

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Комаров Юрий Андреевич

**Применение гамильтонова формализма к задаче
оптимизации управления при векторном
критерии**

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор
Куржанский Александр Борисович

Москва — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Общие соглашения	13
1.1 Основные определения	14
1.2 Суперпозиция векторных минимумов	17
1.3 Применимость для произвольных порядков	21
Глава 2. Векторный гамильтонов формализм для динамических систем с дискретным временем	23
2.1 Постановка задачи	24
2.2 Векторный аналог принципа оптимальности	26
2.3 Векторный аналог уравнения Беллмана	28
2.4 Условия применимости метода	29
2.5 Построение гарантированных оценок границы Парето	31
2.5.1 Достаточные условия отыскания функции цены	31
2.5.2 Гарантированное точечное оценивание	35
2.5.3 Обсуждение метода	39
2.6 Применимость для произвольных порядков	39
2.7 Примеры	41
Глава 3. Векторный гамильтонов формализм для динамических систем с непрерывным временем	44
3.1 Постановка задачи	45
3.2 Векторный аналог принципа оптимальности	46
3.3 Векторный аналог уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана	48
3.4 Условия применимости метода	50

3.5	Векторный подход к построению множеств достижимости и разрешимости	51
3.5.1	Задача отыскания множества достижимости	51
3.5.2	Задача отыскания множества разрешимости	56
3.6	Применимость для произвольных порядков	57
Глава 4. Минимаксные-максиминные соотношения для векторного критерия		
4.1	Дополнительные определения	60
4.2	Необходимое условие нарушения основного минимаксного неравенства	64
4.3	Примеры функционалов	66
4.3.1	Функционал с сепарируемыми переменными	67
4.3.2	Билинейный функционал	69
4.4	Примеры	73
4.5	Связь с покомпонентными минимаксами	75
Заключение		84
Список литературы		86
Список рисунков		91
Приложение А. Листинги кода Matlab для вычисления векторных минимума и максимума		
		92

Введение

Актуальность и степень разработанности темы. Данная работа посвящена исследованию задач динамической оптимизации векторного критерия в упорядоченных пространствах. Подобные постановки возникают во многих актуальных задачах современной теории управления.

Одной из наиболее распространённых проблем теории управления является задача оптимизации управления заданной динамической системой в силу заданного функционала качества. Её свойства и методы решения хорошо изучены и широко применяются на практике. К последним относится метод динамического программирования Р. Беллмана, позволяющий находить решения в форме обратной связи, исследовать задачи с помехой в уравнении динамики, а также строить синтез управлений по наблюдениям состояний системы, в том числе не полным.

Теория многокритериальной оптимизации занимается исследованием задач минимизации и максимизации значений векторного критерия в частично упорядоченных пространствах. Такие постановки предполагают наличие нескольких независимых равнозначных функционалов качества и требуют отыскания или, по крайней мере, аппроксимации всего множества минимизаторов или максимизаторов рассматриваемого векторного критерия. Для сравнения двух векторов чаще всего используется паретовский порядок, определяемый выпуклым конусом $D = \mathbb{R}_+^p$:

$$\forall x \neq y \in \mathbb{R}^p: x \leq y \Leftrightarrow y \in x + D.$$

Множество неулучшаемых значений векторного функционала принято называть его границей Парето.

Основные результаты, полученные в этой области, формулировались в терминах статической оптимизации. В то же время, задачи динамической опти-

мизации управления при многомерном критерии были недостаточно хорошо изучены.

Одним из подходов к решению подобного рода задач является скаляризация векторного функционала за счёт рассмотрения свёртки компонент многомерного критерия. Однако этот подход в большинстве случаев не позволяет отыскать всю рассматриваемую границу Парето. Кроме того, с точки зрения интерпретации решения, могут нарушаться предположения о равнозначности компонент векторного критерия для лица, принимающего решение.

Альтернативным способом получения решения могла бы стать дискретизация рассматриваемой системы по времени и сведение задачи динамической оптимизации к серии статических задач. При подобном подходе существенным становится вопрос точности производимых вычислений. При исследовании движения системы на достаточно длинном временном промежутке полученное решение может оказаться весьма далёким от оптимума.

Предполагается, что предложенный в настоящей работе подход позволит уменьшить указанную погрешность при расчётах на практике и при этом сохранить предположение о независимости и равнозначности рассматриваемых критериев. В его основе лежит классический гамильтонов формализм, обобщённый с использованием результатов теории многокритериальной оптимизации для случая векторного функционала, принимающего значения в частично упорядоченном пространстве.

Целью данной работы является проведение исследования задач динамической векторной оптимизации и последующее описание методов их решения. Указанные методы должны позволять описать всю границу Парето значений функционала качества и её эволюцию во времени.

Методология и методы исследования. Основные результаты получены с использованием методов теорий дифференциальных уравнений, управления, а также многокритериальной оптимизации.

Научная новизна работы заключается в том, что впервые получен аналог классического уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для векторного

функционала качества. Для его обоснования использован аппарат, разработанный автором. Все доказанные в работе утверждения получены впервые.

Основные положения, предлагаемые на защиту:

1. Векторный гамильтонов формализм, позволяющий разрешить задачу оптимизации управления динамической системой для векторного критерия качества.
2. Метод построения гарантированных точечных оценок для задачи векторной динамической оптимизации в дискретном времени, позволяющий отыскать конечное число точек истинной границы Парето.
3. Возможность нарушения классического неравенства между минимаксом и максимином в случае векторного критерия. Необходимое условие нарушения основного минимаксного неравенства.
4. Выполнение обратного минимаксного неравенства для класса отображений с разделяемыми переменными.

Личный вклад. Постановка задачи, а также построение векторного аналога классического гамильтонова формализма для её решения были предложены научным руководителем. Формулировки основных утверждений, а также их доказательства, были получены автором.

Апробация работы. Результаты работы были представлены в виде докладов на следующих конференциях:

- конгресс IFAC-2020, Берлин, Германия, 2020 (дистанционный формат);
- научная конференция «Тихоновские чтения 2019», Москва, Россия, 2019 [6];
- международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), Екатеринбург, Россия, 2019 [7; 31];
- международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко, Москва, Россия, 2019 [4];
- Ломоносовские чтения-2018, секция «Вычислительная математика и кибернетика», Москва, Россия, 2018 [13].

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и одного приложения.

Полный объём диссертации составляет 94 страницы, включая 14 рисунков. Список литературы содержит 46 наименований.

В первом разделе первой главы вводятся основные определения, характерные для упорядоченных пространств и используемые в данной работе. В качестве основного рассматриваемого порядка выбирается паретовский, приводятся достаточные условия существования эффективного множества для него.

Второй раздел первой главы посвящён суперпозиции векторных минимумов. Обсуждаются условия, при которых внесение одного оператора взятия векторного минимума $\mathbf{Min}B$ внутрь другого $\mathbf{Min}(A + B)$ сохраняет образ, а именно:

$$\mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B) = \mathbf{Min}(A + B),$$

а также условия, при которых указанная операция возможна. Данное равенство обобщается на случай суммы образов векторной функции и многозначного отображения, принимающих значения в многомерном пространстве \mathbb{R}^p . Условия, при которых полученные результаты будут справедливы в пространствах с порядком, отличным от паретовского, рассматриваются *в третьем разделе*.

Вторая глава посвящена исследованию задач динамической векторной минимизации для систем с дискретным временем и жёсткими (мгновенными) ограничениями на управление. *В первой части* формулируется постановка задачи оптимизации *векторного критерия* в форме Майера-Больца для указанных систем, вводятся определения множества достижимых значений критерия и векторной функции цены $\mathcal{V}(0, x^0)$, ставящей в соответствие начальной по-

зиции системы границу Парето значений функционала качества в конечный момент времени T .

Во второй и третьей частях второй главы проводится исследование свойств указанной векторной функции цены, демонстрируется, что для неё выполняется векторный аналог классического принципа оптимальности (полугрупповое свойство) в следующем виде:

$$\mathbf{V}(0, x^0) = \mathbf{Min} \left\{ \sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \mathbf{V}(t+1, x_{t+1}[\bar{\mathbf{u}}]) \mid \bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_s\}_{s=0}^t, \bar{u}_s \in \mathcal{P}_s \right\}.$$

На основании этого свойства для введённой векторной функции цены получен векторный аналог уравнения Беллмана в форме

$$\begin{cases} \mathbf{V}(t, x) = \mathbf{Min} \{ \mathcal{L}(t, x, u) + \mathbf{V}(t+1, f(t, x, u)) \mid u \in \mathcal{P}_t \}, & t = T-1, \dots, 0, \\ \mathbf{V}(T, \cdot) = \boldsymbol{\varphi}(\cdot). \end{cases}$$

Четвёртая часть второй главы посвящена условиям применимости метода. Удалось показать, что для справедливости полученных результатов достаточно существования решения исходной задачи. Доказано, что метод применим в том числе и для векторных функционалов качества в форме Майера-Больца, у которых терминальная часть представлена векторной индикаторной функцией:

$$\mathcal{I}_T(x) = \begin{cases} \{0\}^p, & x \in T, \\ \{+\infty\}^p, & x \notin T, \end{cases}$$

где T — заданное конечное множество.

В пятой части на примере одномерной линейной системы с двумерным критерием демонстрируется, что полученное векторное уравнение Беллмана носит необходимый, но не достаточный характер. В связи с этим вводится ослабленная формулировка исходной задачи, в рамках которой достаточно отыскать лишь некоторые точки исходной границы Парето (при этом предполагается, что такие точки могут быть найдены точно, а не аппроксимированы). Предлагается метод гарантированного оценивания упомянутой границы. В его основе

лежит решение вспомогательного уравнения типа Беллмана, предполагающего решение конечного числа скалярных задач минимизации вместо векторной на каждом шаге. Таким образом, показано, что предложенный метод позволяет отыскать точные точечные оценки исходной границы Парето при одновременном понижении вычислительной сложности совокупной задачи.

В заключительной части второй главы обсуждается вопрос применимости полученных результатов в пространствах с произвольным заданным отношением порядка. Демонстрируется, что векторные аналоги принципа оптимальности и уравнения Беллмана справедливы, когда соответствующая структура доминирования $D = \text{const}$ постоянна.

Третья глава посвящена исследованию задач динамической векторной минимизации для систем с непрерывным временем и жёсткими (мгновенными) ограничениями на управление, заданными непрерывной по Хаусдорфу компактозначной функцией $\mathcal{P}(\cdot)$. В качестве критерия качества так же, как и во второй главе, рассматривается векторный функционал в форме Майера-Больца.

В первой её части по аналогии с дискретными системами приводится постановка задачи оптимизации и формулируются основные определения.

Во второй её части вводится векторная функция цены $\mathbf{v}(t, x)$ для рассматриваемой задачи. Приводятся основные её свойства, а также демонстрируется, что для неё выполняется векторный аналог принципа оптимальности в следующем виде:

$$\mathbf{v}(t_0, x^0) = \mathbf{Min} \left\{ \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}(\tau)) d\tau + \mathbf{v}(t, \bar{x}[t]) \left| \bar{u}(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \right. \right\}.$$

Третья часть третьей главы содержит вывод векторного аналога уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для введённой функции цены в форме эволюционного уравнения:

$$\begin{cases} \lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{1}{\sigma} \mathbf{h} \left(\mathbf{v}(t, x), \mathbf{Min} \left\{ \int_t^{t+\sigma} \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}(\tau)) d\tau + \mathbf{v}(t + \sigma, \bar{x}[t + \sigma]) \right\} \right) = 0, \\ \mathbf{v}(\vartheta, \cdot) = \boldsymbol{\varphi}(\cdot). \end{cases}$$

В четвёртой части этой главы исследуются условия применимости метода. Доказано, как и для дискретного случая, что полученные результаты справедливы всегда, если определено решение исходной задачи, то есть искомая граница Парето не пуста. Как и в дискретном случае, показано, что результаты остаются справедливыми, если терминальная часть векторного функционала в форме Майера-Больца представлена индикаторной функцией.

В пятой части этой главы рассматривается вопрос применимости предложенного векторного гамильтонова формализма к задачам достижимости и разрешимости (для систем как с непрерывным временем, так и с дискретным). Демонстрируется, что прямые и попятные множества достижимости могут быть построены с использованием векторной функции цены специального вида. Доказано, что такое решение будет совпадать с классическим решением, получаемым в рамках скалярного гамильтонова формализма.

В заключительной части третьей главы рассматривается вопрос обобщения полученных результатов на случай пространств с отношением порядка, отличным от паретовского, приводятся соответствующие формы принципа максимума и уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.

В четвёртой главе рассматриваются соотношения между минимаксом и максимином для векторзначных отображений, зависящих от двух независимых параметров.

В первой части главы вводятся определения векторного максимума для паретовского порядка, а также определяются условия его существования. С использованием этого понятия вводятся операторы векторного минимакса и максимина для отображений указанного вида. Для корректности сравнения полученных множеств в пространстве подмножеств \mathbb{R}^p вводится отношение порядка \leq , порождённое рассматриваемым паретовским порядком.

После этого приводятся базовые соотношения, связывающие все определённые ранее векторные границы (минимум, максимум, минимакс, максимин). Вводятся понятия основного и обратного векторных минимаксных неравенств.

Во второй части доказывается необходимое условие нарушения основного минимаксного неравенства. Приводятся две его формулировки: более общая и специфичная для паретовского порядка.

В третьей части **четвёртой главы** векторные минимаксные неравенства исследуются на примере двух классов отображений, возникающих при решении линейно-квадратичной задачи оптимизации векторного критерия.

Для класса отображений с разделяемыми переменными вида

$$\mathbf{S}(u,v) = \Phi(u) + \Psi(v)$$

устанавливается выполнение обратного минимаксного неравенства (вне зависимости от области определения и рассматриваемых отображений $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$):

$$\text{Min}_u \text{Max}_v \mathbf{S}(u,v) \leq \text{Max}_v \text{Min}_u \mathbf{S}(u,v).$$

В общем виде приводятся условия, при которых достигается равенство между векторными минимаксом и максимином.

Для класса билинейных отображений вида

$$\mathbf{B}(u,v) = [\langle u, B_1 v \rangle, \dots, \langle u, B_p v \rangle]'$$

в общем виде получено достаточное условие справедливости основного минимаксного неравенства. Для случая конечномерной области определения $U \times V$ удалось уточнить полученные соотношения и получить более специфичное и лёгкое в проверке условие.

Четвёртая часть содержит примеры, иллюстрирующие полученные соотношения.

В заключительной части **четвёртой главы** приводится контрпример, демонстрирующий невозможность обобщения метода гарантированного точечного оценивания, описанного в первой главе, на случай векторных минимакса и максимина: переход к покомпонентным скалярным оптимизационным задачам не выводит на истинную векторную границу.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику Александру Борисовичу Куржанскому за постановку задачи, ценные замечания, огромное терпение и предоставленную возможность участвовать в разработке интересной и актуальной темы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (научные проекты 19-01-00613 а, 16-29-04191 офи_м) и Московского центра фундаментальной и прикладной математики в МГУ имени М.В. Ломоносова (грант № 075-15-2019-1621).

Глава 1. Общие соглашения

Введение

В данной главе вводятся основные используемые понятия теории многокритериальной оптимизации. Приводятся результаты, существенно используемые в последующих разделах работы при доказательстве утверждений и описании исследуемых свойств, а также доказываются две леммы, составляющие основу рассуждений второй и третьей глав.

В центральной части этой главы рассматривается вопрос возможности внесения одного оператора векторной минимизации $\mathbf{Min}A$ внутрь другого $\mathbf{Min}(A + B)$ для пространств с паретовским порядком. В ходе исследования получены достаточные условия, позволяющие осуществить указанное преобразование с сохранением образа:

$$\mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B) = \mathbf{Min}(A + B),$$

Заключительная часть главы посвящена обобщению полученных во второй части результатов на случай произвольного порядка. Исследуются свойства, которыми этот порядок должен обладать для сохранения справедливости доказанных утверждений.

При работе над данным разделом диссертации использованы публикации автора [3; 14; 32; 35], в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

1.1 Основные определения

Рассмотрим произвольное множество $Y \subset \mathbb{R}^p$ с заданным на нём отношением частичного порядка \prec . Определим понятие эффективности.

