(x,E)\big| &\leq \sqrt{2}\, c_1(N,\sigma)\|A\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}}, \\ \big|(\Delta\varphi^{div})_{err}(x,E)\big| &\leq \sqrt{2}\, c_1(N,\sigma)\|A\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-3}{2}}, \end{aligned} \tag{5.84}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $j = 1,\ 2$, $E \geq 1/4$, $\|A\|_{N,\sigma}$ определяется в формуле (5.40)*, а $c_1(N,\sigma)$ определяется в формуле* (5.44)*.*

Доказательство леммы 5.2. Справедлива следующая явная формула для решения φ^{div} задачи (5.4a), (5.4b):

$$\varphi^{\mathrm{div}}(x) = -i\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ipx}\big(p\widehat{A}(p)\big)|p|^{-2}\,dp, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{5.85}$$

Используя формулы (5.80) и (5.85), мы получаем равенства

$$\widehat{\nabla\varphi}^{\mathrm{div}}(p) = -p\big(p\widehat{A}(p)\big)|p|^{-2}, \quad \widehat{\Delta\varphi}^{\mathrm{div}}(p) = ip\widehat{A}(p), \tag{5.86}$$

где $p \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$. Из формулы (5.86) следуют неравенства

$$\big|\widehat{\partial_{x_j}\varphi}^{\mathrm{div}}(p)\big| \leq \sqrt{2}\max_{k=1,2}|\widehat{A}_k(p)|, \quad \big|\widehat{\Delta\varphi}^{\mathrm{div}}(p)\big| \leq \sqrt{2}\,|p|\max_{k=1,2}|\widehat{A}_k(p)|, \tag{5.87}$$

где $p \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$, $j = 1, 2$.

Справедливо равенство

$$\widehat{\partial^\alpha A_j}(p) = (-ip_1)^{\alpha_1}(-ip_2)^{\alpha_2}\widehat{A}_j(p),$$

где $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N}\cup 0)^2$, $|\alpha| \le N$ и ∂^α определено в формуле (5.82). Из этого равенства мы получаем оценку

$$|\widehat{A}_j(p)| \le \frac{2^{N-1}}{\pi(\sigma-2)}\|A_j\|_{N,\sigma}(1+|p|^2)^{-\frac{N}{2}}, \tag{5.88}$$

где $p \in \mathbb{R}^2$, $|p| \ge 1$, $j = 1, 2$. Из неравенств (5.87) и (5.88) следуют оценки

$$\begin{aligned} \left|\widehat{\partial_{x_j}\varphi}^{\mathrm{div}}(p)\right| &\le \sqrt{2}\frac{2^{N-1}}{\pi(\sigma-2)}\|A\|_{N,\sigma}(1+|p|^2)^{-\frac{N}{2}}, \\ \left|\widehat{\Delta\varphi}^{\mathrm{div}}(p)\right| &\le \sqrt{2}\frac{2^{N-1}}{\pi(\sigma-2)}\|A\|_{N,\sigma}(1+|p|^2)^{-\frac{N-1}{2}}, \end{aligned} \tag{5.89}$$

где $p \in \mathbb{R}^2$, $|p| \ge 1$, $j = 1, 2$. Используя оценки (5.89), мы получаем оценки (5.84). $\square$

Доказательство теоремы 5.3. Учитывая инвариантность функции f^{lin} по отношению к калибровочным преобразованиям (5.32a), (5.32b) и используя формулы (5.4a), (5.4b), (5.33a), (5.33b) и (5.35a), мы получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} (k-l)\widehat{A}^{\mathrm{div},0}(k-l) &= 0, \\ f^{\mathrm{lin}}(k,l) - f^{\mathrm{lin}}(-l,-k) &= 2(k+l)\widehat{A}^{\mathrm{div},0}(k-l), \\ f^{\mathrm{lin}}(k,l) + f^{\mathrm{lin}}(-l,-k) &= 2\widehat{V}^{\mathrm{div},0}(k-l), \end{aligned} \tag{5.90}$$

где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$. Используя формулу (5.90) и ортогональность векторов $(k-l)$ и $(k+l)$, мы получаем формулу (5.45).

Можно рассматривать формулы (5.46a) и (5.46b) как определения функций $A^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}$, $A^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{err}}$ и $V^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{err}}$.

Из формул (5.33a), (5.33b) и (5.46a), (5.46b) мы получаем формулы

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{err,j}}(x,E) &= A_{\mathrm{j,err}}(x,E) + (\partial_{x_j}\varphi^{\mathrm{div}})_{\mathrm{err}}(x,E), \quad j = 1,2, \\ V^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{err}}(x,E) &= V_{\mathrm{err}}(x,E) - i(\Delta\varphi^{\mathrm{div}})_{\mathrm{err}}(x,E), \end{aligned} \tag{5.91}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $E > 0$, а функции $A_{\mathrm{j,err}}$, V_{err}, $(\partial_{x_j}\varphi^{\mathrm{div}})_{\mathrm{err}}$, $(\Delta\varphi^{\mathrm{div}})_{\mathrm{err}}$ определяются в соответствии с формулой (5.80).

Из формулы (5.91), с учётом неравенства (5.81) для функций $A_{1,\mathrm{err}}$, $A_{2,\mathrm{err}}$, V_{err} и неравенств (5.84), мы получаем формулы (5.47a) и (5.47b). $\square$

Лемма 5.3. *Предположим, что A_1, $A_2 \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ при некоторых $N \geq 4$ и $\sigma > 2$. Пусть функции φ^- и φ^+ определяются как решения задач* (5.5a), (5.5b) *и* (5.6a), (5.6b) *соответственно. Определим функции $\widehat{\nabla\varphi}^{\pm}$, $(\nabla\varphi^{\pm})_{err}$, $\widehat{\Delta\varphi}^{\pm}$, $(\Delta\varphi^{\pm})_{err}$ в соответствии с формулой* (5.80). *Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \left|(\partial_{x_j}\varphi^{\pm})_{err}(x,E)\right| &\leq \sqrt{2}\, c_1(N,\sigma)\|A\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-2}{2}}, \\ \left|(\Delta\varphi^{\pm})_{err}(x,E)\right| &\leq \sqrt{2}\, c_1(N,\sigma)\|A\|_{N,\sigma}E^{-\frac{N-3}{2}}, \end{aligned} \tag{5.92}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial_{x_j}$, $j = 1, 2$, $E \geq 1/4$, $\|A\|_{N,\sigma}$ определяется в формуле (5.40), *а $c_1(N,\sigma)$ определяется в формуле* (5.44).

Доказательство леммы 5.3. Решения φ^- и φ^+ задач (5.5a), (5.5b) и (5.6a), (5.6b) могут быть выписаны в явном виде:

$$\varphi^{\pm}(x) = -i\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ipx}\frac{\widehat{A}_1(p) \pm i\widehat{A}_2(p)}{p_1 \pm ip_2}dp, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{5.93}$$

Используя формулы (5.80) и (5.93), мы получаем равенства

$$\widehat{\nabla\varphi}^{\pm}(p) = -\frac{\widehat{A}_1(p) \pm i\widehat{A}_2(p)}{p_1 \pm ip_2}p, \quad \widehat{\Delta\varphi}^{\pm}(p) = i\frac{\widehat{A}_1(p) \pm i\widehat{A}_2(p)}{p_1 \pm ip_2}|p|^2, \tag{5.94}$$

где $p \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$. Из формулы (5.94) следуют неравенства

$$\left|\widehat{\partial_{x_j}\varphi}^{\pm}(p)\right| \leq \sqrt{2}\max_{k=1,2}|\widehat{A}_k(p)|, \quad \left|\widehat{\Delta\varphi}^{\pm}(p)\right| \leq \sqrt{2}\;|p|\max_{k=1,2}|\widehat{A}_k(p)|, \tag{5.95}$$

где $p \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$, $j = 1, 2$.

Действуя как при доказательстве леммы 5.2, мы получаем оценку (5.88). Из оценок (5.88) и (5.95) следуют оценки

$$\begin{aligned} \left|\widehat{\partial_{x_j}\varphi}^{\pm}(p)\right| &\leq \sqrt{2}\frac{2^{N-1}}{\pi(\sigma-2)}\|A\|_{N,\sigma}(1+|p|^2)^{-\frac{N}{2}}, \\ \left|\widehat{\Delta\varphi}^{\pm}(p)\right| &\leq \sqrt{2}\frac{2^{N-1}}{\pi(\sigma-2)}\|A\|_{N,\sigma}(1+|p|^2)^{-\frac{N-1}{2}}, \end{aligned} \tag{5.96}$$

где $p \in \mathbb{R}^2$, $|p| \geq 1$, $j = 1, 2$. Используя неравенства (5.96), мы получаем оценки

(5.92). $\square$

Доказательство теоремы 5.4. Учитывая инвариантность функции f^{lin} по отношению к калибровочным преобразованиям (5.32a), (5.32b) и используя формулы (5.5a)–(5.6b) и (5.34a)–(5.35a), мы получаем равенства

$$\begin{aligned} &A_2^{\pm,0}(k-l) = \pm i A_1^{\pm,0}(k-l), \\ &f^{\mathrm{lin}}(k,l) - f^{\mathrm{lin}}(-l,-k) = 2\big(k_1 + l_1 \pm i(k_2+l_2)\big)\widehat{A}_1^{\pm,0}(k-l), \\ &f^{\mathrm{lin}}(k,l) + f^{\mathrm{lin}}(-l,-k) \\ &\qquad = 2\big(k_1 - l_1 \pm i(k_2-l_2)\big)\widehat{A}_1^{\pm,0}(k-l) + 2\widehat{V}^{\pm,0}(k-l), \end{aligned} \tag{5.97}$$

где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$. Формула (5.48) следует из соотношений (5.97).

Можно рассматривать формулы (5.49a) и (5.49b) как определения функций $A_{\mathrm{appr}}^{\pm,0}$, $A_{\mathrm{err}}^{\pm,0}$ и $V_{\mathrm{appr}}^{\pm,0}$, $V_{\mathrm{err}}^{\pm,0}$.

Используя формулы (5.34a), (5.34b) и (5.49a), (5.49b), мы получаем равенства

$$\begin{aligned} &A_{\mathrm{err,j}}^{\pm,0}(x,E) = A_{\mathrm{j,err}}(x,E) + (\partial_{x_j}\varphi^{\pm})_{\mathrm{err}}(x,E), \quad j = 1,2, \\ &V_{\mathrm{err}}^{\pm,0}(x,E) = V_{\mathrm{err}}(x,E) - i(\Delta\varphi^{\pm})_{\mathrm{err}}(x,E), \end{aligned} \tag{5.98}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $E > 0$, а функции $A_{\mathrm{j,err}}$, V_{err}, $(\partial_{x_j}\varphi^{\pm})_{\mathrm{err}}$, $(\Delta\varphi^{\pm})_{\mathrm{err}}$ определяются в соответствии с формулой (5.80).

Из формулы (5.98), с учётом неравенства (5.81), записанного для функций $A_{1,\mathrm{err}}$, $A_{2,\mathrm{err}}$, V_{err}, и неравенств (5.92), мы получаем оценки (5.50a) и (5.50b). $\square$

5.5 Доказательство предложений 5.2 и 5.3

Доказательство предложения 5.2. Пусть $E > 0$ зафиксировано. Используя метод последовательных приближений для решения уравнения (5.16) относительно $h_{\pm} \in L^2(T^2)$ и учитывая оценку (5.51), мы получаем, что

$$h_{\pm} = f + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to +0, \tag{5.99}$$

где $O(\varepsilon^2)$ понимается в смысле нормы $\|\cdot\|_{L^2(T^2)}$.

Рассмотрим следующие операторы, действующие в пространстве $L^2(T)$:

$$(C_{\pm}u)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{u(\zeta)}{\zeta - \lambda(1\mp 0)}\,d\zeta, \quad \lambda \in T, \tag{5.100}$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\|C_{\pm}u\|_{L^2(T)} \le \|u\|_{L^2(T)}. \tag{5.101}$$

Используя формулы (5.19), (5.20), (5.99), (5.101) и равенство

$$\left|\exp\left(-i\frac{\sqrt{E}}{2}\big((\lambda-\lambda')\bar z + (\lambda^{-1}-\lambda'^{-1})z\big)\right)\right| = 1, \tag{5.102}$$

где λ, $\lambda' \in T$, $z \in \mathbb{C}$, мы получаем соотношение

$$\begin{aligned} B(\lambda,\lambda',z,E) = \frac{1}{2}\int\limits_T f(\zeta,\lambda',z,E)\chi\left(-i\left[\frac{\zeta}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\zeta}\right]\right)\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda(1-0)} - \\ -\frac{1}{2}\int\limits_T f(\zeta,\lambda',z,E)\chi\left(i\left[\frac{\zeta}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\zeta}\right]\right)\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda(1+0)} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{5.103}$$

где λ, $\lambda' \in T$, $z \in \mathbb{C}$, функция $f(\zeta,\lambda',z,E)$ определяется формулой

$$f(\zeta,\lambda',z,E) = f(\zeta,\lambda',E)\exp\left(-i\frac{\sqrt{E}}{2}\big((\zeta-\lambda')\bar z + (\zeta^{-1}-\lambda'^{-1})z\big)\right), \tag{5.104}$$

а $O(\varepsilon^2)$ понимается в смысле нормы $\|\cdot\|_{L^2(T^2)}$ равномерно по $z \in \mathbb{C}$.