Определение 1.1. Элемент $\hat{y} \in Y$ будем называть эффективным элементом множества Y относительно отношения порядка \prec , если не $\exists y \in Y$ такого, что $y \prec \hat{y}$. Совокупность всех эффективных элементов будем обозначать $\mathcal{E}(Y, \prec)$:

$$\mathcal{E}(Y, \prec) = \left\{ \hat{y} \in Y \mid \text{не } \exists y \in Y : y \prec \hat{y} \right\}.$$

Отметим, что понятие эффективности допускает обобщение. Использование вполне эффективных решений позволяет разрешить проблемы с непрерывностью и существованием решений в рассматриваемых задачах, если таковые возникают. Подробнее с предложенными концепциями можно ознакомиться, например, в [25; 29; 45]. Их рассмотрение выходит за рамки предложенного исследования.

Наиболее распространённым в практических приложениях является порядок Парето. В связи с этим большая часть результатов в данной работе получена для пространств с именно таким отношением порядка. Дадим его определение.

$$\begin{cases} \hat{y}_i \leq y_i, & i = 1, \dots, p, \\ \hat{y} \neq y. \end{cases}$$

Выполнение этого соотношения будем записывать в виде $\hat{y} \leq y$. Эффективные на множестве Y элементы мы будем называть оптимальными по Парето, а самое эффективное множество — паретовским фронтом или просто векторным минимумом. Обозначать его мы будем $\mathbf{Min}Y$.

Далее в работе, если не сказано иное, сравнение двух вещественных векторов будем понимать с точки зрения порядка Парето.

Определим несколько основных свойств указанного отношения, существенно используемых в работе при проведении различных доказательств.

Утверждение 1.1. *Для любой фиксированной точки $y^* \in \mathbb{R}^p$ выполнено соотношение:*

$$\mathbf{Min}(y^* + Y) = y^* + \mathbf{Min}Y, \quad (1.1)$$

где сложение понимается в смысле суммы по Минковскому:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Это соотношение напрямую следует из определения границы Парето.

Возможна ситуация, когда паретовский фронт некоторого непустого множества Y не содержит ни одного элемента (например, если указанное множество является открытым). В этом случае мы будем говорить, что указанная граница Парето не существует или не определена. Сформулируем условия, гарантирующие её существование.

Достаточные условия существования границы Парето

Подробное исследование вопроса существования эффективного множества для заданного отношения порядка \prec производится в [43]. Мы же приведём здесь лишь некоторые результаты, достаточные для проведения последующих утверждений.

Рассмотрим альтернативный способ задания отношения порядка, предложенный Ю в [46]. Этот метод предполагает введение понятия структуры доминирования. Для каждого $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$ рассмотрим множество

$$D(y) = \{d \in \mathbb{R}^p : y \prec y + d\} \cup \{0\}.$$

Многозначное отображение $D: Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ полностью описывает отношение порядка \prec (см. [43]). Например, паретовскому порядку соответствует $D(\cdot) \equiv D = \mathbb{R}_+^p$.

Множество эффективных элементов относительно заданной структуры доминирования будем обозначать $\mathcal{E}(Y, D)$.

В силу данного определения

$$\hat{y} \prec y \Leftrightarrow y \in \hat{y} + D(\hat{y}) \setminus \{0\}.$$

Определение 1.2. Пусть задан $D \in \mathbb{R}^p$ — конус. Будем говорить, что множество $Y \subset \mathbb{R}^p$ D -компактно, если компактны множества

$$(y - \text{cl}D) \cap Y, \quad y \in Y.$$

Используя введённое понятие, мы можем сформулировать достаточное условие существования границы Парето ([28; 43]).

Теорема 1.1. Пусть D — заданный острый конус в \mathbb{R}^p . Если $Y \subset \mathbb{R}^p$ — непустое D -компактное множество, то $\mathcal{E}(Y, D) \neq \emptyset$.

Сформулируем его в альтернативной форме, удобной для работы с паретовским порядком.

Определение 1.3. Будем говорить, что множество $Y \subset \mathbb{R}^p$ ограничено снизу, если

$$\exists M_* \in \mathbb{R}^p: M_* \prec y, \quad \forall y \in Y.$$

Используя это определение, сформулируем следующее следствие.

Следствие 1.1. Пусть непустое множество $Y \subset \mathbb{R}^p$ — замкнуто и ограничено снизу. Тогда граница парето $\text{Min}Y \neq \emptyset$.

Отметим, что условие замкнутости является более жёстким, чем D -компактность. С другой стороны, оно проще поддаётся проверке, а результаты, опирающиеся на него, отвечают наиболее употребимым ограничениям, используемым при моделировании.

В случае, когда такие ограничения не являются приемлемыми, полученные в данной работе результаты могут быть обобщены с использованием менее строгих теорем о существовании эффективного множества на $Y \subset \mathbb{R}^p$ (см. [26; 28; 29; 43]).

1.2 Суперпозиция векторных минимумов

Для получения векторного аналога принципа оптимальности для систем как с дискретным временем, так и с непрерывным, нам потребуется доказать две вспомогательные леммы, определяющие условия, при которых один оператор взятия векторного минимума может быть внесён внутрь другого оператора взятия векторного минимума.

Лемма 1.1. *Пусть множества $A, B \subset \mathbb{R}^p$ не пусты, и граница Парето их суммы по Минковскому $C = A + B$ существует. Тогда справедливо равенство*

$$\mathbf{Min}(A + B) = \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B).$$

Доказательство. Доказательство проведём в два этапа.

1. Покажем, что $\mathbf{Min}(A + B) \subseteq \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B)$.

Для начала покажем, что из существования границы $\mathbf{Min}(A + B)$ следует существование $\mathbf{Min}B$. Предположим, что это не так, то есть

$$\forall b \in B \exists b' : b' \leq b.$$

Тогда для любого $a \in A$ выполнено $a + b' \leq a + b$, что эквивалентно

$$\forall x \in A + B \exists x' \in A + B : x' \leq x.$$

Из последнего соотношения следует, что не существует $\mathbf{Min}(A + B)$, что противоречит условию леммы.

Рассмотрим теперь произвольный $\hat{x} \in \mathbf{Min}(A + B)$. По определению векторного минимума не $\exists x \in A + B : x \leq \hat{x}$.

Предположим противное, пусть $\hat{x} \notin \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B)$. Тогда $\exists \tilde{x} \in A + \mathbf{Min}B$ такой, что $\tilde{x} \leq \hat{x}$. Поскольку $A + \mathbf{Min}B \subseteq A + B$, вектор $\tilde{x} \in A + B$. Но тогда $\hat{x} \notin \mathbf{Min}(A + B)$, что противоречит выбору \hat{x} . Значит, предположение неверно, и вложение $\mathbf{Min}(A + B) \subseteq \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B)$ справедливо.

2. Покажем теперь, что $\mathbf{Min}(A + B) \supseteq \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B)$. Рассмотрим произвольный $\hat{x} \in \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B)$. Тогда не $\exists x \in A + \mathbf{Min}B: x \leq \hat{x}$. Снова предположим противное. Пусть $\hat{x} \notin \mathbf{Min}(A + B)$, то есть $\exists \tilde{x} \in A + B: \tilde{x} \leq \hat{x}$. При этом, в силу выбора \hat{x} ,

$$\tilde{x} \in (A + B) \setminus (A + \mathbf{Min}B) = A \setminus \mathbf{Min}B.$$

Покажем, что для любого $x \in A + B \setminus \mathbf{Min}B$ выполняется соотношение $x \notin \mathbf{Min}(A + B)$. Из определения суммы Минковскому следует, что $\exists a \in A, b \in B \setminus \mathbf{Min}B: x = a + b$. Поскольку $b \notin \mathbf{Min}B$, то $\exists b' \in B: b' \leq b$. Рассмотрим вектор $x' = a + b' \in A + B$. Легко видеть, что $x' \leq x$, а это значит, что $x \notin \mathbf{Min}(A + B)$.

Поскольку рассматриваемый $\tilde{x} \in A + B \setminus \mathbf{Min}B$, то $\tilde{x} \notin \mathbf{Min}(A + B)$. В силу теоремы 1.1 $\exists x_* \in \mathbf{Min}(A + B): x_* \leq \tilde{x}$. При этом

$$x_* \notin A + B \setminus \mathbf{Min}B,$$

поскольку в противном случае по доказанному выше следовало бы $x_* \notin \mathbf{Min}(A + B)$. С другой стороны

$$x_* \in \mathbf{Min}(A + B) \subseteq A + B.$$

Значит, $x_* \in A + \mathbf{Min}B$.

В силу выбора рассматриваемых векторов

$$x_* \leq \tilde{x} \leq \hat{x}.$$

Значит, $\exists x_* \in A + \mathbf{Min}B: x_* \leq \hat{x}$. Но тогда $\hat{x} \notin \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B)$, что противоречит выбору \hat{x} . Полученное противоречие говорит о том, что исходное предположение было неверным, и вложение $\mathbf{Min}(A + B) \supseteq \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B)$ выполняется.

В силу справедливости двустороннего вложения рассматриваемых множеств, наконец, получаем

$$\mathbf{Min}(A + B) = \mathbf{Min}(A + \mathbf{Min}B).$$

■

Применим этот результат для доказательства более общего утверждения, которое позволит нам в дальнейшем сделать последний переход для получения векторного принципа оптимальности.

Лемма 1.2. Пусть U — множество произвольной природы, на котором заданы отображения

$$\begin{aligned} f(u) &: U \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ F(u) &: U \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p} \end{aligned}$$

такие, что граница Парето существует для всех множеств $F(u)$, $u \in U$. Тогда равенство

$$\mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + F(u)] = \mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathbf{Min} F(u)]$$

справедливо при условии, что векторный минимум в левой части существует.

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме, покажем справедливость вложения в обе стороны для указанных множеств.

1. Докажем, что

$$\mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + F(u)] \subseteq \mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathbf{Min} F(u)].$$

Зафиксируем произвольный $\hat{x} \in \mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + F(u)]$. Пусть \hat{u} таково, что $\hat{x} \in f(\hat{u}) + F(\hat{u})$. Тогда

$$\hat{x} \in \mathbf{Min} \{f(\hat{u}) + F(\hat{u})\}.$$

Из выбора \hat{x} следует, что указанная граница Парето существует, поскольку она содержит, по крайней мере, сам \hat{x} . Воспользовавшись леммой 1.1, получаем:

$$\hat{x} \in \mathbf{Min} \{f(\hat{u}) + F(\hat{u})\} = \mathbf{Min} \{f(\hat{u}) + \mathbf{Min} F(\hat{u})\} \subseteq f(\hat{u}) + \mathbf{Min} F(\hat{u}).$$

Таким образом, показано, что

$$\hat{x} \in \bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathbf{Min}F(u)].$$

В силу произвольности выбора \hat{x} имеет место указанное вложение множеств.

2. Покажем теперь справедливость вложения в обратную сторону.

Отметим, что внешний векторный минимум в правой части равенства существует в силу доказанного в пункте 1.

Зафиксируем произвольный $\hat{x} \in \mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathbf{Min}F(u)]$. Тогда не

$$\exists x \in \bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathbf{Min}F(u)]: x \leq \hat{x}.$$

Предположим, что вложение $\hat{x} \in \mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + F(u)]$ не выполнено, то есть

$$\exists \bar{x} \in \mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + F(u)] : \bar{x} \leq \hat{x}.$$

По доказанному в пункте 1, $\bar{x} \in \mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathbf{Min}F(u)] \subseteq \bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathbf{Min}F(u)]$. Из $\bar{x} \leq \hat{x}$ получаем противоречие с выбором \hat{x} .

Значит, предположение было неверным, и имеет место вложение

$$\mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + F(u)] \supseteq \mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathbf{Min}F(u)].$$

■

Замечание 1.1. Отметим, что полученный результат справедлив как для множеств U , заданных в конечномерных, так и для U , заданных в бесконечномерных пространствах.

Замечание 1.2. Ослабить условие на существование граници Парето $\mathbf{Min}F(u)$ нельзя, поскольку из доказательства леммы следует существование векторных минимумов лишь для тех $\hat{u} \in U$, которые приводят на границу

$$\mathbf{Min} \bigcup_{u \in U} [f(u) + F(u)].$$

1.3 Применимость для произвольных порядков

Обсудим теперь вопрос применимости полученных в предыдущем разделе результатов к отношениям порядка, отличным от паретовского.

Как было отмечено ранее, доказательства обеих лемм существенно используют соотношение (1.1) и эквивалентность отношений

$$\hat{y} \leq y \quad \text{и} \quad x + \hat{y} \leq x + y, \quad x, \hat{y}, y \in \mathbb{R}^p.$$

Сформулируем условия, которым должна удовлетворять структура доминирования $D(y)$, определяющая порядок, чтобы указанные соотношения выполнялись.

Лемма 1.3. *Пусть $D \equiv \text{const}$. Тогда для произвольного множества $Y \in \mathbb{R}^p$, для которого $\mathcal{E}(Y, D)$ не пусто, выполняется*

$$\mathcal{E}(y^* + Y, D) = y^* + \mathcal{E}(Y, D), \quad y^* \in \mathbb{R}^p.$$

Доказательство. Доказательство напрямую следует из определения

$$\mathcal{E}(y^* + Y, D) = \{\hat{y} \in Y \mid \text{не } \exists y \in Y : y^* + \hat{y} \in y^* + y + D \setminus \{0\}\}.$$

■

На основании этой леммы можно сформулировать следующие аналоги полученных ранее результатов.

Предложение 1.1. *Пусть отношение порядка в частично упорядоченном пространстве (\mathbb{R}^p, \prec) определяется структурой доминирования $D \equiv \text{const}$. Пусть, кроме того, множества $A, B \subset \mathbb{R}^p$ не пусты и $\mathcal{E}(A+B, D) \neq \emptyset$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{E}(A + B, D) = \mathcal{E}(A + \mathcal{E}(B, D), D).$$

Предложение 1.2. *Пусть отношение порядка в частично упорядоченном пространстве (\mathbb{R}^p, \prec) определяется структурой доминирования $D \equiv$*

const. Пусть отображения

$$\begin{aligned} f(u) &: U \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ F(u) &: U \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p} \end{aligned}$$

таковы, что $\forall F(u), u \in U \Rightarrow \mathcal{E}(F(u), D) \neq \emptyset$.

Тогда равенство

$$\mathcal{E} \left(\bigcup_{u \in U} [f(u) + F(u)], D \right) = \mathcal{E} \left(\bigcup_{u \in U} [f(u) + \mathcal{E}(F(u), D)], D \right)$$

справедливо при условии, что эффективное множество в левой части не пусто.

Доказательства этих утверждений дословно повторяют доказательства лемм 1.1 и 1.2.

Глава 2. Векторный гамильтонов формализм для динамических систем с дискретным временем

Введение

В данной главе рассматривается задача минимизации векторного функционала для динамической системы с геометрическими ограничениями на управления в дискретном времени. Решение этой задачи строится при помощи векторного аналога классического метода динамического программирования. Вводится понятие векторной функции цены, отвечающей исходному многомерному функционалу. Демонстрируется, что при некоторых ограничениях для введённой функции цены выполняется векторный аналог классического принципа оптимальности. На его основе строится векторный аналог уравнения Беллмана. Исследуются достаточные условия применимости предложенного метода.

Далее на примере одномерной линейной системы демонстрируется, что полученный векторный аналог уравнения Беллмана носит лишь необходимый характер, и не всякое его решение является искомой функцией цены. Для отыскания некоторых её точек предлагается построение гарантированных точечных оценок, которые могут быть получены из скаляризованного векторного уравнения Беллмана для вспомогательной одномерной функции цены специального вида.

В третьей части рассматривается вопрос применимости полученных результатов в случае, когда в пространстве значений векторного функционала задан порядок, отличный от паретовского. Исследуются требования, гарантирующие сохранение полученных соотношений для этого порядка.

В заключительной части главы приводятся примеры построения гарантированных точечных оценок.

При работе над данным разделом диссертации использованы публикации автора [3; 14; 32; 35], в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

2.1 Постановка задачи

Рассматривается разностная схема вида

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(t, x_t, u_t), & t = 0, \dots, T-1, \\ x_0 = x^0, \\ x_t \in \mathbb{R}^n, u_t \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (2.1)$$

с непустыми геометрическими ограничениями на управление

$$u_t \in \mathcal{P}_t. \quad (2.2)$$

Пусть векторзначный функционал

$$\mathcal{J}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{s=t}^{T-1} \mathcal{L}(s, x_s, u_s) + \boldsymbol{\varphi}(x_T), \quad (2.3)$$

в форме Майера-Больца, где

$$\mathcal{J}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_p(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}(s, x, u) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(s, x, u) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_p(s, x, u) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{bmatrix},$$

определён на всех допустимых управлениях $\mathbf{u} = \{u_s\}_{s=0}^{T-1}$, $u_s \in \mathcal{P}_s$ и отвечающих им траекториях $\mathbf{x} = \{x_s\}_{s=0}^T$ системы (2.1).

Необходимо отыскать допустимую стратегию управления $\mathbf{u} = \{u_t\}_{t=0}^{T-1}$, $u_t \in \mathcal{P}_t$, приводящую значения функционала (2.3) на границу Парето его значений в начальный момент времени:

$$\mathcal{J}(0, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow \text{Min.} \quad (2.4)$$

Для того, чтобы завершить формализацию постановки задачи, введём дополнительные определения. Следуя [38], введём понятие множества достижимости в рассматриваемой задаче оптимизации управления.

Определение 2.1. *Множеством достижимости динамической системы (2.1) при жёстких ограничениях на управление (2.2) в момент времени $0 \leq t \leq T$ будем называть совокупность векторов*

$$\mathcal{X}(t; 0, x^0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{u} = \{u_s\}_{s=0}^{t-1}, u_s \in \mathcal{P}_s: x_t(0, x^0, \mathbf{u}) = x \right\},$$

где под $x_t(0, x^0, \mathbf{u})$ понимается положение в момент времени t траектории системы (2.1), выпущенной из позиции $(0, x^0)$ и отвечающей стратегии управления \mathbf{u} .

Введём аналог множества достижимости для значений векторного функционала (2.3).

Определение 2.2. *Множеством значений критерия (2.3), достижимых на траекториях системы (2.1) из позиции (t, x) при жёстких ограничениях на управление (2.2) будем называть*

$$\mathcal{Z}(t, x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^p \mid \exists \mathbf{u} = \{u_s\}_{s=t}^{T-1}, u_s \in \mathcal{P}_s: \mathcal{J}(t, \mathbf{x}(t, x, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = z \right\},$$

где под $\mathbf{x}(t, x, \mathbf{u})$ понимается траектория $\{x_s(t, x, \mathbf{u})\}_{s=t}^T$ системы (2.1), выпущенная из позиции (t, x) и отвечающая стратегии управления \mathbf{u} .

Завершим формализацию постановки задачи и определим, в каком смысле мы будем понимать соотношение (2.4).

Постановка задачи минимизации векторного критерия

Задача оптимизации управления движением динамической системы (2.1) с векторным функционалом в форме (2.3) при ограничениях на управление (2.2) состоит в отыскании всех стратегий управления $\mathbf{u} = \{u_t\}_{t=0}^{T-1}, u_t \in \mathcal{P}_t$, приводящих критерий на границу Парето его достижимых из начальной позиции $(0, x^0)$ значений:

$$\mathcal{J}(0, \mathbf{x}(0, x^0, \mathbf{u}), \mathbf{u}) \in \mathbf{Min}\mathcal{Z}(0, x^0).$$

2.2 Векторный аналог принципа оптимальности

Получим векторный аналог принципа оптимальности для рассматриваемой задачи. Для этого определим векторную функцию цены для рассматриваемой задачи.

Определение 2.3. *Векторной функцией цены для задачи минимизации векторного критерия (2.4) будем называть отображение, ставящее в соответствие позиции (t, x) паретовский фронт множества достижимых из этой точки значений критерия (2.3):*

$$\mathcal{V}(t, x) = \mathbf{Min}\mathcal{Z}(t, x).$$

Таким образом, задача отыскания всей границы Парето множества достижимых значений критерия эквивалентна задаче поиска значения векторной функции цены в точке $(0, x^0)$.

Для того, чтобы сформулировать векторный аналог принципа оптимальности, получим альтернативное представление для $\mathcal{Z}(0, x^0)$. Зафиксируем произвольную допустимую стратегию управления $\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_t\}_{t=0}^{T-1}, \bar{u}_t \in \mathcal{P}_t$ и

соответствующую ей траекторию $\bar{\mathbf{x}}[\bar{\mathbf{u}}] = \bar{\mathbf{x}}(0, x^0, \mathbf{u})$ системы (2.1). Для произвольного фиксированного момента времени $0 \leq t \leq T$ справедливо соотношение

$$\sum_{s=0}^{T-1} \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_T) = \sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \sum_{s=t+1}^{T-1} \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_T).$$

Перебирая всевозможные допустимые стратегии управления \mathbf{u} , получим

$$\mathcal{Z}(0, x^0) = \left\{ \sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \mathcal{Z}(t+1, x_{t+1}[\bar{\mathbf{u}}]) \middle| \bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_s\}_{s=0}^t, \bar{u}_s \in \mathcal{P}_s \right\}.$$

Возьмём векторный минимум от обеих частей последнего равенства:

$$\boldsymbol{\nu}(0, x^0) = \mathbf{Min} \left\{ \sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \mathcal{Z}(t+1, x_{t+1}[\bar{\mathbf{u}}]) \middle| \bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_s\}_{s=0}^t, \bar{u}_s \in \mathcal{P}_s \right\}.$$

Воспользовавшись леммой 1.2, внесём векторный минимум внутрь скобок в правой части равенства и получим таким образом векторный аналог принципа оптимальности для рассматриваемой задачи.

Предложение 2.1. Пусть граница Парето $\mathbf{Min}\mathcal{Z}(0, x^0)$ множества достижимых из начальной позиции $(0, x^0)$ значений критерия (2.3) для системы (2.4) существует. Тогда для любого заданного момента времени $t = 0, \dots, T$ для введённой векторной функции цены $\boldsymbol{\nu}(\cdot, \cdot)$ выполняется векторный аналог принципа оптимальности в виде

$$\boldsymbol{\nu}(0, x^0) = \mathbf{Min} \left\{ \sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \boldsymbol{\nu}(t+1, x_{t+1}[\bar{\mathbf{u}}]) \middle| \bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_s\}_{s=0}^t, \bar{u}_s \in \mathcal{P}_s \right\}.$$

Доказательство. Для того, чтобы воспользоваться леммой 1.2, необходимо показать существование векторного минимума $\boldsymbol{\nu}(t+1, x_{t+1}) = \mathbf{Min}\mathcal{Z}(t+1, x_{t+1})$ в правой части равенства.

Пусть $\bar{z} \in \boldsymbol{\nu}(0, x^0) = \mathbf{Min}\mathcal{Z}(0, x^0)$, то есть не $\exists z \in \mathcal{Z}(0, x^0): z \leq \bar{z}$.

Запишем

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \sum_{s=0}^{T-1} \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_T) = \sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \\ &\quad + \sum_{s=t}^{T-1} \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_T) = \sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + z'. \end{aligned}$$

Предположим противное, пусть не $\exists \mathbf{MinZ}(t+1, x_{t+1})$, то есть

$$\forall \mathbf{u}' = \{u'_s\}_{s=t+1}^{T-1}, u'_s \in \mathcal{P}_s \quad \exists \mathbf{u}'' = \{u''_s\}_{s=t+1}^{T-1}, u''_s \in \mathcal{P}_s : \\ \mathcal{J}(t+1; \mathbf{x}'', \mathbf{u}'') = z'' \leq z' = \mathcal{J}(t+1; \mathbf{x}', \mathbf{u}').$$

Поскольку $\sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + z'' \in \mathcal{Z}(0, x^0)$ и

$$\sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + z'' \leq \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + z' = \bar{z},$$

приходим к противоречию с тем, что $\bar{z} \in \mathbf{MinZ}(0, x^0)$.

Таким образом, мы доказали, что из существования $\mathcal{V}(0, x^0)$ будет следовать существование всех границ Парето из условия (для рассматриваемых $t = 0, \dots, T$), и применение леммы 1.2 возможно. \blacksquare

2.3 Векторный аналог уравнения Беллмана

Рассмотрим теперь векторную функцию цены в произвольной точке (t, x) . Мы будем предполагать, что $0 \leq t \leq T$, а точка x — достижима в момент времени t , то есть $x \in \mathcal{X}[t]$. Выпуская траектории из этой точки и применяя рассуждения, аналогичные доказательству приведённого принципа оптимальности, получим векторный аналог классического уравнения Беллмана.

Предложение 2.2. Пусть граница Парето $\mathbf{MinZ}(0, x^0)$ множества достижимых из начальной позиции $(0, x^0)$ значений критерия (2.3) для системы (2.4) существует. Тогда введённая многомерная функция цены $\mathcal{V}(t, x)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{V}(t, x) = \mathbf{Min} \{ \mathcal{L}(t, x, u) + \mathcal{V}(t+1, f(t, x, u)) \mid u \in P_t \}, t = T-1, \dots, 0, \\ \mathcal{V}(T, \cdot) = \boldsymbol{\varphi}(\cdot). \end{cases} \quad (2.5)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную достижимую точку $\bar{x} \in \mathcal{X}[t]$ и рассмотрим поведение системы (2.1) на отрезке времени $t \leq s \leq T$:

$$\begin{cases} x_{s+1} = f(s, x_s, u_s), & s = t, \dots, T-1, \\ x_t = \bar{x}. \end{cases}$$

В силу векторного принципа оптимальности для момента времени $s = t$:

$$\mathcal{V}(t, \bar{x}) = \mathbf{Min} \{ \mathcal{L}(t, \bar{x}, u) + \mathcal{V}(t+1, x_{t+1}[u]) \mid \bar{u} \in \mathcal{P}_t \}.$$

Существование введённой векторной функции цены во всех промежуточных точках, таким образом, следует из доказательства принципа оптимальности.

Подставляя $x_{t+1}[u] = x_{t+1}(t, \bar{x}, u) = f(t, \bar{x}, u)$, получим исходное уравнение. ■

2.4 Условия применимости метода

Обсудим теперь условия применимости предложенного метода. Для этого определим условия, при которых граница множества достижимых из начальной позиции $(0, x^0)$ будет существовать.

Первым условием существования векторного минимума для паретовского порядка является ограниченность снизу. Поскольку количество слагаемых, входящих в $\mathcal{J}[0]$, конечно, достаточно потребовать ограниченности снизу каждого из них.

Условие замкнутости $\mathcal{Z}(0, x^0)$ в самом простом случае возможно определить, потребовав замкнутость множеств допустимых управлений в каждый момент времени и непрерывность для всех функций, зависящих от \mathbf{u} .

Однако подобный подход не позволит определить условия применимости предложенного векторного гамильтонова формализма к задачам, имеющим ограничения на компоненты \mathbf{x}_T на правом конце. Указанные ограничения могут быть учтены при использовании в качестве $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ индикаторной функции

следующего вида:

$$\mathcal{I}_T(x) = \begin{cases} \{0\}^p, & x \in T, \\ \{+\infty\}^p, & x \notin T, \end{cases}$$

где T — заданное целевое множество. Предполагается, что значения $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ в этом случае рассматриваются на расширенном пространстве p -мерных вещественных векторов $\bar{\mathbb{R}}^p = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^p$. Все операции с векторами при этом вводятся естественным образом.

С учётом этого замечания, сформулируем следующее утверждение.

Предложение 2.3. Пусть выполнены следующие условия:

1. функции $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$, $\mathcal{L}[\cdot]$ ограничены снизу (в смысле паретовского порядка), то есть $\exists M \in \mathbb{R}^p$:

$$M \leq \boldsymbol{\varphi}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$M \leq \mathcal{L}(t, x, u), \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m;$$

2. множества \mathcal{P}_t замкнуты, $t = 0, \dots, T-1$;
3. функции $f(t, x, u)$ и $L(t, x, u)$ непрерывны по (x, u) , $\forall t = 0, \dots, T-1$;
4. функция $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ — непрерывна либо представлена индикаторной функцией $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) \equiv \mathcal{I}_T(\cdot)$ некоторого замкнутого множества T .

Тогда существует граница Парето $\mathbf{Min} \mathcal{Z}(0, x^0)$ множества достижимых из начальной позиции $(0, x^0)$ значений критерия (2.3) для системы (2.1).

Доказательство. В силу ограниченности снизу функций $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ и $\mathcal{L}[\cdot]$ множество достижимых значений критерия $\mathcal{Z}(0, x^0)$ также будет ограничено снизу.

Покажем, что множество достижимых значений критерия замкнуто.

Действительно, в силу накладываемых условий непрерывности функция $\sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{L}(t, x_t, u_t)$ непрерывно зависит от $\{u_t\}_{t=0}^{T-1}$. Тогда в случае, когда функция $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ непрерывна, весь векторный функционал $\mathcal{J}(0, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ непрерывно зависит от \mathbf{u} , и его образ замкнут, поскольку замкнуты \mathcal{P}_t .

Рассмотрим теперь случай, когда $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) \equiv \mathcal{I}_T(\cdot)$. В случае, когда множество T не является достижимым в момент времени T , то есть

$$T \cap \mathcal{X}(T; 0, x^0) = \emptyset,$$

функционал $\mathcal{J}[0]$ принимает единственное значение $\{+\infty\}^p$, то есть множество его значений замкнуто. В случае же, когда T — достижимо, вследствие всех ограничений на замкнутость и непрерывность, накладываемых на систему, множество $\{\mathcal{J}(0, \mathbf{x}, \mathbf{u}) | x_T \in \mathcal{X}[T]\}$ будет замкнуто. Поскольку значение $\{+\infty\}^p$ доминируется по Парето любым его элементом, его можно исключить из рассмотрения.

Таким образом, доказано, что $\mathcal{Z}(0, x^0)$ замкнуто при выполнении указанных условий. ■

2.5 Построение гарантированных оценок границы Парето

2.5.1 Достаточные условия отыскания функции цены

Зададимся теперь вопросом отыскания функции цены из векторного уравнения Беллмана (2.5). Предложение 2.2 определяет только необходимые условия для введённой функции цены $\boldsymbol{\nu}(t, x)$. Возможно ли каким-то образом сформулировать достаточные условия для её нахождения? Этот вопрос остаётся открытым.

Рассмотрим следующий пример, демонстрирующий, что напрямую из уравнения Беллмана (2.5) решение исходной задачи (2.4) может быть получено не всегда.

Пример 2.1. Рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + u_t, t = 0, 1, 2, \\ x_0 = 0, \\ u_t \in [-1, 1], \end{cases} \quad (2.6)$$

с векторным критерием качества в форме Майера-Больца:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ \sum_{t=0}^2 x_t^2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Min}.$$

Первая компонента функционала содержит только терминальную часть, в то время как вторая — только интегральную.

Система такого простого вида была подобрана для примера специально. Как мы увидим далее, двух шагов по данной разностной схеме достаточно для демонстрации исследуемого эффекта.

Мы можем построить достаточно точную аппроксимацию множества достижимых значений функционала $\mathcal{Z}(0, 0)$ численно, перебрав всевозможные управления u_t на мелкой сетке, поскольку

$$\mathcal{Z}(0, x^0) = \left\{ \begin{pmatrix} -(u_0 + u_1 + u_2) \\ u_0^2 + (u_0 + u_1)^2 \end{pmatrix} \middle| u_t \in [-1, 1] \right\}.$$

Результат численного построения в системе *Matlab* приведён на рисунке 2.1. При расчёте использована равномерная сетка на отрезке $[-1; 1]$ с шагом $d = 1\text{E} - 2$. Граница Парето получена посредством перебора всех граничных точек аппроксимации $\mathcal{Z}(0, 0)$ и их покомпонентного сравнения.