Из формулы (5.18) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \partial_z\mu^+(z,\lambda,E) + \int\limits_T B(\lambda,\lambda',z,E)\partial_z\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'| = \\ = -\int\limits_T \partial_z B(\lambda,\lambda',z,E)\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'|, \end{aligned} \tag{5.105a}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\bar z}\mu^+(z,\lambda,E) + \int\limits_T B(\lambda,\lambda',z,E)\partial_{\bar z}\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'| = \\ = -\int\limits_T \partial_{\bar z} B(\lambda,\lambda',z,E)\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'|, \end{aligned} \tag{5.105b}$$

где $\lambda \in T$, $z \in \mathbb{C}$, а операторы ∂_z и $\partial_{\bar z}$ определяются в формуле (5.7).

Используя метод последовательных приближений для решения уравнений (5.18), (5.105a), (5.105b) относительно μ^+, $\partial_z\mu^+$, $\partial_{\bar z}\mu^+ \in L^2(T)$ соответственно, а также учитывая оценку (5.51) и формулу (5.103), мы получаем оценки

$$\mu^+(z,\lambda,E) = 1 + O(\varepsilon), \tag{5.106a}$$

$$\partial_z\mu^+(z,\lambda,E) = -\int\limits_T \partial_z B(\lambda,\lambda',z,E)\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2), \tag{5.106b}$$

$$\partial_{\bar z}\mu^+(z,\lambda,E) = -\int\limits_T \partial_{\bar z} B(\lambda,\lambda',z,E)\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2), \tag{5.106c}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in T$, а $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$ рассматриваются в смысле нормы $\|\cdot\|_{L^2(T)}$ равномерно по $z \in \mathbb{C}$. Используя формулы (5.21), (5.99) и (5.106a)–(5.106c), мы получаем оценки

$$\mu_\pm(z,\lambda,E) = 1 + O(\varepsilon), \tag{5.107a}$$

$$\begin{gathered}\partial_z\mu_\pm(z,\lambda,E) = -\int\limits_T \partial_z B(\lambda,\lambda',z,E)\,|d\lambda'| \\ +\pi i\int\limits_T \partial_z f(\lambda,\lambda',z,E)\chi\left(\pm i\left[\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right)|d\lambda'| + O(\varepsilon^2),\end{gathered} \tag{5.107b}$$

$$\begin{gathered}\partial_{\bar z}\mu_\pm(z,\lambda,E) = -\int\limits_T \partial_{\bar z} B(\lambda,\lambda',z,E)\,|d\lambda'| \\ +\pi i\int\limits_T \partial_{\bar z} f(\lambda,\lambda',z,E)\chi\left(\pm i\left[\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right)|d\lambda'| + O(\varepsilon^2),\end{gathered} \tag{5.107c}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in T$, $f(\lambda,\lambda',z,E)$ определено в формуле (5.104), а $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$ понимаются в смысле нормы $\|\cdot\|_{L^2(T)}$ равномерно по $z \in \mathbb{C}$.

Используя определения (5.22), (5.23) и оценки (5.107a)–(5.107c), мы получаем оценки

$$\begin{gathered}V^-_{\text{appr}}(x,E) = -\frac{\sqrt{E}}{\pi}\int\limits_{T^2} \partial_z B(\lambda,\lambda',z,E)\,d\lambda\,|d\lambda'| \\ +i\sqrt{E}\int\limits_{T^2} \partial_z f(\lambda,\lambda',z,E)\chi\left(-i\left[\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right)d\lambda\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2),\end{gathered} \tag{5.108a}$$

$$
\begin{aligned}
V^{+}_{\mathrm{appr}}(x,E) &= \frac{\sqrt{E}}{\pi}\int\limits_{T^2} \partial_{\bar z} B(\lambda,\lambda',z,E)\,\lambda^{-2} d\lambda\,|d\lambda'| \\
-i\sqrt{E}\int\limits_{T^2} &\partial_{\bar z} f(\lambda,\lambda',z,E)\chi\Big(i\Big[\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\Big]\Big)\,\lambda^{-2} d\lambda\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{5.108b}
$$

$$
\begin{aligned}
a^{-}_{z}(z,E) &= \frac{2i}{\pi}\int\limits_{T^2} \partial_{\bar z} B(\lambda,\lambda',z,E)\,\lambda^{-1} d\lambda\,|d\lambda'| \\
+2\int\limits_{T^2} &\partial_{\bar z} f(\lambda,\lambda',z,E)\chi\Big(i\Big[\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\Big]\Big)\,\lambda^{-1} d\lambda\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{5.108c}
$$

$$
\begin{aligned}
a^{+}_{\bar z}(z,E) &= -\frac{2i}{\pi}\int\limits_{T^2} \partial_{z} B(\lambda,\lambda',z,E)\,\lambda^{-1} d\lambda\,|d\lambda'| \\
-2\int\limits_{T^2} &\partial_{z} f(\lambda,\lambda',z,E)\chi\Big(i\Big[\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\Big]\Big)\,\lambda^{-1} d\lambda\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{5.108d}
$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, z определено в формуле (5.9), а $O(\varepsilon^2)$ рассматривается в равномерном смысле по переменной $x \in \mathbb{R}^2$.

Заметим, что следующие формулы справедливы для всех $u \in L^2(T)$:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_T (C_+u)(\lambda)\,d\lambda = 0, \quad \int\limits_T (C_-u)(\lambda)\,d\lambda = -\int\limits_T u(\lambda)\,d\lambda, \\
\int\limits_T (C_+u)(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \int\limits_T u(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \int\limits_T (C_-u)(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda} = 0, \\
\int\limits_T (C_+u)(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda^2} = \int\limits_T u(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda^2}, \quad \int\limits_T (C_-u)(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda^2} = 0,
\end{gathered} \tag{5.109}
$$

где $C_\pm$ определено в формуле (5.100).