Получим теперь решение векторного уравнения Беллмана (2.5). Подставляя данные задачи, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(3, x) &= (-x) \\ \mathcal{V}(2, x) &= \mathbf{Min} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \mathcal{V}(3, x + u_2) \right\} = \mathbf{Min} \begin{pmatrix} -(x + u_2) \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x + 1) \\ x^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(1,x) &= \mathbf{Min} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \mathcal{V}(2,x+u_1) \right\} = \mathbf{Min} \left\{ \begin{pmatrix} -(x+u_1+1) \\ x^2 + (x+u_1)^2 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{V}(1,x) &= \left\{ \begin{pmatrix} -(x+u_1) \\ (x+u_1)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ x^2 \end{pmatrix} \middle| u_1 \in [0,1] \right\}. \\ \mathcal{V}(0,x) &= \mathbf{Min} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x+u_0+u_1) \\ (x+u_0+u_1)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ (x+u_0)^2 \end{pmatrix} \middle| u_1 \in [0,1] \right\} \end{aligned}$$

Подставляя $x = 0$, получим решение уравнения (2.5):

$$\mathcal{V}(0,0) = \left\{ \begin{pmatrix} -u_0 \\ 2(u_0 + u_1/2)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_2 - u_1 \\ u_1/2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} u_2 = 1, \\ u_1 \in [0,1], \\ u_0 \in [-\frac{u_1}{2}, 1] \end{array} \right\}.$$

Построим полученное множество $\mathcal{V}(0,0)$ при помощи *Matlab*. Для расчёта была взята равномерная сетка по u_t с шагом $d = 1\text{E} - 2$. Множество значений функционала, отвечающих управлениям, заданным на указанной сетке, изображено на рисунке 2.2.

Проанализируем полученный результат. Как можно видеть, полученное множество $\mathcal{V}(0,0)$ не является решением исходной задачи оптимизации управления — оно не является границей Парето. Тем не менее, векторные минимумы $\mathcal{V}(0,0)$ и $\mathcal{Z}(0, x^0)$ совпадают. Это связано с доказанным ранее предложением 2.2: искомая граница Парето удовлетворяет уравнению (2.5) и поэтому вложена в полученное в ходе его разрешения $\mathcal{V}(0,0)$.

Таким образом, приведённый пример подтверждает, что векторное уравнение Беллмана является необходимым условием отыскания минимума в задаче (2.4), но не является достаточным (по крайней мере, без наложения дополнительных ограничений).

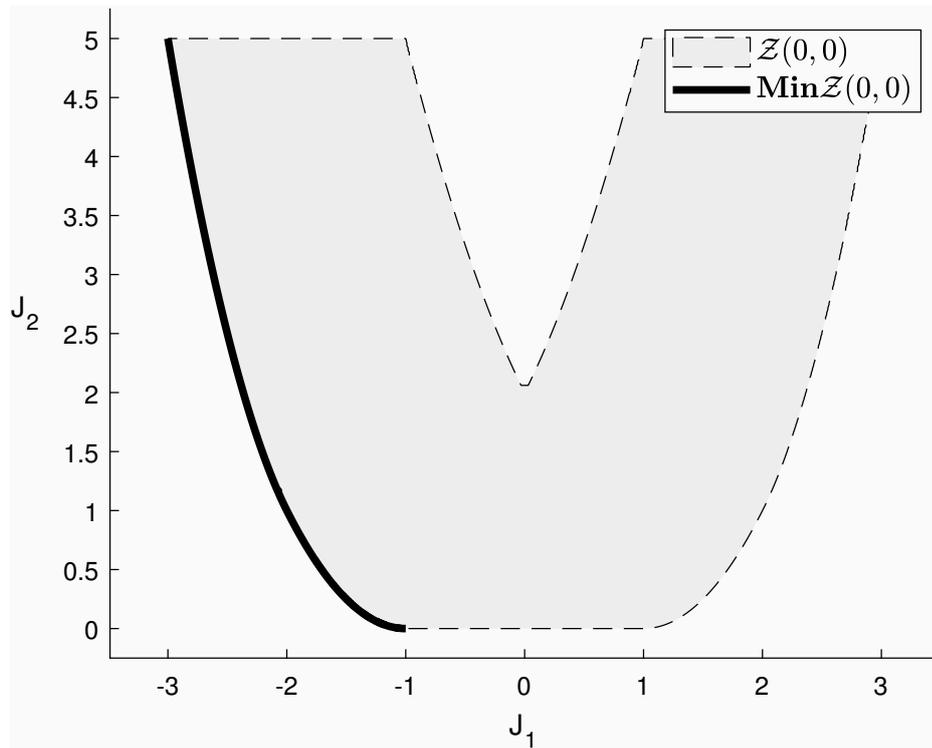


Рисунок 2.1 — Множество достижимых значений критерия $\mathcal{Z}(0,0)$ и его граница Парето для системы (2.6)

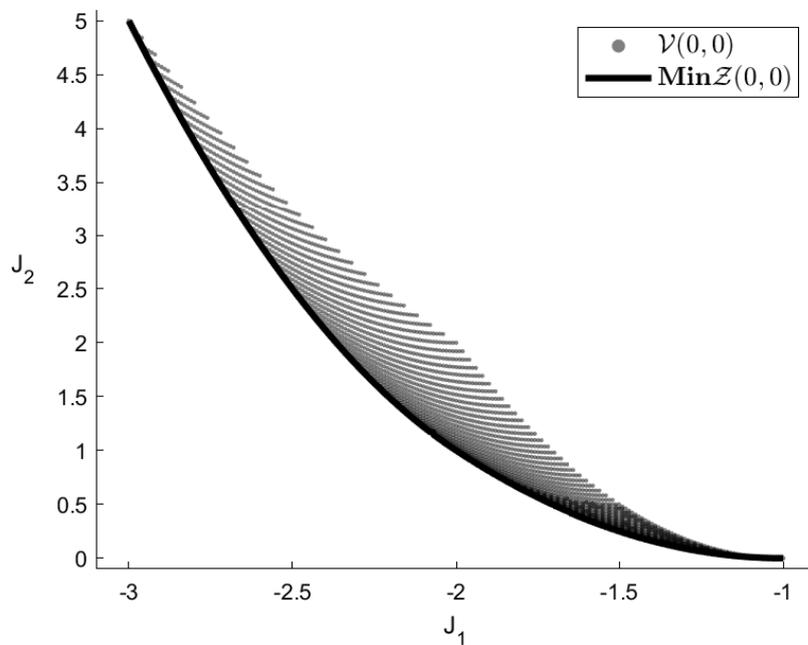


Рисунок 2.2 — Сравнение решения $\mathcal{V}(0,0)$ векторного уравнения Беллмана (2.5) с истинной границей Парето $\mathbf{Min}\mathcal{Z}(0,0)$ для системы (2.6)

2.5.2 Гарантированное точечное оценивание

Рассмотренный пример демонстрирует необходимость в разработке метода, позволяющего получить некоторую гарантированную оценку искомой границы Парето. В случае, когда допустимо ослабить формулировку задачи и отыскать не все, а хотя бы некоторые допустимые стратегии управления \bar{u} , приводящие критерий $\mathcal{J}[0]$ на границу Парето его значений, представляется удобным использование метода гарантированного точечного оценивания.

Идея этого метода состоит в построении проектора специального вида

$$p : Par(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

ставящего в соответствие заданной границе Парето некоторую его точку таким образом, чтобы выполнялся некоторый скаляризованный аналог полученного векторного уравнения Беллмана (2.5). Предполагается, что подобный аналог будет иметь единственное решение, отыскание которого не требует построения всей границы Парето. Здесь $Par(\mathbb{R}^p)$ — подмножество всех границ Парето в пространстве $2^{\mathbb{R}^p}$.

Какими свойствами обладает искомый проектор $p(\cdot)$? Из определения следует, что

$$p(Z) \in \mathbf{Min}Z, \quad \forall Z \in Par(\mathbb{R}^p).$$

Кроме того, дополнительно потребуем, чтобы следующее соотношение было верным для всех $t = 1, \dots, T$:

$$p \left(\mathbf{Min} \left\{ \sum_{s=0}^{t-1} \mathcal{L}[s] + p(\mathbf{v}(t, x_t)) \right\} \right) = p \left(\mathbf{Min} \left\{ \sum_{s=0}^{t-1} \mathcal{L}[s] + \mathbf{v}(t, x_t) \right\} \right),$$

где $\mathcal{L}[s] = \mathcal{L}(s, x_s, u_s)$.

Выполнение указанных условий позволит заменить $\mathbf{v}(t, x)$ в векторном уравнении Беллмана (2.5) на значение $p(\mathbf{v}(t, x))$ и использовать полученные ранее соотношения для построения точечной оценки границы Парето.

Рассмотрим следующий вспомогательный оператор проекции по i -ой координате:

$$\min_i : 2^{\mathbb{R}^p} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p},$$

действие которого для каждого $Z \in 2^{\mathbb{R}^r}$ задается соотношением:

$$\min_i Z = \{\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p)' \in Z \mid \bar{z}_i = \min \{z_i \mid z = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_p) \in Z\}\}.$$

Указанный проектор понижает размерность многообразия Z на 1, фиксируя минимальное (в скалярном смысле) значение i -ой координаты векторов из Z . Объединив вместе p таких операторов, получим проектор следующего вида:

$$p(Z) = \min_{i_r} \dots \min_{i_2} \min_{i_1} Z, \quad i_j = 1, \dots, p, \text{ где } i_l \neq i_k \text{ при } l \neq k. \quad (2.7)$$

При этом, меняя порядок проекторов \min_{i_j} , можно получить до $p!$ различных точек искомого векторного минимума. Их количество будет существенно зависеть от формы этой паретовской границы.

Покажем, что построенное отображение $p(Z)$ удовлетворяет требованиям, накладываемым на искомый проектор.

Лемма 2.1. *Для произвольного множества $Z \in \text{Par}(\mathbb{R}^p)$ справедливо*

$$p(Z) \in \mathbf{Min}Z.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, положим $i_j = j, j = 1, \dots, r$. Соотношение $p(Z) \in Z$ следует из построения, покажем, что $p(Z) \in \mathbf{Min}Z$. Обозначим $\hat{z} = p(Z)$.

Предположим противное, пусть

$$\exists \bar{z} \in Z: \bar{z} \leq \hat{z}.$$

Тогда, из определения паретовского порядка, выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} \bar{z} \neq \hat{z}, \\ \bar{z}_i \leq \hat{z}_i, \quad i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

По построению $\hat{z}_1 \leq z_1, \forall z \in Z$, тогда $\bar{z}_1 = \hat{z}_1$.

Из определения $\hat{z} = p(Z)$ следует, что $\hat{z}_2 \leq z_2, \forall z \in Z: z_1 = \hat{z}_1$. Следовательно, $\bar{z}_2 = \hat{z}_2$.

Продолжая цепочку рассуждений, получим

$$\bar{z}_i = \hat{z}_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

что влечёт $p = \bar{x}$ и приводит нас к противоречию. ■

Лемма 2.2. Пусть задано отображение $F : U \rightarrow \text{Par}(\mathbb{R}^p)$, где U — некоторое множество произвольной природы. Тогда для построенного проектора (2.7) выполнено соотношение

$$p\left(\bigcup_{u \in U} F(u)\right) = p\left(\bigcup_{u \in U} p(F(u))\right).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, снова положим $i_j = j, j = 1, \dots, r$.

Пусть $\hat{z} = p\left(\bigcup_u F(u)\right)$ и $\bar{z} = p\left(\bigcup_u p(F(u))\right)$.

С одной стороны, из леммы 2.1 следует, что $\forall u \in U$

$$p(F(u)) \in F(u),$$

что влечёт вложение

$$\bigcup_u p(F(u)) \subseteq \bigcup_u F(u).$$

Тогда по определению (2.7) оператора $p(\cdot)$

$$\hat{z}_1 \leq z_1, \quad \forall z \in \bigcup_u F(u),$$

откуда следует, $\hat{z}_1 \leq \bar{z}_1$.

С другой стороны, из выбора \hat{z} следует, что $\exists \hat{u}: \hat{z} = F(\hat{u})$, то есть

$$\hat{z} \in \bigcup_u p(F(u)).$$

Снова применяя определение $p(\cdot)$, получим

$$\bar{z}_1 \leq z_1, \quad \forall z \in \bigcup_u p(F(u)),$$

то есть $\bar{z}_1 \leq \hat{z}_1$.

Объединяя полученные неравенства, получим $\hat{z}_1 = \bar{z}_1$.

Поочерёдно перебирая координаты \hat{z}_i и \bar{z}_i аналогичным доказательству леммы 2.1 образом, получим следующее соотношение:

$$\hat{z}_i = \bar{z}_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

Отсюда следует, что $\hat{z} = \bar{z}$. ■

Расширим теперь область определения проектора $p(\cdot)$ до множества всех подмножеств \mathbb{R}^p , для которых существует граница Парето. При таком определении доказанные леммы также будут справедливы и, как следствие, будет выполняться соотношение

$$p(Z) = p(\mathbf{Min}Z).$$

Введём теперь в рассмотрение функцию

$$\mathbf{v}(t, x) = p(\mathbf{V}(t, x)).$$

Приведённые выше рассуждения позволяют записать скаляризованный аналог векторного уравнения Беллмана (2.5).

Предложение 2.4. Пусть выполнены все условия предложения 2.2.

Тогда для введённой проекции $\mathbf{v}(t, x)$ выполняется аналог уравнения Беллмана в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t, x) = p(\{\mathcal{L}(t, x, u) + \mathbf{v}(t+1, f(t, x, u)) | u_t \in \mathcal{P}_t\}), & t = T-1, \dots, 0, \\ \mathbf{v}(T, \cdot) = p(\boldsymbol{\varphi}(\cdot)). \end{cases} \quad (2.8)$$

Найденная в ходе решения уравнения (2.8) точка $\mathbf{v}(0, x^0)$ будет принадлежать точной границе Парето для рассматриваемой задачи оптимизации (2.4).

$$\mathbf{v}(0, x^0) \in \mathbf{Min} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{L}(t, x_t, u_t) + \boldsymbol{\varphi}(x_T) \right\}.$$

2.5.3 Обсуждение метода

Основным преимуществом метода является возможность отыскания конечного числа точек точной границы Парето, без построения каких-либо аппроксимаций. Кроме того, подход существенно упрощает построение синтеза за счет изменения характера вычислений: на каждом шаге решения уравнения (2.8) необходимо решить не более p задач скалярной минимизации, в то время как при решении векторного уравнения Беллмана (2.5) на каждом шаге требуется построить границу Парето некоторого параметрически заданного множества. Последняя операция представляется более трудоёмкой по сравнению со скалярной оптимизацией, в том числе из-за высокой требовательности векторного уравнения Беллмана к используемым аппроксимациям векторного минимума.

С точки зрения интерпретации, предложенный метод может использоваться в случае, когда при невозможности использования взвешенной свёртки функционалов, определяющих критерии качества, эти критерии возможно ранжировать по убыванию степени важности. В этом случае решение, получаемое за счёт построения описанной точечной оценки паретовского фронта, будет являться точным решением поставленной задачи векторной минимизации.

2.6 Применимость для произвольных порядков

Рассмотрим теперь возможность применения предложенного векторного гамильтонова формализма для пространств (\mathbb{R}^p, \prec) с порядком, отличным от паретовского.

Поскольку векторный принцип оптимальности и аналог уравнения Беллмана опираются в своём доказательстве только на леммы 1.1 и 1.2, в соответ-

ствии с разделом 1.3 для формулирования их аналогов необходимо потребовать, чтобы структура доминирования, соответствующая рассматриваемому порядку, была постоянной: $D \equiv \text{const}$. Определим тогда функцию цены следующим образом:

$$\mathbf{V}(t, x) = \mathcal{E}(\mathcal{Z}(t, x), D).$$

Задача минимизации в данном случае будет пониматься уже в смысле рассматриваемого порядка \prec , а не паретовского.

Предложение 2.5. Пусть отношение порядка в частично упорядоченном пространстве (\mathbb{R}^p, \prec) определяется структурой доминирования $D \equiv \text{const}$. Пусть, кроме того, для множества достижимых из начальной позиции $(0, x^0)$ значений критерия (2.3) для системы (2.4) выполняется соотношение $\mathcal{E}(\mathcal{Z}(0, x^0), D) \neq \emptyset$.