Из формул (5.19), (5.108a)–(5.108d) и (5.109) следуют оценки

$$
V^{-}_{\mathrm{appr}}(x,E) = i\sqrt{E}\int\limits_{T^2} s(\lambda,\lambda')\partial_z f(\lambda,\lambda',z,E)\,d\lambda\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2), \tag{5.110a}
$$

$$
V^{+}_{\mathrm{appr}}(x,E) = i\sqrt{E}\int\limits_{T^2} s(\lambda,\lambda')\partial_{\bar z} f(\lambda,\lambda',z,E)\,\lambda^{-2} d\lambda\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2), \tag{5.110b}
$$

$$
a^{-}_{z}(z,E) = -2\int\limits_{T^2} s(\lambda,\lambda')\partial_{\bar z} f(\lambda,\lambda',z,E)\,\lambda^{-1} d\lambda\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2), \tag{5.110c}
$$

$$a^{+}_{\bar z}(z,E) = 2\int\limits_{T^2} s(\lambda,\lambda')\partial_z f(\lambda,\lambda',z,E)\,\lambda^{-1}d\lambda\,|d\lambda'| + O(\varepsilon^2), \tag{5.110d}$$

$$s(\lambda,\lambda') \stackrel{\text{def}}{=\!=} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{i}\left[\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right]\right),$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, z определено в формуле (5.9), а $O(\varepsilon^2)$ понимается в равномерном смысле по переменной $x \in \mathbb{R}^2$.

Наконец, из формулы (5.104) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \partial_z f(\lambda,\lambda',z,E) &= -i\frac{\sqrt{E}}{2}\big(\lambda^{-1} - \lambda'^{-1}\big) f(\lambda,\lambda',z,E),\\ \partial_{\bar z} f(\lambda,\lambda',z,E) &= -i\frac{\sqrt{E}}{2}\big(\lambda - \lambda'\big) f(\lambda,\lambda',z,E), \end{aligned} \tag{5.111}$$

для всех λ, $\lambda' \in T$, $z \in \mathbb{C}$.

Формулы (5.52a)– (5.55b) следуют из формул (5.22)–(5.24), (5.110a)–(5.110d) и (5.111). Предложение 5.2 доказано. $\square$

Для доказательства предложения 5.3 нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма 5.4. *Пусть $E > 0$ зафиксировано. Предположим, что $u(\lambda,\lambda',E)$, $(\lambda,\lambda') \in T^2$, — комплекснозначная функция, интегрируемая по мере $|d\lambda||d\lambda'|$ и удовлетворяющая соотношению*

$$u(\lambda,\lambda',E) = u(-\lambda',-\lambda,E), \quad (\lambda,\lambda') \in T^2. \tag{5.112}$$

Определим функцию $g(p,E)$, $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, $|p| \le 2\sqrt{E}$, формулой

$$g\Big(\sqrt{E}\,\mathrm{Re}(\lambda-\lambda'), \sqrt{E}\,\mathrm{Im}(\lambda-\lambda'), E\Big) = u(\lambda,\lambda',E), \tag{5.113}$$

где $(\lambda,\lambda') \in T^2$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{|p|\le 2\sqrt{E}} e^{-ipx} g(p,E)\,dp = \frac{E}{2}\int\limits_{T^2} u(\lambda,\lambda',z,E)\left|\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right| |d\lambda|\,|d\lambda'|, \tag{5.114}$$

где $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $z = x_1 + ix_2$, а $u(\lambda,\lambda',z,E)$ определяется в соответствии с формулой (5.104).

Формула (5.114) получается в результате следующей замены переменных интегрирования:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \sqrt{E}\,\mathrm{Re}(\lambda-\lambda') = \sqrt{E}(\cos\phi-\cos\phi'),\\
p_2 &= \sqrt{E}\,\mathrm{Im}(\lambda-\lambda') = \sqrt{E}(\sin\phi-\sin\phi'),
\end{aligned}
\tag{5.115}
$$

где $\lambda = e^{i\phi}$, $\lambda' = e^{i\phi'}$. Перейдём к доказательству предложения 5.3.

Доказательство предложения 5.3. Пусть $\lambda, \lambda' \in T$ определены формулой (5.10). Из формул (5.12a) и (5.12b) вытекают следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
2(k_1+l_1) = \sqrt{E}\big(\lambda+\lambda^{-1}+\lambda'+\lambda'^{-1}\big),\\
2(k_2+l_2) = -i\sqrt{E}\big(\lambda-\lambda^{-1}+\lambda'-\lambda'^{-1}\big),\\
k_1 \pm ik_2 = \sqrt{E}\lambda^{\pm1}, \quad l_1 \pm il_2 = \sqrt{E}\lambda'^{\pm1},\\
k_1+l_2 \pm i(k_2+l_2) = \sqrt{E}\big(\lambda^{\pm1}+\lambda'^{\pm1}\big),\\
|k+l|^2 = E|\lambda+\lambda'|^2,
\end{gathered}
\tag{5.116}
$$

где $(k,l) \in \mathcal{M}_E$. Используя лемму 5.4 и формулы (5.45)–(5.46b), (5.48)–(5.49b) и 5.116, мы получаем следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr,j}}(x,E) &= \frac{E}{2}\int\limits_{T^2} \widetilde{A}^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr,j}}(\lambda,\lambda',z,E)\left|\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right|\,|d\lambda|\,|d\lambda'|,\\
V^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}(x,E) &= \frac{E}{2}\int\limits_{T^2} \widetilde{V}^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}(\lambda,\lambda',z,E)\left|\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right|\,|d\lambda|\,|d\lambda'|,\\
A^{\pm,0}_{\mathrm{appr,1}}(x,E) &= \frac{E}{2}\int\limits_{T^2} \widetilde{A}^{\pm,0}_{\mathrm{appr,1}}(\lambda,\lambda',z,E)\left|\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right|\,|d\lambda|\,|d\lambda'|,\\
V^{\pm,0}_{\mathrm{appr}}(x,E) &= \frac{E}{2}\int\limits_{T^2} \widetilde{V}^{\pm,0}_{\mathrm{appr}}(\lambda,\lambda',z,E)\left|\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right|\,|d\lambda|\,|d\lambda'|,
\end{aligned}
\tag{5.117}
$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $j = 1,\ 2$, z определено в формуле (5.9), а функции $\widetilde{A}^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr,j}}$, $\widetilde{V}^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}$ и $\widetilde{A}^{\pm,0}_{\mathrm{appr,j}}$, $\widetilde{V}^{\pm,0}_{\mathrm{appr}}$ задаются следующим образом:

$$
\widetilde{A}^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr,1}}(\lambda,\lambda',z,E) = \frac{\widetilde{f}^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E)}{4\sqrt{E}}\left(\frac{1}{\lambda^{-1}+\lambda'^{-1}}+\frac{1}{\lambda+\lambda'}\right),
\tag{5.118a}
$$

$$
\widetilde{A}^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr,2}}(\lambda,\lambda',z,E) = \frac{\widetilde{f}^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E)}{4i\sqrt{E}}\left(\frac{1}{\lambda^{-1}+\lambda'^{-1}}-\frac{1}{\lambda+\lambda'}\right),
\tag{5.118b}
$$

$$\widetilde{V}^{\mathrm{div},0}_{\mathrm{appr}}(\lambda,\lambda',z,E) = \frac{f^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E) + f^{\mathrm{lin}}(-\lambda',-\lambda,z,E)}{2}, \tag{5.118c}$$

$$\widetilde{A}^{\pm,0}_{\mathrm{appr},1}(\lambda,\lambda',z,E) = \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\widetilde{f}^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E)}{\lambda^{\pm1}+\lambda'^{\pm1}}, \tag{5.118d}$$

$$\widetilde{V}^{\pm,0}_{\mathrm{appr}}(\lambda,\lambda',z,E) = \frac{\lambda'^{\pm1} f^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E) + \lambda^{\pm1} f^{\mathrm{lin}}(-\lambda',-\lambda,z,E)}{\lambda^{\pm1}+\lambda'^{\pm1}}, \tag{5.118e}$$