Тогда для введённой векторной функции цены $\mathbf{V}(\cdot, \cdot)$ выполняется векторный аналог принципа оптимальности в виде

$$\mathbf{V}(0, x^0) = \mathcal{E} \left(\left\{ \sum_{s=0}^t \mathcal{L}(s, \bar{x}_s, \bar{u}_s) + \mathbf{V}(t+1, x_{t+1}[\bar{\mathbf{u}}]) \mid \bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_s\}_{s=0}^t, \bar{u}_s \in \mathcal{P}_s \right\}, D \right).$$

Кроме того, для неё справедлив аналог классического уравнения Беллмана в виде

$$\begin{cases} \mathbf{V}(t, x) = \mathcal{E}(\{\mathcal{L}(t, x, u) + \mathbf{V}(t+1, f(t, x, u)) \mid u \in P_t\}, D), t = T-1, \dots, 0, \\ \mathbf{V}(T, \cdot) = \boldsymbol{\varphi}(\cdot). \end{cases}$$

При этом отметим, что смена рассматриваемого порядка не влияет на условия применимости метода, описанные в предложении 2.3.

Однако метод точечного оценивания, предложенный в предыдущем разделе, не может быть применён в пространстве с произвольным порядком \prec без дополнительного исследования. Предположительно, все доказанные результаты должны сохраняться при $D \subset \mathbb{R}_+^p$, но на момент подготовки работы вопрос остаётся открытым.

2.7 Примеры

Пример 2.2. Рассмотрим систему из примера 2.1:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + u_t, t = 0, 1, 2, \\ x_0 = 0, \\ u_t \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Построим все возможные точечные оценки границы Парето множества значений функционала

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ \sum_{t=0}^2 x_t^2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Min}.$$

Поскольку размерность критерия $p = 2$, всего возможно получить не более двух оценок.

Обозначим $v_{12} = \min_1 \min_2 \mathcal{V}(t, x)$. Решим уравнение (2.8).

$$\begin{aligned} v_{12}(3, x) &= \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_{12}(2, x) &= \min_1 \min_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x + u_2) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -(x + 1) \\ x^2 \end{pmatrix} \\ v_{12}(1, x) &= \min_1 \min_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x + u_1 + 1) \\ (x + u_1)^2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -(x + 1) \\ 2x^2 \end{pmatrix} \\ v_{12}(0, x) &= \min_1 \min_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x + u_0 + 1) \\ 2(x + u_0)^2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -(x + 1) \\ 3x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Полученному решению отвечает следующая стратегия управления:

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 0, \\ u_2 = 1. \end{cases}$$

Обозначим теперь $v_{21} = \min_2 \min_1 \mathbf{V}(t, x)$ и решим систему для этого проектора $p(\cdot)$:

$$v_{21}(3, x) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{21}(2, x) = \min_2 \min_1 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x + u_2) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -(x + 1) \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$v_{21}(1, x) = \min_2 \min_1 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x + u_1 + 1) \\ (x + u_1)^2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -(x + 2) \\ x^2 + (x + 1)^2 \end{pmatrix}$$

$$v_{21}(0, x) = \min_2 \min_1 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x + u_0 + 2) \\ (x + u_0)^2 + (x + u_0 + 1)^2 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(x + 3) \\ x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 \end{pmatrix}$$

Полученная при этом стратегия управления:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ u_2 = 1. \end{cases}$$

Применив математическую индукцию, возможно определить вид стратегии управления и вид точечных оценок для рассматриваемых системы и векторного функционала для любого наперёд заданного T (в данном примере $T = 2$):

$$v_{12}(0, x) = \begin{pmatrix} -(x + 1) \\ Tx^2 \end{pmatrix}$$

$$v_{21}(0, x) = \begin{pmatrix} -(x + T) \\ \sum_{t=0}^{T-1} (x + t)^2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, метод построения гарантированных точечных оценок границы Парето в рассматриваемой задаче позволяет не только отыскать

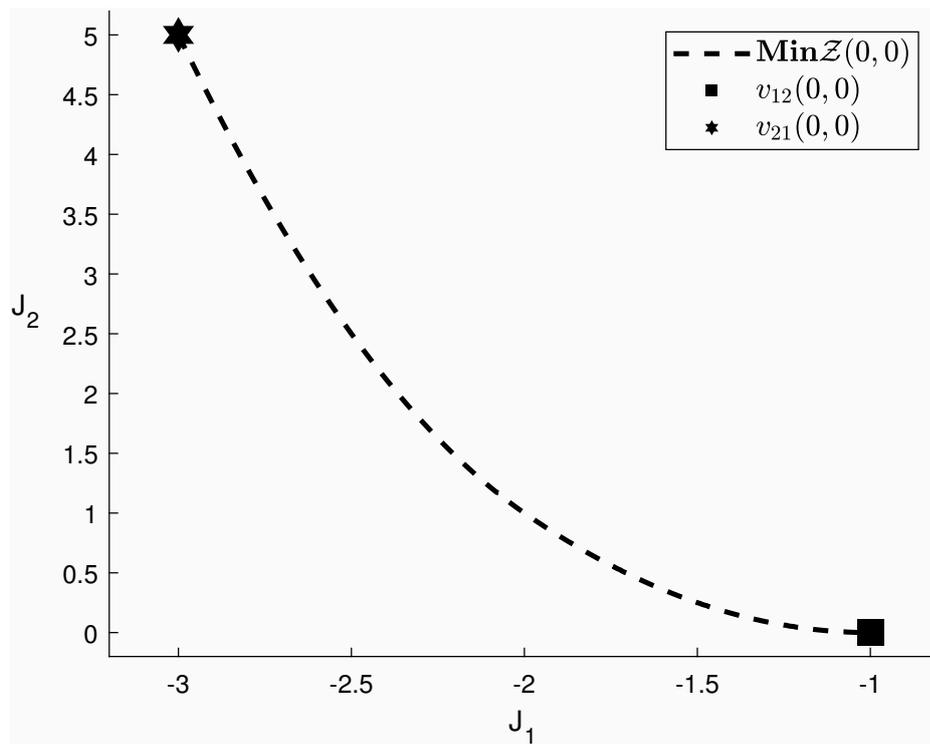


Рисунок 2.3 — Сравнение истинной границы Парето $\text{MinZ}(0,0)$ для системы (2.6) и полученных гарантированных точечных оценок

решение задачи на заданном промежутке времени, но и описать его поведение в будущем.

Глава 3. Векторный гамильтонов формализм для динамических систем с непрерывным временем

Введение

Данная глава посвящена исследованию задачи минимизации векторного функционала для динамических систем с геометрическими ограничениями на управления в непрерывном времени. Демонстрируется, что решение указанной задачи также может быть получено путём применения векторного гамильтонова формализма, сформулированного в главе 1 для дискретных систем. Для непрерывного случая также вводится векторная функция цены, для которой строятся аналоги принципа оптимальности и классического уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана. Обосновываются условия применимости предложенного метода.

Далее рассматривается задача построения прямого и попятного множеств достижимости для динамических систем в непрерывном времени при помощи предложенного векторного гамильтонова формализма. Демонстрируется связь полученного решения с классическим решением указанных задач.

В заключительной части главы исследуется вопрос справедливости полученных результатов в пространствах с порядком, отличным от паретовского.

При работе над данным разделом диссертации использованы публикации автора [14; 35], в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

3.1 Постановка задачи

Рассматривается динамическая система с непрерывным временем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & t \in [t_0, \vartheta], \\ x(t_0) = x^0, \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (3.1)$$

с непустыми геометрическими ограничениями на управление

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad t \in [t_0, \vartheta] \quad (3.2)$$

и векторным функционалом в форме Майера-Больца следующего вида:

$$\mathcal{J}(t, x(\cdot), u(\cdot)) = \int_t^{\vartheta} \mathcal{L}(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \boldsymbol{\varphi}(x(\vartheta)). \quad (3.3)$$

Здесь, как и в дискретном случае, все указанные отображения принимают значения в пространстве \mathbb{R}^p :

$$\mathcal{J}(t, x(\cdot), u(\cdot)) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1(t, x(\cdot), u(\cdot)) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_p(t, x(\cdot), u(\cdot)) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}(\tau, x, u) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(\tau, x, u) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_p(\tau, x, u) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{bmatrix}.$$

Геометрические ограничения на допустимые стратегии управления определяются компактозначной функцией $\mathcal{P}(\cdot)$, непрерывной по Хаусдорфу.

Необходимо отыскать допустимую стратегию управления $u(\cdot)$, $u(t) \in \mathcal{P}(t)$, приводящую значения функционала (3.3) на границу Парето его значений в начальный момент времени:

$$\mathcal{J}(t_0, x(\cdot), u(\cdot)) \rightarrow \mathbf{Min}. \quad (3.4)$$

Более формальная формулировка постановки задачи звучит следующим образом.

Задача оптимизации управления движением динамической системы (3.1) с векторным функционалом в форме (3.3) при ограничениях на управление (3.2) состоит в отыскании всех допустимых стратегий управления $u(\cdot)$, $u(t) \in \mathcal{P}(t)$, приводящих критерий на границу Парето его достижимых значений:

$$\mathcal{J}(t_0, x(\cdot; t_0, x^0, u(\cdot)), u(\cdot)) \in \mathbf{Min}\mathcal{Z}(t_0, x^0).$$

В указанной формулировке, как и в дискретном случае, использовано обобщение понятия множества достижимости рассматриваемой системы (см. [38]) в пространстве значений функционала \mathcal{J} .

Определение 3.1. Множеством достижимости динамической системы (3.1) при жёстких ограничениях на управление (3.2) в момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ будем называть совокупность векторов

$$\mathcal{X}(t; t_0, x^0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists u(\cdot), u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau): x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \right\},$$

где под $x(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ понимается положение в момент времени t траектории системы (3.1), выпущенной из позиции (t_0, x^0) и отвечающей стратегии управления $u(\cdot)$.

Определение 3.2. Множеством значений критерия (3.3), достижимых из позиции t, x на траекториях системы (3.1) при жёстких ограничениях на управление (3.2) будем называть

$$\mathcal{Z}(t, x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^p \mid \exists u(\cdot), u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau): \mathcal{J}(\vartheta, x(\cdot; t, x, u(\cdot)), u(\cdot)) = z \right\},$$

где под $x(\cdot; t, x, u(\cdot))$ понимается траектория системы (3.1), выпущенная из позиции (t, x) и отвечающая стратегии управления $u(\cdot)$.

3.2 Векторный аналог принципа оптимальности

Для задачи с непрерывным временем также возможно сформулировать векторные аналоги принципа оптимальности и уравнения Гамильтона-Якоби-

Беллмана. Принцип оптимальности при этом примет схожую форму. Для построения аналога уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана же, ввиду невозможности взятия производной от рассматриваемого многозначного функционала, необходимо использовать форму эволюционного уравнения.

Как и в дискретном случае, определим векторную функцию цены следующим образом.

Определение 3.3. *Векторной функцией цены для задачи минимизации векторного критерия (3.4) будем называть отображение, ставящее в соответствие позиции (t, x) паретовский фронт множества достижимых из этой точки значений критерия (3.3):*

$$\mathbf{V}(t, x) = \mathbf{MinZ}(t, x).$$

Следуя рассуждениям, аналогичным приведённым при доказательстве векторного принципа оптимальности для системы с дискретным временем (предложение 2.1), получим следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть граница Парето $\mathbf{MinZ}(t_0, x^0)$ множества достижимых из начальной позиции (t_0, x^0) значений критерия (3.3) для системы (3.4) существует. Тогда для любого фиксированного момента времени $t \in [t_0, \vartheta]$ для введённой векторной функции цены $\mathbf{V}(\cdot, \cdot)$ выполняется векторный аналог принципа оптимальности в виде*

$$\mathbf{V}(t_0, x^0) = \mathbf{Min} \left\{ \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}(\tau)) d\tau + \mathbf{V}(t, \bar{x}[t]) \left| \bar{u}(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \right. \right\},$$

где под $\bar{x}[t] = x(t; t_0, x^0, \bar{u}(\cdot))$ понимается положение в момент времени t траектории системы (3.1), выпущенной из позиции (t_0, x^0) и отвечающей стратегии управления $\bar{u}(\cdot)$.

Доказательство. Покажем, что векторный минимум $\mathbf{V}(t, x[t]) = \mathbf{MinZ}(t, x[t])$ в правой части равенства существует.

Пусть $\bar{z} \in \mathbf{V}(t_0, x^0) = \mathbf{MinZ}(t_0, x^0)$, то есть не $\exists z \in \mathcal{Z}(t_0, x^0): z \leq \bar{z}$.

Аналогично дискретному случаю, запишем

$$\bar{z} = \int_{t_0}^{\vartheta} \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}[\tau]) d\tau + \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}[\vartheta]) = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}[\tau]) d\tau +$$

$$\int_t^{\vartheta} \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}[\tau]) d\tau + \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}[\vartheta]) = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}[\tau]) d\tau + z'.$$

Предположим противное. Пусть не существует граница Парето для множества $\mathcal{Z}(t_0, x^0)$, то есть

$$\forall u'(\cdot), u'(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \quad \exists u''(\cdot), u''(\tau) \in \mathcal{P}(\tau):$$

$$\mathcal{J}(t; x''(\cdot), u''(\cdot)) = z'' \leq z' = \mathcal{J}(t; x'(\cdot), u'(\cdot)).$$

Тогда

$$\int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}[\tau]) d\tau + z'' \leq \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}[\tau]) d\tau + z',$$

что противоречит изначальному выбору z' .

Полученное противоречие подтверждает существование границы Парето $\text{Min}\mathcal{Z}(t_0, x^0)$. ■

3.3 Векторный аналог уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

Перейдём теперь к рассмотрению введённой векторной функции цены в произвольной точке (t, x) . Как и в дискретном случае, мы будем предполагать, что $t \in [t_0, \vartheta]$ и точка x — достижима в момент времени t , то есть $x \in \mathcal{X}[t]$.

Рассмотрим вспомогательную систему следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(\tau, x, u), & \tau \in [t, \vartheta], \\ x(t) = \bar{x}. \end{cases}$$

Зафиксируем произвольное $\sigma \in (0, \vartheta - t]$. Тогда из векторного принципа оптимальности (3.1) следует, что

$$\mathbf{V}(t, \bar{x}) = \mathbf{Min} \left\{ \int_t^{t+\sigma} \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}(\tau)) d\tau + \mathbf{V}(t + \sigma, \bar{x}[t + \sigma]) \left| \bar{u}(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \right. \right\}.$$

Устремляя значение σ к нулю, получим векторный аналог уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в форме эволюционного уравнения.

Предложение 3.2. Пусть граница Парето множества достижимых значений $\mathcal{Z}(t_0, x^0)$ критерия (3.3) для системы (3.4) существует. Тогда введённая многомерная функция цены $\mathbf{V}(t, x)$ удовлетворяет следующему эволюционному уравнению:

$$\begin{cases} \lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{1}{\sigma} \mathbf{h} \left(\mathbf{V}(t, x), \mathbf{Min} \left\{ \int_t^{t+\sigma} \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}(\tau)) d\tau + \mathbf{V}(t + \sigma, \bar{x}[t + \sigma]) \right\} \right) = 0, \\ \mathbf{V}(\vartheta, \cdot) = \boldsymbol{\varphi}(\cdot), \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\bar{u}(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$, а под $\bar{x}[\cdot] = x(\cdot; t, x, \bar{u}(\cdot))$ понимается траектория системы (3.1), выпущенная из позиции (t, x) и отвечающая стратегии управления $\bar{u}(\cdot)$.

Под $\mathbf{h}(\cdot, \cdot)$ в последней системе понимается метрика Хаусдорфа. Напомним её определение.

Определение 3.4. Хаусдорфово расстояние между множествами X и Y задаётся отображением

$$\mathbf{h}(X, Y) = \max \{ \mathbf{h}_+(X, Y), \mathbf{h}_+(Y, X) \},$$

где $\mathbf{h}_+(X, Y) = \min \{ \varepsilon \mid X \subseteq B_\varepsilon(Y) \}$ — полуметрика Хаусдорфа.

Замечание 3.1. Эволюционное уравнение 3.5 также справедливо при использовании хаусдорфовой полуметрики $\mathbf{h}_+(\cdot, \cdot)$ в качестве меры расстояния между множествами.

3.4 Условия применимости метода

Уточним условия применимости предложенного метода. Так же, как и в дискретном случае, не будем требовать от критерия \mathcal{J} конечности, предполагая, что он может принимать значения на расширенном пространстве p -мерных вещественных векторов $\overline{\mathbb{R}}^p = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^p$.

Предложение 3.3. Пусть выполнены следующие условия:

1. функции $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$, $\mathcal{L}[\cdot]$ ограничены снизу (в смысле паретовского порядка), то есть $\exists M \in \mathbb{R}^p$:

$$M \leq \boldsymbol{\varphi}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$M \leq \mathcal{L}(t, x, u), \quad \forall t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m;$$

2. функции $f(t, x, u)$ и $L(t, x, u)$ непрерывны по (x, u) , для почти всех $\forall t \in [t_0, \vartheta]$;
3. функция $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ — непрерывна либо представлена индикаторной функцией $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) \equiv \mathcal{I}_T(\cdot)$ некоторого замкнутого множества T .

Тогда существует граница Парето $\mathbf{Min}\mathcal{Z}(t_0, x^0)$ множества достижимых из начальной позиции (t_0, x^0) значений критерия (3.3) для системы (3.1).

Доказательство. Для доказательства существования указанного векторного минимума продемонстрируем ограниченность снизу и замкнутость множества $\mathcal{Z}(t_0, x^0)$. Ограниченность следует из условия 1, поскольку все компоненты векторного функционала ограничены.

Из непрерывной зависимости решения $x(\cdot)$ системы (3.1) от управления $u(\cdot)$ и непрерывной зависимости $L(t, x, u)$ от (x, u) следует непрерывная зависимость интегральной части функционала от выбранной стратегии управления. Учитывая ограничения, накладываемые на отображение $\mathcal{P}(\cdot)$, получаем замкнутость множества значений интегральной части.

С учётом последнего утверждения, в случае, когда терминальная часть $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ непрерывна, замкнутость $\mathcal{Z}(t_0, x^0)$ очевидна.

Случай, когда $\varphi(\cdot) \equiv \mathcal{I}_T(\cdot)$, рассматривается аналогично тому, как это было сделано для систем с дискретным временем. Если $\mathcal{X}[\vartheta] \cap T = \emptyset$, всё множество достижимых критерий вырождается в одну точку: $\mathcal{Z}(t_0, x^0) = \{+\infty\}^p$. Если же множество достижимо, то в силу наложенных ограничений множество $\mathcal{X}[\vartheta] \cap T$ будет компактно, что также влечёт замкнутость $\mathcal{Z}(t_0, x^0)$. ■

3.5 Векторный подход к построению множеств достижимости и разрешимости

Изучим вопрос применимости векторного гамильтонова формализма к решению задач отыскания прямых и попятных множеств достижимости. Отметим, что все результаты этого раздела также возможно перенести на случай динамических систем с дискретным временем.

3.5.1 Задача отыскания множества достижимости

Постановка задачи

Рассматривается динамическая система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & t \in [t_0, \vartheta], \\ u(t) \in \mathcal{P}(t), \end{cases} \quad (3.6)$$

с начальным условием

$$x_0 \in \mathcal{X}^0. \quad (3.7)$$

Обобщим данное ранее определение множества достижимости (определение 3.1) на случай, когда начальное условие задано множеством.

Определение 3.5. *Множеством достижимости системы (3.6) в момент времени t с начальным условием вида (3.7) будем называть*

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists x^0 \in \mathcal{X}^0, \exists u(\cdot), u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau): x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \right\},$$

где под $x(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ понимается положение траектории системы (3.10), выпущенной из позиции (t_0, x^0) и отвечающей стратегии управления $u(\cdot)$.

Это определение также можно записать в альтернативной форме:

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \bigcup_{x^0 \in \mathcal{X}^0} \mathcal{X}(t; t_0, x^0).$$

Задача достижимости для указанной системы (3.6) с начальным условием (3.7) заключается в отыскании её множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$ в произвольный момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$.

Классическое решение

Для решения подобных задач удобно применять гамильтонов формализм. Классический подход подробно описан в [38]. Он заключается в решении вспомогательной задачи минимизации с функцией цены вида

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u(\cdot), x^0} \{ d^2(x^0, \mathcal{X}^0) \mid x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \} = \\ &= \min \{ d^2(x^0, \mathcal{X}^0) \mid x \in \mathcal{X}(t; t_0, x^0) \}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $d^2(x, Z) = \min \{ \langle x - z, x - z \rangle \mid z \in Z \}$ — квадрат декартова расстояния от точки до множества.

Введение подобной вспомогательной задачи мотивировано тем, что исходная задача отыскания множеств достижимости не является оптимизационной и не может быть напрямую решена с использованием гамильтонова формализма.

Связь решения вспомогательной задачи с функцией цены вида (3.8) с решением исходной задачи достижимости устанавливается следующим соотношением.

Теорема 3.1. *Множество достижимости системы (3.6) в момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ является множеством уровня 0 введённой производной функции цены (3.8):*

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x: V(t, x) \leq 0\}.$$

Доказательство этой теоремы также приводится в [38].

Таким образом, отыскав введённую функцию цены и рассмотрев её множества уровня 0 в произвольный момент времени t , возможно получить искомое множество достижимости. В случае, когда начальное множество \mathcal{X}^0 имеет достаточно простую форму (например, эллипсоид), классический метод позволяет достаточно быстро найти решение или же его аппроксимацию. Построение внутренних и внешних оценок множества достижимости возможно за счёт использования эллипсоидальных аппроксимаций. Этот метод хорошо изучен, его исчерпывающее описание приводится в [38].

Для решения же задач со сложным начальным условием предлагается использовать векторный гамильтонов формализм. Предполагается, что он позволит упростить вычисления за счёт разбиения задачи на несколько более простых.

Векторный подход к решению задачи достижимости

Пусть теперь начальное множество \mathcal{X}^0 задано следующим образом:

$$\mathcal{X}^0 = \bigcap \mathcal{X}_i^0, \quad i = 0, \dots, p.$$

По аналогии с классическим подходом рассмотрим вспомогательную оптимизационную задачу с векторной функцией цены в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t,x) &= \mathbf{Min} \left\{ \begin{pmatrix} d^2(x^0, \mathcal{X}_1^0) \\ \vdots \\ d^2(x^0, \mathcal{X}_p^0) \end{pmatrix} \middle| x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \right\} = \\ &= \mathbf{Min} \left\{ \begin{pmatrix} d^2(x^0, \mathcal{X}_1^0) \\ \vdots \\ d^2(x^0, \mathcal{X}_p^0) \end{pmatrix} \middle| x \in \mathcal{X}(t; t_0, x^0) \right\}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Утверждается, что отыскание векторной функции цены указанного вида позволит найти множество достижимости системы (3.6) в произвольный момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$. Связь решения двух описанных задач устанавливается следующим утверждением.

Предложение 3.4. *Множество достижимости системы (3.6) в момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ является множеством уровня 0 (в смысле Парето) введённой векторной функции цены (3.9):*

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x : \mathbf{V}(t,x) \leq 0\}.$$

Доказательство. Сведём доказательство этого утверждения к доказательству теоремы 3.1. Для этого введём вспомогательную оптимизационную задачу со скалярной функцией цены, после чего продемонстрируем, что её множества уровня 0 совпадают с множествами уровня 0 (уже в паретовском смысле) введённой векторной функции цены $\mathbf{V}(t,x)$.

Согласно теореме 3.1,

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x : V_{\cap \mathcal{X}_i^0}(t,x) \leq 0\},$$

где

$$\begin{aligned} V_{\cap \mathcal{X}_i^0}(t,x) &= \min_{u(\cdot), x^0} \{d^2(x^0, \mathcal{X}^0) | x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x\} = \\ &= \min_{u(\cdot), x^0} \left\{ d^2(x^0, \bigcap_{i=0}^p \mathcal{X}_i^0) \middle| x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) &= \left\{ x: \min_{u(\cdot), x^0} \left\{ d^2(x^0, \bigcap_{i=0}^p \mathcal{X}_i^0) \mid x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \right\} \leq 0 \right\} = \\ &= \left\{ x: \min_{u(\cdot), x^0} \left\{ \max \{ d^2(x^0, \mathcal{X}_1^0), \dots, d^2(x^0, \mathcal{X}_p^0) \} \mid x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \right\} \leq 0 \right\} \end{aligned}$$

Неравенство

$$\min_{u(\cdot), x^0} \left\{ \max \{ d^2(x^0, \mathcal{X}_1^0), \dots, d^2(x^0, \mathcal{X}_p^0) \} \mid x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \right\} \leq 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\exists \bar{u}(\cdot), \bar{x}^0$ такие, что

$$\begin{cases} \max \{ d^2(\bar{x}^0, \mathcal{X}_1^0), \dots, d^2(\bar{x}^0, \mathcal{X}_p^0) \} \leq 0, \\ x(t; t_0, \bar{x}^0, \bar{u}(\cdot)) = x, \end{cases}$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} d^2(\bar{x}^0, \mathcal{X}_1^0) \leq 0, \\ \dots \\ d^2(\bar{x}^0, \mathcal{X}_p^0) \leq 0, \\ x(t; t_0, \bar{x}^0, \bar{u}(\cdot)) = x. \end{cases}$$

Воспользовавшись определением паретовского порядка, последнюю систему можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} d^2(\bar{x}^0, \mathcal{X}_1^0) \\ \vdots \\ d^2(\bar{x}^0, \mathcal{X}_p^0) \end{pmatrix} = \mathbf{V}(t, x) \leq 0, \\ x(t; t_0, \bar{x}^0, \bar{u}(\cdot)) = x. \end{cases}$$

Таким образом, в силу эквивалентности всех произведённых преобразований, имеет место равенство множеств уровня 0 введённых скалярной и векторной функций цены:

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0) = \{x: V_{\cap \mathcal{X}_i^0}(t, x) \leq 0\} = \{x: \mathbf{V}(t, x) \leq 0\}.$$

■

3.5.2 Задача отыскания множества разрешимости

Рассматривается динамическая система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & t \in [t_0, \vartheta], \\ u(t) \in \mathcal{P}(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

Пусть задано некоторое целевое множество \mathcal{X}^1 , в которое мы стремимся перевести систему в конечный момент времени ϑ . Особый интерес представляет множество позиций, из которых траектории системы могут попасть в целевое множество \mathcal{X}^1 .

Определение 3.6. Множеством разрешимости (попятным множеством достижимости) системы (3.10) в момент времени t для заданного целевого множества \mathcal{X}^1 будем называть

$$\mathcal{W}(t; \vartheta, \mathcal{X}^1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists x^1 \in \mathcal{X}^1, \exists u(\cdot), u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) : x(\vartheta; t, x, u(\cdot)) = x^1 \right\},$$

где под $x(\vartheta; t, x, u(\cdot))$ понимается положение траектории системы (3.10), выпущенной из позиции (t, x) и отвечающей стратегии управления $u(\cdot)$.

Задача разрешимости для указанной системы (3.10) для заданного целевого множества \mathcal{X}^1 заключается в отыскании её множества попятной достижимости $\mathcal{W}(t; \vartheta, \mathcal{X}^1)$ в произвольный момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$.

Классический подход к решению подобных задач предполагает введение вспомогательной подзадачи с функцией цены следующего вида:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u(\cdot), x^1} \{ d^2(x^1, \mathcal{X}^1) \mid x(\vartheta; t, x, u(\cdot)) = x^1 \} = \\ &= \min \{ d^2(x^1, \mathcal{X}^1) \mid x \in \mathcal{W}(t; \vartheta, x^1) \}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тогда, как показано в [38], множество разрешимости $\mathcal{W}(t; \vartheta, x^1)$ может быть найдено с использованием следующей теоремы.

Теорема 3.2. Множество достижимости системы (3.10) в момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ является множеством уровня 0 введённой функции цены

(3.11):

$$\mathcal{W}(t; \vartheta, \mathcal{X}^1) = \{x: V(t, x) \leq 0\}.$$

Пусть теперь целевое множество задано следующим образом:

$$\mathcal{X}^1 = \bigcap_{i=0}^p \mathcal{X}_i^1.$$

Тогда, аналогично задаче разрешимости, мы можем рассмотреть вспомогательную оптимизационную задачу с векторной функцией цены вида

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t, x) = \mathbf{Min} \left\{ \begin{array}{c} d^2(x^1, \mathcal{X}_1^1) \\ \vdots \\ d^2(x^1, \mathcal{X}_p^1) \end{array} \middle| x(\vartheta; t, x, u(\cdot)) = x^1 \right\} = \\ = \mathbf{Min} \left\{ \begin{array}{c} d^2(x^1, \mathcal{X}_1^1) \\ \vdots \\ d^2(x^1, \mathcal{X}_p^1) \end{array} \middle| x \in \mathcal{W}(t; \vartheta, x^1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Справедливо следующее утверждение, связывающее исходную задачу разрешимости с введённой вспомогательной.

Предложение 3.5. *Множество разрешимости системы (3.6) в момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ является множеством уровня 0 (в смысле Парето) введённой векторной функции цены (3.9):*

$$\mathcal{W}(t; \vartheta, \mathcal{X}^1) = \{x: \mathbf{V}(t, x) \leq 0\} = \{x: V(t, x) \leq 0\}.$$

3.6 Применимость для произвольных порядков

Обсудим теперь вопрос справедливости полученных результатов для пространств (\mathbb{R}^p, \prec) с произвольным отношением порядка \prec . Как и в дискретном случае, потребуем, чтобы соответствующая рассматриваемому порядку структура доминирования была константой: $D \equiv \text{const}$.

Тогда, используя результаты, полученные в разделе 1.3, можно сформулировать аналоги предложений 3.1 и 3.2 для векторной функции цены следующего вида:

$$\mathbf{V}_{\prec}(t, x) = \mathcal{E}(\mathcal{Z}(t, x), D).$$

Предложение 3.6. Пусть отношение порядка в частично упорядоченном пространстве (\mathbb{R}^p, \prec) определяется структурой доминирования $D \equiv \text{const}$. Пусть, кроме того, для множества достижимых из начальной позиции (t_0, x^0) значений критерия (3.3) для системы (3.4) выполняется соотношение $\mathcal{E}(\mathcal{Z}(t_0, x^0), D) \neq \emptyset$.

Тогда для введённой векторной функции цены $\mathbf{V}_{\prec}(\cdot, \cdot)$ выполняются векторный аналог принципа оптимальности

$$\mathbf{V}_{\prec}(t_0, x^0) = \mathcal{E} \left(\left\{ \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}(\tau)) d\tau + \mathbf{V}_{\prec}(t, \bar{x}[t]) \mid \bar{u}(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \right\}, D \right),$$

а также аналог классического уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в виде

$$\begin{cases} \lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{1}{\sigma} \mathbf{h} \left[\mathbf{V}_{\prec}(t, x), \mathcal{E} \left(\left\{ \int_t^{t+\sigma} \mathcal{L}(\tau, \bar{x}[\tau], \bar{u}(\tau)) d\tau + \mathbf{V}_{\prec}(t+\sigma, \bar{x}[t+\sigma]) \right\}, D \right) \right] = 0, \\ \mathbf{V}_{\prec}(\vartheta, \cdot) = \boldsymbol{\varphi}(\cdot), \end{cases}$$

где $\bar{u}(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$, а под $\bar{x}[\cdot] = x(\cdot; t, x, \bar{u}(\cdot))$ понимается траектория системы (3.1), выпущенная из позиции (t, x) и отвечающая стратегии управления $\bar{u}(\cdot)$.

Условия применимости, сформулированные в предложении 3.3, остаются справедливыми даже после выбора альтернативного порядка.

Отметим, что использование при решении задач достижимости или разрешимости отношений порядка, отличного от паретовского, нецелесообразно.

Глава 4. Минимаксные-максиминные соотношения для векторного критерия

Введение

Данная глава посвящена исследованию соотношений между минимаксами и максиминами векторзначных отображений. Понятие векторного минимума множества обобщается на случай функционалов, принимающих значения в упорядоченных пространствах. Вводится в рассмотрение векторный максимум как для множеств, так и для векторных функционалов. Приводятся достаточные условия его существования. Наконец, формулируются векторные аналоги минимакса и максимина.