где $f^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E)$ определено в соответствии с формулой (5.104) и

$$\widetilde{f}^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E) = f^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E) - f^{\mathrm{lin}}(-\lambda',-\lambda,z,E).$$

Используя равенства (5.118a)–(5.118e), мы представляем каждый из интегралов в формуле (5.117) как сумму интеграла, содержащего $f^{\mathrm{lin}}(\lambda,\lambda',z,E)$ и интеграла, содержащего $f^{\mathrm{lin}}(-\lambda',-\lambda,z,E)$.

Делая замену переменных $(\lambda,\lambda') \to (-\lambda',-\lambda)$ в каждом из получившихся интегралов, содержащем $f^{\mathrm{lin}}(-\lambda',-\lambda,z,E)$, и учитывая формулу (5.48) для $\widehat{A^{\pm}_2}$, мы получаем формулы (5.56a) и (5.56b).

Предложение 5.3 доказано. $\square$

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, могут быть кратко сформулированы следующим образом:

1. Получены теоремы характеризации для интегральных преобразований типа Радона, возникающих, в частности, в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена при предположении, что либо ресурсы близки к взаимно дополнительным, либо эластичность их замещения постоянна.

2. Получены явные формулы обращения и критерии обратимости для интегральных операторов типа Радона.

3. Получены теоремы единственности для обратной задачи Дирихле–Неймана, возникающей в модели акустической томографии движущейся жидкости. Приведены примеры неединственности.

4. Получены формулы и уравнения, позволяющие свести задачу Дирихле–Неймана к обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера, частными случаями которого являются оператор Шрёдингера во внешнем поле Янга–Миллса и оператор Шрёдингера в магнитном поле.

5. Получен алгоритм решения обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии для двумерного скалярного калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера, частными случаями которого являются оператор Шрёдингера в магнитном поле и оператор, описывающий поглощающую движущуюся жидкость.

Можно выделить следующие основные перспективы дальнейшей разработки темы диссертации:

1. Применить обобщённую модель Хаутеккера–Иохансена к исследованию производства в реальных отраслях, функционирующих в условиях глобализации. Исследовать объяснительный потенциал модели, её слабые и сильные стороны. Можно ожидать, что как и классическая модель Хаутеккера—Иохансена, обобщённая модель хорошо приспособлена для учёта изменений в производстве в результате научно-технического прогресса.

2. Актуальной проблемой российской экономики является проблема составления межотраслевого баланса в условиях сильного замещения на микроуровне. Одной из перспектив развития темы диссертации является исследование потенциала формализма распределения мощностей по технологиям в условиях замещения для решения этой задачи.

3. Адаптировать алгоритм акустической томографии для случая неполных данных. Эта задача очень важна с точки зрения приложений: в томографии океана количество детекторов является относительно малым по сравнению с количеством рабочих частот. Возникает вопрос о возможности использовать большее число частот, чтобы компенсировать малое число детекторов.

4. В реальных томографических экспериментах, использующих элементарные частицы, проще измерять не полную амплитуду рассеяния, а лишь её модуль, тесно связанный с вероятностью рассеяния частиц в том или ином направлении. Важной актуальной задачей является обобщение алгоритма решения обратной задачи рассеяния для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера на случай, когда известна лишь абсолютная величина амплитуды рассеяния (отсутствует информация о фазе). Соискателем были начата работа над этой темой во время стажировки в университет города Гёттинген осенью 2015 года под руководством профессора T. Hohage. По результатам стажировки был подготовлен препринт [6], ещё одна статья находится в процессе написания.

5. Обобщение алгоритма решения обратной задачи Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера на случай областей нетривиальной геометрии. В этом направлении соискателем опубликована работа [5], связанная с восстановлением римановой поверхности по оператору Дирихле–Неймана для оператора Лапласа.

Список обозначений

Множества

$\mathbb{Z}_+^d = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \mid \alpha_j \in \mathbb{Z},\ \alpha_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, d\}$

$\mathbb{R}_+^d = \{(x_1, \ldots, x_d) \mid x_j > 0,\ j = 1, \ldots, d\}$

$\overline{\mathbb{R}_+^d} = \{(x_1, \ldots, x_d) \mid x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, d\}$

$M_n(\mathbb{C})$ — множество комплексных матриц размера $n \times n$

$GL_n(\mathbb{C})$ — множество невырожденных комплексных матриц размера $n \times n$

Множество $\{a\}$ из одного элемента a обозначается a (без скобок)

Пространства функций

$L^p(\mathbb{R}^d)$ — пространство вещественнозначных измеримых функций на $\mathbb{R}^d$ с интегрируемой p-ой степенью

$L^p_{r,c}(\mathbb{R}_+^d)$ — множество измеримых функций на $\mathbb{R}_+^d$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{r,c}$, см. формулу (1.15)

$H^p(D)$, $H^p(\partial D)$, где $D \subset \mathbb{R}^d$ — стандартные соболевские пространства

$C_c^{N,\sigma}(\mathbb{R}_+^d)$ — см. формулу (2.1)

$C^j_{\mathrm{comp}}(D, M_n(\mathbb{C}))$, где $D \subset \mathbb{R}^d$ — множество j-раз непрерывно дифференцируемых $M_n(\mathbb{C})$-значных функций в $\mathbb{R}^d$ с носителем в D

$C^{j,\alpha}_{\mathrm{comp}}(D, M_n(\mathbb{C}))$, где $D \subset \mathbb{R}^d$ — множество функций из $C^j_{\mathrm{comp}}(D, M_n(\mathbb{C}))$, обладающих покомпонентно гёльдер-непрерывными с показателем α частными производными порядка j

$L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$ — множество $M_n(\mathbb{C})$-значных покомпонентно существенно ограниченных функций в $\mathbb{R}^d$

$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, M_n(\mathbb{C}))$ — множество $M_n(\mathbb{C})$-значных функций на $\mathbb{R}^d$, принадлежащих вместе с обобщёнными производными первого порядка пространству $L^\infty(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$

Операторы и прочие обозначения

$q_p(x) = q(p_1x_1, \ldots, p_nx_n)$, где $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$a^b = a_1^{b_1} \cdots a_n^{b_n}$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$

$I = (1, \ldots, 1)$

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ — оператор Лапласа

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$ — градиент

$\operatorname{supp} f$ — носитель функции f

Список литературы

[1] Ablowitz M. J., Yaarov D. B., Fokas A. S. On the inverse scattering transform for the Kadomtsev-Petviashvili equation // Stud. Appl. Math. — 1983. — Vol. 69. — P. 135–143.