В центральной части главы рассматриваются два класса векторных функционалов, к исследованию которых может быть сведена линейно-квадратичная задача управления для системы с помехой: функционалы с сепарируемыми переменными, а также билинейные. На примере отображения с разделяемыми переменными продемонстрирована возможность нарушения классического неравенства между минимаксом и максимином. Кроме того, доказывается необходимое условие, приводящее к подобному нарушению. Приводятся примеры, подробно иллюстрирующие приведённые результаты.

В заключительной части главы исследуется гипотеза о связи векторных минимакса и максимина с покомпонентными. Приводится контрпример, показывающий, что оценка векторного минимакса для квадратичного функционала не может быть получена с использованием последовательного взятия скалярных минимаксов, как это делалось для построения гарантированных точечных оценок в первой главе.

При работе над данным разделом диссертации использованы публикации автора [5; 31; 33], в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

4.1 Дополнительные определения

Для исследования минимаксных и максиминных задач необходимо ввести определения, дополняющие данные ранее в разделе 1.1. Во избежание путаницы, всюду в данной главе будем называть границу Парето $\mathbf{Min}Y$ векторным минимумом, подчёркивая тем самым то, что это именно нижняя граница множества Y относительно порядка \leq .

Ранее мы определили понятие векторного минимума для заданного множества. В данной главе мы преимущественно будем рассматривать его применительно к некоторому заданному функционалу. Рассмотрим отображение $\mathbf{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^p$, где U — заданное множество произвольной природы. Определим для него понятие векторного минимума.

Определение 4.1. *Векторным минимумом значений отображения $\mathbf{F}(u)$ на не пустом множестве $\tilde{U} \subset U$ будем называть множество всех недоминируемых по Парето значений $\mathbf{F}(\tilde{U})$:*

$$\mathbf{Min}\mathbf{F}(u) = \mathbf{Min}\mathbf{F}(\tilde{U}) = \left\{ f^* \in \mathbf{F}(\tilde{U}) \mid \text{не } \exists u \in \tilde{U} : \mathbf{F}(u) \leq f^* \right\}.$$

Понятие векторного максимума для рассматриваемого отображения также определим через векторный максимум от образа \mathbf{F} .

Определение 4.2. *Векторным максимумом непустого множества $Y \subset \mathbb{R}^p$ относительно порядка \leq будем называть множество*

$$\mathbf{Max}(Y) = \left\{ \hat{y} \in Y \mid \text{не } \exists y \in Y : \hat{y} \prec y \right\}.$$

Определение 4.3. Векторным максимумом значений отображения $\mathbf{F}(u)$ на не пустом множестве $\tilde{U} \subset U$ будем называть множество всех недоминирующих по Парето значений $\mathbf{F}(\tilde{U})$:

$$\mathbf{Max}\mathbf{F}(u) = \mathbf{Max}\mathbf{F}(\tilde{U}) = \left\{ f^* \in \mathbf{F}(\tilde{U}) \mid \text{не } \exists u \in \tilde{U}: f^* \leq \mathbf{F}(u) \right\}.$$

Условия существования описанных векторных максимума и минимума устанавливаются следующим утверждением.

Утверждение 4.1. Пусть образ $\mathbf{F}(\tilde{U})$ для заданного множества $\tilde{U} \subset U$ замкнут и ограничен в пространстве (\mathbb{R}^p, \leq) . Тогда векторные минимум и максимум значений отображения \mathbf{F} на \tilde{U} не пусты.

Доказательство. Существование векторного минимума следует напрямую из его определения и следствия 1.1.

Покажем справедливость соотношения для векторного максимума. Введённое определение эквивалентно границе Парето множества $\mathbf{F}(\tilde{U})$ в пространстве (\mathbb{R}^p, \geq) , где отношение порядка \geq определяется постоянной структурой доминирования $D \equiv \mathbb{R}_-^p$. Тогда для \geq в силу теоремы 1.1 о существовании эффективного множества граница Парето существует, а следовательно, векторный максимум не пуст. ■

Замечание 4.1. Для существования векторного минимума достаточно ограниченности лишь снизу, а для максимума — только сверху.

Замечание 4.2. Ввиду эквивалентности введённого векторного максимума и границы Парето в (\mathbb{R}^p, \geq) , для оператора \mathbf{Max} выполняются все результаты, полученные в данной работе для паретовского порядка \leq .

Перейдём теперь к рассмотрению отображения, зависящего от двух переменных. Пусть задано $\mathbf{F}(u, v): U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$, где U, V — множества произвольной природы и размерности. Предполагается, что любое из них может принадлежать как конечномерному, так и функциональному пространству. Сформулируем понятия векторных максимина и минимакса.

Определение 4.4. Векторным минимаксом значений отображения $\mathbf{F}(u,v)$ на непустом множестве $\tilde{U} \times \tilde{V} \subseteq U \times V$ будем называть

$$\mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{F}(u,v) = \mathbf{Min} \left\{ \bigcup_{\tilde{u} \in \tilde{U}} \mathbf{Max} \mathbf{F}(\tilde{u}, \tilde{V}) \right\}.$$

Определение 4.5. Векторным максимумом значений отображения $\mathbf{F}(u,v)$ на непустом множестве $\tilde{U} \times \tilde{V} \subseteq U \times V$ будем называть

$$\mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{F}(u,v) = \mathbf{Max} \left\{ \bigcup_{\tilde{v} \in \tilde{V}} \mathbf{Min} \mathbf{F}(\tilde{U}, \tilde{v}) \right\}.$$

Условия их существования могут быть сформулированы по-разному. В данной работе мы будем предполагать, что и векторный максимум, и векторный минимум существуют (то есть выполнены, например, условия утверждения 4.1) для всех образов $\mathbf{F}(U, v)$, $\mathbf{F}(u, V)$, где $u \in U$, $v \in V$.

Целью данной главы является сравнение векторных минимакса и максимина. Поскольку оба они в общем случае представлены множествами, необходимо сформулировать, в каком смысле мы будем понимать их сравнение, то есть, иными словами, определить отношение порядка для подмножеств упорядоченного пространства (\mathbb{R}^p, \leq) .

Определение 4.6. Будем говорить, что для двух непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^p$ выполняется неравенство

$$A \leq B,$$

если верно следующее соотношение

$$\forall b \in B \setminus A \Rightarrow \exists a \in A: a \leq b.$$

Используя последнее определение, сформулируем несколько соотношений, связывающих введённые ранее обобщения максимумов и минимумов.

Утверждение 4.2. Для введённых векторных минимума и максимума выполняются следующие соотношения.



Рисунок 4.1 — Примеры сравнения двух произвольных множеств A и B относительно порядка \leq

- $\forall Y \subset \mathbb{R}^p \Rightarrow \mathbf{Max}\{\mathbf{Min}Y\} = \mathbf{Min}Y, \mathbf{Min}\{\mathbf{Max}Y\} = \mathbf{Max}Y;$
- $\forall \tilde{Y} \subseteq Y \subset \mathbb{R}^p \Rightarrow \mathbf{Min}Y \leq \mathbf{Min}\tilde{Y} \leq \mathbf{Max}\tilde{Y} \leq \mathbf{Max}Y.$

Утверждение 4.3. Пусть для заданного отображения $\mathbf{F}(u,v)$, определённого на $U \times V$, существуют векторные $\mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{F}(u,v)$ и $\mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{F}(u,v)$ на $\tilde{U} \times \tilde{V} \subseteq U \times V$. Тогда

- $\mathbf{Min}\mathbf{F}(U,V) \leq \mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{F}(u,v);$
- $\mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{F}(u,v) \geq \mathbf{Max}\mathbf{F}(U,V).$

Справедливость всех указанных соотношений напрямую следует из данных определений.

Отметим, что объединить неравенства в последнем утверждении нельзя. В то время как для произвольной скалярной функции

$$f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

соотношение

$$\max \min f(u,v) \leq \min \max f(u,v)$$

выполнено всегда, с повышением размерности оно может нарушаться. Более того, как будет показано далее, для некоторых классов функционалов его нарушение является регулярным случаем. Для удобства работы с неравенствами, связывающими векторные минимакс и максимин, введём следующее определение.

Определение 4.7. Основным векторным минимаксным неравенством для паретовского порядка будем называть

$$\mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{F}(u, v) \leq \mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{F}(u, v), \quad (4.1)$$

а обратным — неравенство

$$\mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{F}(u, v) \leq \mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{F}(u, v), \quad (4.2)$$

где сравнение векторных минимакса и максимина понимается в смысле определения 4.6.

Необходимость рассмотрения обратного минимаксного неравенства специфична именно для векторных задач.

Замечание 4.3. Аналогичным образом возможно ввести понятия векторных минимакса и максимина в пространстве (\mathbb{R}^p, \prec) с произвольным порядком. Для них также будут выполняться соотношения, приведённые ранее. Исследование порядков, альтернативных паретовскому, выходит за рамки данной работы.

4.2 Необходимое условие нарушения основного минимаксного неравенства

В то время как вопрос отыскания достаточных условий, при которых выполняется основное минимаксное неравенство, на момент написания данной работы остаётся открытым, мы можем сформулировать необходимое условие его нарушения.

Рассмотрим отображение $\mathbf{F}: U \times V \rightarrow (\mathbb{R}^p, \leq)$. Пусть векторные минимакс и максимин определены для него на некотором непустом множестве $\tilde{U} \times \tilde{V} \in U \times V$.

Предложение 4.1. Пусть существуют такие значения f^* и f_* отображения $\mathbf{F}(u,v)$ на $\tilde{U} \times \tilde{V}$, что

$$\begin{cases} f^* = \mathbf{F}(u^*, v^*) \in \mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{F}(u, v), \\ f_* = \mathbf{F}(u_*, v_*) \in \mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{F}(u, v), \\ f^* \leq f_*. \end{cases}$$

Тогда вектор $\hat{f} = \mathbf{F}(u^*, v_*)$ не сравним ни с f^* , ни с f_* :

$$\begin{cases} \hat{f} \not\leq f^*, \\ \hat{f} \not\leq f_*. \end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что выполнение других соотношений невозможно.

Отметим, что, поскольку $f^* \in \mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{F}$, из определения следует соотношение $f^* \in \mathbf{Max} \mathbf{F}(u^*, \tilde{V})$. Последнее позволяет нам записать неравенство $f^* \not\leq \hat{f}$. Аналогично $f_* \in \mathbf{Min} \mathbf{F}(\tilde{U}, v_*)$, откуда следует $\hat{f} \not\leq f_*$.

Предположим, что $\hat{f} \leq f^*$. Тогда, в силу транзитивности паретовского порядка,

$$\hat{f} \leq f^* \leq f_*,$$

что противоречит полученному ранее соотношению $\hat{f} \not\leq f_*$.

Предположим теперь, что $f_* \leq \hat{f}$. Тогда, снова по транзитивности,

$$f^* \leq f_* \leq \hat{f},$$

что противоречит условию $f^* \not\leq \hat{f}$.

Аналогично для случаев $\hat{f} = f^*$ и $\hat{f} = f_*$.

Отсюда следует, что $\hat{f} \not\leq f^*$, $\hat{f} \not\leq f_*$. ■

Следствие 4.1. Пусть выполнены условия предложения 4.1. Тогда существуют $i \neq j, k \neq l$, где $i, j, k, l = 1, \dots, p$ такие, что

$$\begin{cases} (F_i(u^*, v^*) - F_i(u^*, v_*)) (F_j(u^*, v^*) - F_j(u^*, v_*)) < 0, \\ (F_k(u_*, v_*) - F_k(u^*, v_*)) (F_l(u_*, v_*) - F_l(u^*, v_*)) < 0, \end{cases}$$

где $F_i(u, v)$ — i -ая компонента $\mathbf{F}(u, v) = [F_1(u, v), \dots, F_p(u, v)]'$.

Отметим, что сформулировать необходимое условие нарушения обратного минимаксного неравенства в аналогичной форме не представляется возможным, поскольку использованные при доказательстве основного утверждения соотношения

$$\begin{aligned} f^* &\not\leq \hat{f}, \\ \hat{f} &\not\leq f_* \end{aligned}$$

в этом случае не дают никакой дополнительной информации.

Замечание 4.4. Из определения 4.6 следует, что нарушение основного векторного минимаксного неравенства не влечёт выполнение обратного, и наоборот.

Замечание 4.5. Предложение 4.1 возможно обобщить на случай произвольного отношения порядка \prec . Необходимым условием для проведения подобного обобщения является транзитивность \prec , поскольку она существенно использована при доказательстве. Последнее же следствие является специфическим именно для паретовского порядка и не может быть обобщено.

4.3 Примеры функционалов

Далее будут рассмотрены два класса функционалов, возникающих при исследовании линейно-квадратичных задач управления с помехой, описываемых системой

$$\begin{cases} \dot{x} = B(t)u + C(t)v, & t \in [t_0, \vartheta], \\ x(t_0) = x^0, \\ u(t) \in \mathcal{P}(t), v(t) \in \mathcal{R}(t), \end{cases}$$

и векторным функционалом вида

$$\mathbf{J}(\vartheta, x, u, v) = \begin{pmatrix} \langle x, N_1 x \rangle + \langle u, M_1 u \rangle - \langle v, R_1 v \rangle \\ \dots \\ \langle x, N_p x \rangle + \langle u, M_p u \rangle - \langle v, R_p v \rangle \end{pmatrix},$$

где под $\langle a, b \rangle$ понимается скалярное произведение элементов a и b в соответствующих пространствах, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $v(t) \in \mathbb{R}^k$, а $N_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R_i \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $i = 1, \dots, p$.

Указанный функционал $\mathbf{J}(\vartheta, x, u, v)$ за счёт использования формулы Коши можно привести к следующему виду:

$$\mathbf{J}[u, v] = \Phi(u) + \Psi(v) + \mathbf{B}(u, v),$$

где $\mathbf{B}(u, v) = [\langle u, B_1 v \rangle, \dots, \langle u, B_p v \rangle]'$.

4.3.1 Функционал с сепарируемыми переменными

Рассмотрим отображение $\mathbf{S}(u, v): U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$ следующего вида:

$$\mathbf{S}(u, v) = \Phi(u) + \Psi(v).$$

Такие отображения мы будем называть функционалами с сепарируемыми (разделяемыми) переменными.

Покажем, что для функционалов указанного вида выполняется обратное минимаксное неравенство (4.2). Для этого получим альтернативное представление векторного минимакса для описанного $\mathbf{S}(u, v)$.

$$\begin{aligned} \text{Min}_u \text{Max}_v \mathbf{S}(u, v) &= \text{Min}_u \text{Max}_v \{ \Phi(u) + \Psi(v) \} = \\ &= \text{Min} \{ \text{Max} \{ \Phi(\tilde{u}) + \Psi(v) | v \in V \} | \tilde{u} \in U \} = \end{aligned}$$

Последовательно применив соотношение (1.1) и утверждение леммы 1.1 к последнему соотношению, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{Min} \{ \Phi(\tilde{u}) + \mathbf{Max} \Psi(V) | \tilde{u} \in U \} = \\ &= \mathbf{Min} \{ \mathbf{Min} \Phi(U) + \mathbf{Max} \Psi(V) \}.\end{aligned}$$

Применим теперь аналогичные рассуждения к векторному максимуму.

$$\begin{aligned}\mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \{ \Phi(u) + \Psi(v) \} = \\ &= \mathbf{Max} \{ \mathbf{Min} \{ \Phi(u) + \Psi(\tilde{v}) | u \in U \} | \tilde{v} \in V \} = \\ &= \mathbf{Max} \{ \mathbf{Min} \Phi(U) + \Psi(\tilde{v}) | \tilde{v} \in V \} = \mathbf{Max} \{ \mathbf{Min} \Phi(U) + \mathbf{Max} \Psi(V) \}.\end{aligned}$$

Поскольку для произвольного непустого множества $Y \subset \mathbb{R}^p$, для которого существуют и векторный минимум, и векторный максимум, выполняется соотношение $\mathbf{Min} Y \leq \mathbf{Max} Y$, взяв в качестве $Y = \mathbf{Min} \Phi(U) + \mathbf{Max} \Psi(V)$, получим

$$\mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{S}(u, v) \leq \mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{S}(u, v),$$

что соответствует обратному векторному минимаксному неравенству.