[2] Agaltsov A. D. On the reconstruction of parameters of a moving fluid from the Dirichlet-to-Neumann map // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. — Vol. 4, no. 1. — P. 4–11.

[3] Agaltsov A. D. Finding scattering data for a time-harmonic wave equation with first order perturbation from the Dirichlet-to-Neumann map // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2015. — Vol. 23, no. 6. — P. 627–645.

[4] Agaltsov A. D. A global uniqueness result for acoustic tomography of moving fluid // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 2015. — Vol. 139, no. 8. — P. 937–942.

[5] Agaltsov A. D., Henkin G. M. Explicit reconstruction of Riemann surface with given boundary in complex projective space // The Journal of Geometric Analysis. — 2015. — Vol. 25, no. 4. — P. 2450–2473.

[6] Agaltsov A. D., Novikov R. G. Error estimates for phaseless inverse scattering in the Born approximation at high energies. — http://arxiv.org/abs/1604.06555.

[7] Agaltsov A. D., Novikov R. G. Riemann-Hilbert problem approach for two-dimensional flow inverse scattering // J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 55, no. 10. — id 103502.

[8] Agaltsov A. D., Novikov R. G. Uniqueness and non-uniqueness in acoustic tomography of moving fluid // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2016. — Vol. 24, no. 3. — P. 333–340.

[9] Alessandrini G. Stable determination of conductivity by boundary measurements // Appl. Anal. — 1988. — Vol. 27. — P. 153–172.

[10] Arians S. Geometric approach to inverse scattering for the Schrödinger equation with magnetic and electric potentials // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38, no. 6. — P. 2761–2773.

[11] Baykov S. V., Burov V. A., Sergeev S. N. Mode tomography of moving ocean // Proc. of the 3rd European Conference on Underwater Acoustics. — Heraklion : Crete University Press, 1996. — P. 845–850.

[12] Bernstein S. N. Sur les fonctions absolument monotones // Acta Mathematica. — 1928. — Vol. 52. — P. 1–66.

[13] Beylkin G. The inversion problem and applications of the generalized Radon transform // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1984. — Vol. 37. — P. 579–599.

[14] Bochner S. Harmonic analysis and the theory of probability. — Berkeley and Los Angeles : University of California press, 1955.

[15] Boman J., Quinto E. T. Support theorems for real analytic radon transforms // Duke Math. J. — 1987. — Vol. 55. — P. 943–948.

[16] Bray W. O., Solmon D. C. Paley-wiener theorems on rank one symmetric spaces of noncompact type // Integral geometry and tomography (Arcata, CA, 1989). — Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1990. — Vol. 113 of Contemp. Math. — P. 17–29.

[17] Brown R. M., Salo M. Identifiability at the boundary for first-order terms // Appl. Anal. — 2006. — Vol. 85, no. 6-7. — P. 735–749.

[18] Calderón A. P. On an inverse boundary value problem // Seminar on numerical analysis and its applications to continuum physics / Ed. by W. H Meyer, M. A. Raupp. — Rio de Janeiro : Sociedade Brasiliera de Matematica, 1980. — P. 65–73.

[19] Capital-labor substitution and Economic Efficiency / K. J. Arrow, B. H. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow // The Review of Economics and Statistics. — 1961. — Vol. 43, no. 3. — P. 225–250.

[20] Chern S. S. On integral geometry in Klein spaces // Ann. Of Math. — 1942. — Vol. 43, no. 2. — P. 178–189.

[21] Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. — New York : John Wiley, 1983.

[22] Determining a magnetic Schrödinger operator from partial Cauchy data / D. Dos Santos Ferreira, D. Kenig, J. Sjöstrand, G. Uhlmann // Comm. Math. Phys. — 2007. — Vol. 271, no. 2. — P. 461–488.

[23] Douglas P. C., Cobb C. W. A Theory of Production // The American Economic Review. — 1928. — Vol. 18, no. 1. — P. 139–165.

[24] Eskin G. Global uniqueness in the inverse scattering problem for the Schrödinger operator with external Yang-Mills potentials // Comm. Math. Phys. — 2001. — Vol. 222, no. 3. — P. 503–531.

[25] Eskin G., Ralston J. Inverse scattering problem for the Schrödinger equation with magnetic potential at a fixed energy // Commun. Math. Phys. — 1995. — Vol. 173. — P. 173–199.

[26] Eskin G., Ralston J. Inverse scattering problems for Schrödinger operators with magnetic and electric potentials // Inverse problems in wave propagation. — New York : Springer, 1997. — Vol. 90 of IMA Vol. Math. Appl. — P. 147–166.

[27] Eskin G., Ralston J. Inverse scattering problems for the Schrödinger operators with external Yang-Mills potentials // Partial differential equations and their applications (Toronto 1995). — Providence : AMS, 1997. — Vol. 12 of CRM. Proc. Lecture Notes. — P. 91–106.

[28] Federer H. Geometric measure theory. — NY : Springer, 1969.

[29] Fokas A. S., Ablowitz M. J. On the inverse scattering of the time-dependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev-Petviashvili equation // Stud. Appl. Math. — 1983. — Vol. 69, no. 3. — P. 211–228.

[30] Fridman B. L. A uniqueness result for a generalized Radon transform // SIAM J. Math. Anal. — 1995. — Vol. 26, no. 6. — P. 1467–1472.

[31] Frondel M. Modeling Energy and Non-energy Substitution: A Brief Survey of Elasticities // Energy Policy. — 2011. — Vol. 39, no. 8. — P. 4601–4604.

[32] Funk P. Über Eine Geometrishe Anwendung der Abelschen Integralgleichung // Math. Ann. — 1916. — Bd. 77. — S. 129–135.

[33] Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Classics in Mathematics. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2001.

[34] Gonzalez F. B. Range characterization of the k-plane transform on real projective spaces // 75 years of Radon transform (Vienna, 1992). — Vol. IV of Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys. — Cambridge, MA : International Press, 1994. — P. 153–160.

[35] Griliches Z. Capital-Skill Complementarity // Review of Economics and Statistics. — 1969. — Vol. 6. — P. 456–468.

[36] Guillarmou C., Tzou L. Identification of a connection from Cauchy data on a Riemann surface with boundary // Geom. Funct. Anal. — 2011. — Vol. 21, no. 2. — P. 393–418.

[37] Guillemin V., Sternberg S. Geometric Asymptotics. — Amer. Math. Soc., 1990. — Vol. 14 of Mathematical surveys and monographs.

[38] Helgason S. A duality in integral geometry; some generalizations of the Radon transform // Bull. Am. Math. Soc. — 1964. — Vol. 70. — P. 435–446.

[39] Helgason S. A duality in integral geometry on symmetric spaces // Proc. U.S.-Japan seminar in differential geometry (Kyoto, 1965). — Tokio : Nippon Hyoronsha, 1966. — P. 37–56.

[40] Henkin G. M., Novikov R. G. A multidimensional inverse problem in quantum and acoustic scattering // Inv. Problems. — 1988. — Vol. 4. — P. 103–121.

[41] Henkin G. M., Shananin A. A. Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions // Trans. Math. Mon. — 1990. — Vol. 81. — P. 189–223.

[42] Hicks J. R. The Theory of Wages. — London : Macmillan, 1932.

[43] Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators I. — Springer-Verlag, 1985.

[44] Houthakker H. S. The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis // Review of Economic Studies. — 1955-1956. — Vol. 23, no. 1. — P. 27–31.

[45] Imanuvilov O. Y., Yamamoto M. Inverse problem by Cauchy data on an arbitrary sub-boundary for systems of elliptic equations // Inverse Problems. — 2012. — Vol. 28. — id 095015.

[46] Johansen L. Production functions. — Amsterdam-London : North Holland Co., 1972.

[47] Kainuth E. A course in commutative Banach algebras. — New York : Springer-Verlag, 2009. — Vol. 246 of Graduate texts in mathematics.

[48] Kakehi T. Range characterization of Radon transforms on complex projective spaces // J. Math. Kyoto Univ. — 1992. — Vol. 32, no. 2. — P. 387–399.

[49] Kashiwara M. On the structure of hyperfunctions // Sagaki no Ayumi. — 1970. — Vol. 15. — P. 19–72.

[50] Korevaar J. Tauberian theory. A century of developments. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. — Vol. 329 of A series of comprehensive studies in mathematics.

[51] Krupchyk K., Lassas M., Uhlmann G. Inverse problems with partial data for a magnetic Schrödinger operator in an infinite slab or on a bounded domain // Comm. Math. Phys. — 2012. — Vol. 312, no. 1. — P. 87–126.

[52] Krupchyk K., Uhlmann G. Uniqueness in an inverse boundary problem for a magnetic Schrödinger operator with a bounded magnetic potential // Comm. Math. Phys. — 2014. — Vol. 327, no. 3. — P. 993–1009.

[53] Manakov S. V. The inverse scattering transform for the time dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation // Physica D. — 1981. — Vol. 3, no. 1, 2. — P. 420–427.

[54] Markoe A. Analytic tomography. — Cambridge : Cambridge University Press, 2006. — Vol. 106 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications.

[55] Nakamura G., Sun Z. Q., Uhlmann G. Global identifiability for an inverse problem for the Schrödinger equation in a magnetic field // Math. Ann. — 1995. — Vol. 303, no. 3. — P. 377–388.

[56] Nicoleau F. A stationary approach to inverse scattering for Schrödinger operators with first order perturbation // Comm. Part. Diff. Eq. — 1997. — Vol. 22, no. 3-4. — P. 527–553.

[57] Novikov R. G. The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator // J. Funct. Anal. — 1992. — Vol. 103, no. 2. — P. 409–469.

[58] Novikov R. G. $\bar{\partial}$-method with nonzero background potential. Application to inverse scattering for the two-dimensional acoustic equation // Commun. Partial Diff. Eq. — 1996. — Vol. 21. — P. 597–618.

[59] Novikov R. G. Formulae and equations for finding scattering data from the Dirichlet-to-Neumann map with nonzero background potential // Inv. Problems. — 2005. — Vol. 21, no. 1. — P. 257–270.

[60] Novikov R. G., Santacesaria M. Global uniqueness and reconstruction for the multi-channel Gel'fand-Calderón inverse problem in two dimensions // Bull. Sci. Math. — 2011. — Vol. 135, no. 5. — P. 421–434.

[61] Novikov R. G., Santacesaria M. Mohochromatic recontruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems // Int. Math. Res. Not. IMRN. — 2013. — no. 6. — P. 1205–1229.

[62] Päivärinta L., Salo M., Uhlmann G. Inverse scattering for the magnetic Schrödinger operator // J. Funct. Anal. — 2010. — Vol. 259, no. 7. — P. 1771–1798.

[63] Panchenko A. An inverse problem for the magnetic Schrödinger equation and quasi-exponential solutions of nonsmooth partial differential equations // Inverse Problems. — 2002. — Vol. 18, no. 5. — P. 1421–1434.

[64] Paternain G. P., Salo M., Uhlmann G. Tensor tomography of surfaces // Inventiones Mathematicae. — 2013. — Vol. 193, no. 1. — P. 229–247.

[65] Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs bestimmter Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften. — 1917. — Bd. 29. — S. 267–277.

[66] Roussef D., Winters K. B. Two-dimensional vector flow inversion by diffraction tomography // Inv. Problems. — 1994. — Vol. 10. — P. 687–697.

[67] Rychagov M. N., Ermert H. Reconstruction of fluid motion in acoustic diffraction tomography // J. Acoust. Soc. Am. — 1996. — Vol. 99, no. 5. — P. 3029–3035.

[68] Sato K. A Two-Level Constant-Elasticity-of-Sobstitution Production Function // Review of Economic Studies. — 1967. — Vol. 34, no. 2. — P. 201–218.

[69] Sato K. Production Functions and Aggregation. — Amsterdam : North-Holland, 1975.

[70] Schrader R., Taylor M. Small $\hbar$-asymptotics for quantum partition functions associated to particles in external Yang-Mills potentials // Comm. Math. Phys. — 1984. — Vol. 92, no. 4. — P. 555–594.

[71] Schrader R., Taylor M. Semiclassical asymptotics, gauge fields and quantum chaos // J. Funct. Anal. — 1989. — Vol. 83, no. 2. — P. 258–316.

[72] Schwartz L. Thèorie des distributions. — Paris : Hermann, 1978.

[73] Sharafutdinov V. A. Integral geometry of vector fields. — Netherlands : VSP, 1994.

[74] Shiota T. An inverse problem for the wave equation with first order perturbation // Amer. J. Math. — 1985. — Vol. 107, no. 1. — P. 241–251.

[75] Shurup A. S., Rumyantseva O. D. Numerical simulation of the functional approach for recovering vector fields in acoustic tomography // Quasilinear equations, inverse problems and their applications. — Dolgoprudny, Russia : Phystech-polygraph, 2015. — Conference handbook and proceedings. — P. 11.

[76] Sylvester J., Uhlmann G. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem // Ann. of Math. — 1987. — Vol. 125. — P. 153–169.

[77] Taylor J. E. Microeconomics of Globalization: Evidence from Mexico, China, El Salvador, and the Galapagos Islands // Report to the Latin America and Carribean Regional Office of the World Bank. — Washington DC, 2001.

[78] Taylor M., Uribe A. Semiclassical spectra of gauge fields // J. Funct. Anal. — 1992. — Vol. 110, no. 1. — P. 1–46.

[79] Wiener N. The Fourier integral and certain of its applications. — Cambridge : Cambridge University Press, 1933.

[80] Xiaosheng L. Inverse scattering problem for the Schrödinger operator with external Yang-Mills potentials in two dimensions at fixed energy // Comm. Part. Diff. Eq. — 2005. — Vol. 30. — P. 451–482.

[81] Zhou X. Inverse scattering transform for the time dependent Schrödinger equation with applications to the KPI equation // Comm. Math. Phys. — 1990. — Vol. 128, no. 3. — P. 551–564.

[82] Агальцов А. Д. Исследование обобщенного преобразования Радона и его экономические приложения // Управление и прикладная математика. Т. 1. — Долгопрудный : Физтех-полиграф, 2012. — Труды 55-ой научной конференции МФТИ. — С. 34–36.

[83] Агальцов А. Д. Исследование обобщенного преобразования Радона и его экономические приложения // Сборник тезисов лучших курсовых работ 2012 года. — Москва : ВМК МГУ, 2012. — С. 17–18.

[84] Агальцов А. Д. Исследование обобщённого преобразования Радона и его экономические приложения // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2013 года. — Москва : ВМК МГУ, 2013. — С. 44–46.

[85] Агальцов А. Д. Теоремы характеризации и обращения для обобщённого преобразования Радона // Труды МФТИ. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 48–61.

[86] Агальцов А. Д. Теоремы характеризации, обращения и единственности для преобразования Радона по гиперповерхностям уровня положительно однородных функций // Управление и прикладная математика. Т. 1. — Долгопрудный : Физтех-полиграф, 2013. — Труды 56-ой научной конференции МФТИ. — С. 35–36.

[87] Агальцов А. Д. Теоремы обращения и единственности для интегральных операторов типа Радона // Труды МФТИ. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 3–14.

[88] Агальцов А. Д. Теорема характеризации для обобщённого преобразования Радона, возникающего в одной модели математической экономики // Функц. анализ и его прил. — 2015. — Т. 49, № 3. — С. 57–60.

[89] Бейтмен Г., Эрдейи А. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — М. : Наука, 1969. — Т. 1 из Таблицы интегральных преобразований.

[90] Буров В. А., Алексеенко Н. В., Румянцева О. Д. Многочастотное обобщение алгоритма Новикова для решения обратной двумерной задачи рассеяния // Акустический журнал. — 2009. — Т. 55, № 6. — С. 784–798.

[91] Виленкин Н. Я., Гельфанд И. М., Граев М. И. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М. : Физматгиз, 1962. — Т. 5 из Обобщённые функции.

[92] Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. Дифференциальные формы и интегральная геометрия // Функц. анализ и его прил. — 1969. — Т. 3, № 2. — С. 24–40.

[93] Гриневич П. Г., Манаков С. В. Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера, $\bar{\partial}$-метод и нелинейные уравнения // Функц. анализ и его прил. — 1986. — Т. 20, № 2. — С. 14–24.

[94] Гриневич П. Г., Новиков Р. Г. Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шрёдингера // Функц. анализ и его прил. — 1985. — Т. 19, № 4. — С. 32–42.

[95] Кронрод А. С. О функциях двух переменных // УМН. — 1950. — Т. 5, № 1. — С. 24–134.

[96] Минковскій Г. О телахъ постоянной ширины // Матем. сб. — 1905. — Т. 25, № 3. — С. 505–508.

[97] Моделирование функционального решения задачи акустической томографии по данным от квазиточечных преобразователей / В. А. Буров, А. С. Шуруп, Д. И. Зотов, О. Д. Румянцева // Акустический журнал. — 2013. — Т. 59, № 3. — С. 391–407.

[98] Новиков Р. Г. Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ // Функц. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 4. — С. 11–22.

[99] Новиков Р. Г. Приближенное решение обратной задачи квантовой теории рассеяния при фиксированной энергии в размерности 2 // Солитоны, геометрия, топология — на перекрестках, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова. — М. : Наука, 1999. — Т. 225 из Тр. МИАН. — С. 301–318.

[100] Новиков Р. Г. Итерационный подход к непереопределенной обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 1. — С. 131–146.

[101] Новиков Р. Г., Хенкин Г. М. $\bar{\partial}$-уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // УМН. — 1987. — Т. 42, № 3. — С. 93–152.

[102] Новиков Р. Г., Хенкин Г. М. Поля Янга-Миллса, преобразование Радона-Пенроуза и уравнения Коши-Римана // Комплексный анализ - многие переменные - 5. — М. : ВИНИТИ, 1989. — Т. 54 из Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — С. 113–196.

[103] Петров А. А., Поспелов И. Г. Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций. 1. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1979. — № 2. — С. 18–27.

[104] Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. — М. : Энергоатомиздат, 1996.

[105] Повышение разрешения двумерного томографирования по поперечной координате и раздельное восстановление упругих и вязких характеристик рассеивателя / О. Д. Румянцева, В. А. Буров, А. Л. Конюшкин, Н. А. Шарапов // Акустический журнал. — 2009. — Т. 55, № 4. — С. 606–622.

[106] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — 2 изд. — М. : Наука, 1988.

[107] Фаддеев Л. Д. Растущие решения уравнения Шредингера // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 165, № 3. — С. 514–517.

[108] Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния ii. — М. : ВИНИТИ, 1974. — Т. 3 из Современные проблемы математики (Итоги науки и техники). — С. 93–181.

[109] Шананин А. А. Исследование обобщённой модели чистой отрасли // Матем. моделирование. — 1997. — Т. 9, № 10. — С. 73–82.

[110] Шананин А. А. Обобщённая модель чистой отрасли производства // Матем. моделирование. — 1997. — Т. 9, № 9. — С. 117–127.