Получается, основное минимаксное неравенство для функционалов рассматриваемого вида может выполняться исключительно в смысле равенства. Приведём несколько примеров условий, при которых указанное равенство будет выполняться.

Предложение 4.2. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- по крайней мере одно из множеств $\mathbf{Min} \Phi(U)$, $\mathbf{Max} \Psi(V)$ представлено единственным элементом;
- множества $\mathbf{Min} \Phi(U)$ и $\mathbf{Max} \Psi(V)$ лежат в параллельных гиперплоскостях, определяемых вектором нормали $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_p)$, где $n_i \neq 0, i = 1, \dots, p$.

Тогда векторные минимакс и максимин для функционала $\mathbf{S}(u, v) = \Phi(u) + \Psi(v)$ совпадают.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Без ограничения общности будем предполагать, что $\mathbf{Min}\Psi(V) = \{\bar{\psi}\}$. Воспользуемся полученным представлением для векторного максимина отображения $\mathbf{S}(u,v)$. Применяя последовательно соотношение (1.1) и утверждение 4.2, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{S}(u,v) &= \mathbf{Max} \{ \mathbf{Min}\Phi(U) + \mathbf{Max}\Psi(V) \} = \\ &= \mathbf{Max} \{ \mathbf{Min}\Phi(U) + \bar{\psi} \} = \bar{\psi} + \mathbf{Max} \{ \mathbf{Min}\Phi(U) \} = \bar{\psi} + \mathbf{Min}\Phi(U). \end{aligned}$$

Аналогично для минимакса:

$$\begin{aligned} \mathbf{Min}_u \mathbf{Max}_v \mathbf{S}(u,v) &= \mathbf{Min} \{ \mathbf{Min}\Phi(U) + \mathbf{Max}\Psi(V) \} = \\ &= \bar{\psi} + \mathbf{Min} \{ \mathbf{Min}\Phi(U) \} = \bar{\psi} + \mathbf{Min}\Phi(U). \end{aligned}$$

Таким образом, векторные минимакс и максимин в этом случае совпадают.

Докажем теперь второе утверждение. Рассмотрим непустое множество $Y \subset \mathbb{R}^p$, лежащее в некоторой гиперплоскости, удовлетворяющей приведённым условиям. Покажем, что в случае, когда векторный минимум для этого множества существует, он совпадает с самим множеством: $\mathbf{Min}Y = Y$. Предположим противное, пусть $\exists y', y \in Y$ такие, что $y' \leq y$. Последнее соотношение влечёт $\exists j: y'_j < y_j$. Поскольку оба вектора лежат в одной гиперплоскости, $\langle \mathbf{n}, y' \rangle = \langle \mathbf{n}, y \rangle$. Отсюда следует, что $n_i(y_i - y'_i) = 0, i = 1, \dots, p$, что противоречит выбору векторов \mathbf{n}, y', y . Аналогичный результат справедлив и для векторного максимума.

Поскольку сумма множеств, лежащих в параллельных гиперплоскостях, принадлежит гиперплоскости, параллельной исходным, её векторные минимум и максимум совпадают. ■

4.3.2 Билинейный функционал

В этом разделе будет рассмотрен вопрос справедливости основного и обратного векторных минимаксных неравенств для класса билинейных функ-

ционалов вида $\mathbf{B}(u, v) = [\langle u, B_1 v \rangle, \dots, \langle u, B_p v \rangle]'$, где под $\langle x, y \rangle$ понимается скалярное произведение элементов x и y соответствующих пространств, $B_i \in \mathbb{R}^{m \times k}$. В случае, когда U и V конечномерные, предполагается, что $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^k$. В случае же, когда U и V являются множествами в функциональных пространствах, потребуем, чтобы выполнялись соотношения $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $v(t) \in \mathbb{R}^k$, $t \in [t_0, \vartheta]$, а скалярное произведение будем понимать в виде

$$\langle u(\cdot), B_i v(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{\vartheta} \langle u(\tau), B_i v(\tau) \rangle d\tau.$$

Предполагается, что для рассматриваемых функций $(u(\cdot), v(\cdot)) \in U \times V$ указанное произведение определено.

Получим достаточное условие справедливости основного минимаксного неравенства.

Согласно следствию 4.1, нарушение основного минимаксного неравенства влечёт

$$\begin{cases} (\langle u^*, B_i v^* \rangle - \langle u^*, B_i v_* \rangle) (\langle u^*, B_j v^* \rangle - \langle u^*, B_j v_* \rangle) < 0, \\ (\langle u_*, B_k v_* \rangle - \langle u^*, B_k v_* \rangle) (\langle u_*, B_l v^* \rangle - \langle u_*, B_l v_* \rangle) < 0, \end{cases}$$

или, после приведения слагаемых,

$$\begin{cases} \langle u^*, B_i(v^* - v_*) \rangle \langle u^*, B_j(v^* - v_*) \rangle < 0, \\ \langle (u^* - u_*), B_k v_* \rangle \langle (u^* - u_*), B_l v_* \rangle < 0. \end{cases}$$

Потребуем, чтобы сразу для всех $u \in U$, $v \in V$ и $i, j = 1, \dots, p$ выполнялось соотношение

$$\langle u, B_i v \rangle \langle u, B_j v \rangle \geq 0.$$

Очевидно, указанное условие и будет искомым достаточным условием для справедливости основного векторного минимаксного неравенства для $\mathbf{B}(u, v)$.

В случае, когда u, v — конечномерные, последнее неравенство возможно уточнить. Далее приводится способ, которым это можно сделать.

Пусть $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^k$. Перепишем последнее неравенство в следующем виде:

$$\langle u, B_i v \rangle \langle u, B_j v \rangle = u' B_i v v' B_j' u \geq 0.$$

Найдём ограничения, при которых матрица $Q = B_i v v' B_j'$ будет положительно полуопределена сразу для всех $v \in \mathbb{R}^k$.

Удобным инструментом для установки знакоопределённости матриц является Критерий Сильвестра. Мы будем использовать более общую его формулировку, позволяющую работать с полуопределёнными матрицами.

Теорема 4.1. *Симметрическая матрица $Q = Q' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ положительно полуопределена тогда и только тогда, когда все её главные миноры не отрицательны.*

Доказательство может быть найдено в [30].

Напрямую применить Критерий Сильвестра к матрице Q нельзя, поскольку она, вообще говоря, не является симметрической. Это несоответствие возможно разрешить с помощью следующей леммы ([30]).

Лемма 4.1. *Для произвольной матрицы $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ неравенство $\forall v \neq 0 \Rightarrow \langle v, Qv \rangle \geq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\frac{Q + Q'}{2} \geq 0.$$

Сформулируем теперь основное утверждение.

Предложение 4.3. *Пусть для всех $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$ все главные миноры $M_k[W]$ матрицы*

$$W = Q' + Q = B_i v v' B_j' + B_j v v' B_i'$$

порядка $k = 1, 2$ неотрицательны сразу для всех $v \in (V - V)$. Тогда для билинейного функционала $\mathbf{B}(u, v)$ выполняется основное векторное минимаксное неравенство 4.1.

Доказательство. Покажем, что все миноры порядка $k = 3$ и выше для указанной матрицы W равны нулю.

Действительно, последовательно применяя тривиальные следующие неравенства, справедливые для двух произвольных вещественных матриц,

$$\text{rank}(X + Y) \leq \text{rank } X + \text{rank } Y, \text{rank } XY \leq \min\{\text{rank } X, \text{rank } Y\}$$

к W , получим

$$\text{rank } W \leq 2 \text{rank } Q \leq \min \{ \text{rank } B_i, \text{rank}(vv'), \text{rank } B'_j \} \leq 2,$$

поскольку $\text{rank}(vv') = 1$. ■

Следствие 4.2. Пусть выполнены условия предложения 4.1. Тогда

$$\forall i \neq j = 1, \dots, r \Rightarrow [B_i]_{kl}[B_j]_{kl} \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, m,$$

где $[B_i]_{kl}$ — элемент, стоящий на пересечении k -ой строки и l -ого столбца матрицы B_i .

Доказательство. Выпишем явные выражения для диагональных элементов матрицы $W = Q + Q'$.

Зафиксируем произвольные i, j и переобозначим для удобства рассматриваемые матрицы:

$$B_i = A = [a_{kl}], B_j = B = [b_{kl}], vv' = X = [x_{kl}].$$

Из определения произведения матриц получаем

$$Q_{kk} = [AXB']_{kk} = \sum_i [AX]_{ki}[B']_{ik} = \sum_i \left(\sum_r a_{kr}x_{ri} \right) b_{ki} = \sum_i \sum_r a_{kr}(v_r v_i) b_{ki}.$$

Обозначим через $\alpha_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km})$, $\beta_k = (b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{km})$ вектор-строки матриц A B соответственно.

Тогда

$$W_{kk} = 2Q_{kk} = 2 \sum_i b_{ki} v_i \sum_r a_{kr} v_r = 2 \langle \alpha'_k, v \rangle \langle \beta'_k, v \rangle = 2v' \alpha'_k \beta_k v \geq 0.$$

Таким образом, для всех $k = 1, \dots, m$ справедливо выражение

$$\alpha'_k \beta_k \geq 0.$$

Поскольку $\text{rank}(\alpha'_k \beta_k) = 1$, последнее соотношение можно привести к более простому виду:

$$A_{kl} B_{kl} \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, m. \quad \blacksquare$$

Полученное утверждение представляет собой интуитивно простое правило проверки, будет ли выполнено основное минимаксное неравенство для рассматриваемого билинейного функционала.

4.4 Примеры

Приведём примеры, иллюстрирующие полученные результаты. Все расчёты в рамках данного раздела произведены с использованием системы Matlab. Векторные минимаксы и максимины получены путём полного перебора значений функционалов на указанных сетках.

Пример 4.1. Рассмотрим функцию с разделяемыми переменными

$$\mathbf{S}(u,v) = \Phi(u) + \Psi(v) = \begin{pmatrix} -u \\ u^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ -v^2 \end{pmatrix},$$

определённую на множестве $U \times V$, где

$$U = V = [0,1].$$

Образ отображения $\mathbf{S}(U,V)$, а также его векторные минимакс и максимин на заданной области определения изображены на рис. 4.2. Расчёты произведены на равномерной сетке с шагом $d = 4E - 3$.

Можно видеть, что на рассматриваемой области определения для указанной функции выполняется обратное минимаксное неравенство. Следующий пример демонстрирует, что при изменении области определения функции это соотношение может обращаться в равенство.

Пример 4.2. Рассматривается та же функция с сепарируемыми переменными, что и в предыдущем примере:

$$\mathbf{S}(u,v) = \Phi(u) + \Psi(v) = \begin{pmatrix} -u \\ u^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ -v^2 \end{pmatrix}.$$

В качестве области определения $U \times V$ теперь возьмём симметричный квадрат с центром в нуле:

$$U = V = [-1, 1].$$

Полученный образ отображения $\mathbf{S}(U, V)$, а также его объединения векторные минимумов и максимумов, стоящие внутри скобок в определениях векторных максимина и минимакса соответственно, изображены на рис. 4.3. В центре образовавшейся фигуры отмечена единственная точка, представляющая собой совпавшие минимакс и максимин. Расчёты произведены на равномерной сетке с шагом $d = 4E - 3$.

Пример 4.3. Рассмотрим теперь билинейную векторную функцию вида

$$\mathbf{B}(u, v) = \begin{pmatrix} \langle u, B_1 v \rangle \\ \langle u, B_2 v \rangle \end{pmatrix},$$

где

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

на множестве $U \times V$, где

$$U = V = [-1, 1]^2.$$

Отметим, что для этого отображения не выполняются условия следствия 4.2, следовательно, можно сделать предположение о том, что основное минимаксное неравенство выполняться не будет.

Действительно, произведём численный расчёт минимаксной и максимальной границ для заданного отображения, введя на $U \times V$ равномерную сетку с шагом $d = 1e-2$. Результаты построения приведены на рис. 4.4. Как можно видеть, на рассматриваемом множестве для функции выполняется обратное векторное минимаксное неравенство.

Тем не менее, следствие 4.2 не является необходимым условием для выполнения основного векторного минимаксного неравенства. Следующий пример это демонстрирует.

Пример 4.4. Рассмотрим билинейную векторную функцию вида

$$\mathbf{B}(u, v) = \begin{pmatrix} \langle u, B_1 v \rangle \\ \langle u, B_2 v \rangle \end{pmatrix},$$

где

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.1 & -0.8 \end{bmatrix}.$$

В качестве области определения $U \times V$ снова выберем четырёхмерный куб

$$U = V = [-1, 1]^2.$$

Для этого отображения так же, как и в предыдущем примере, не выполняются условия следствия 4.2. Однако, в ходе численного построения, удалось установить, что для него основное минимаксное неравенство выполняется. Более того, в отличие от предыдущих примеров, оно выполняется строго: нет ни одной точки пересечения минимакса и максимина. Построение производилось на равномерной сетке с шагом $d = 2E - 2$ и приводится на рис. 4.5.

4.5 Связь с покомпонентными минимаксами

В первой главе был рассмотрен метод гарантированного точечного оценивания, позволяющий строить угловые точки границы Парето, переходя к последовательному вычислению скалярных минимумов по каждой из компонент векторного критерия. Возможность свести задачу вычисления одного векторного минимакса или максимина к вычислению конечного числа скалярных для получения конечного множества точек исходной границы позволила бы существенно упростить вычисления и использовать эффективные методы, разработанные для одномерных функций. Однако указанный метод перенести нельзя. В данном разделе приводится контрпример, демонстрирующий, что

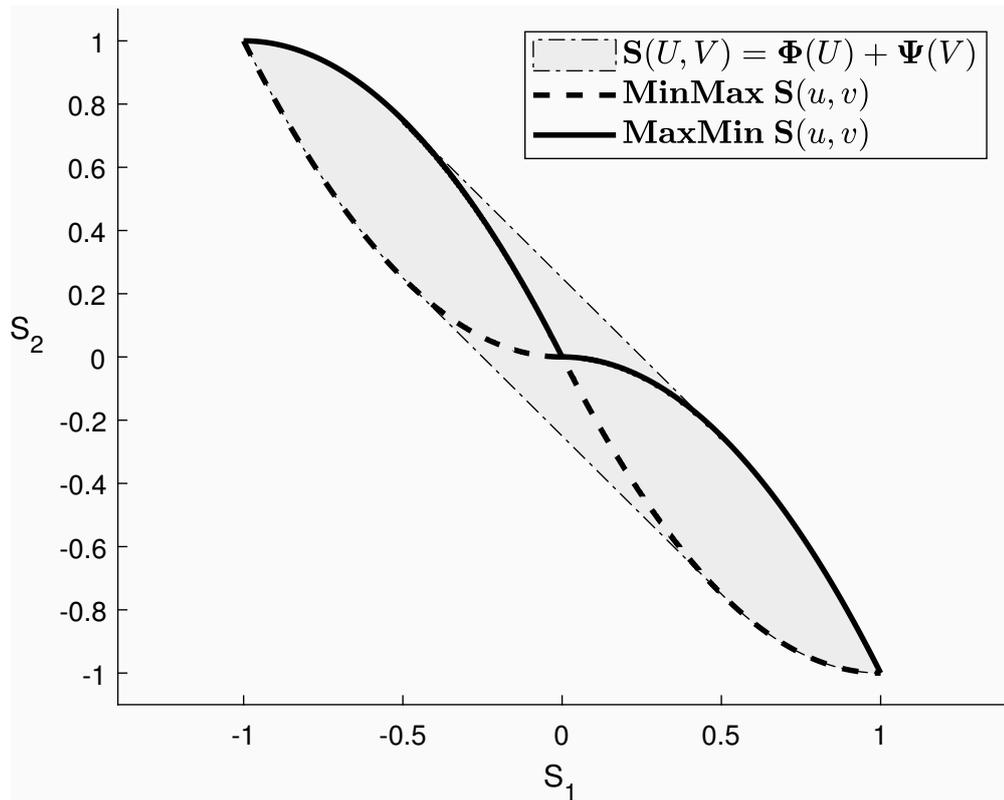


Рисунок 4.2 — Нарушение основного минимаксного неравенства для функции с сепарируемыми переменными в примере 4.1

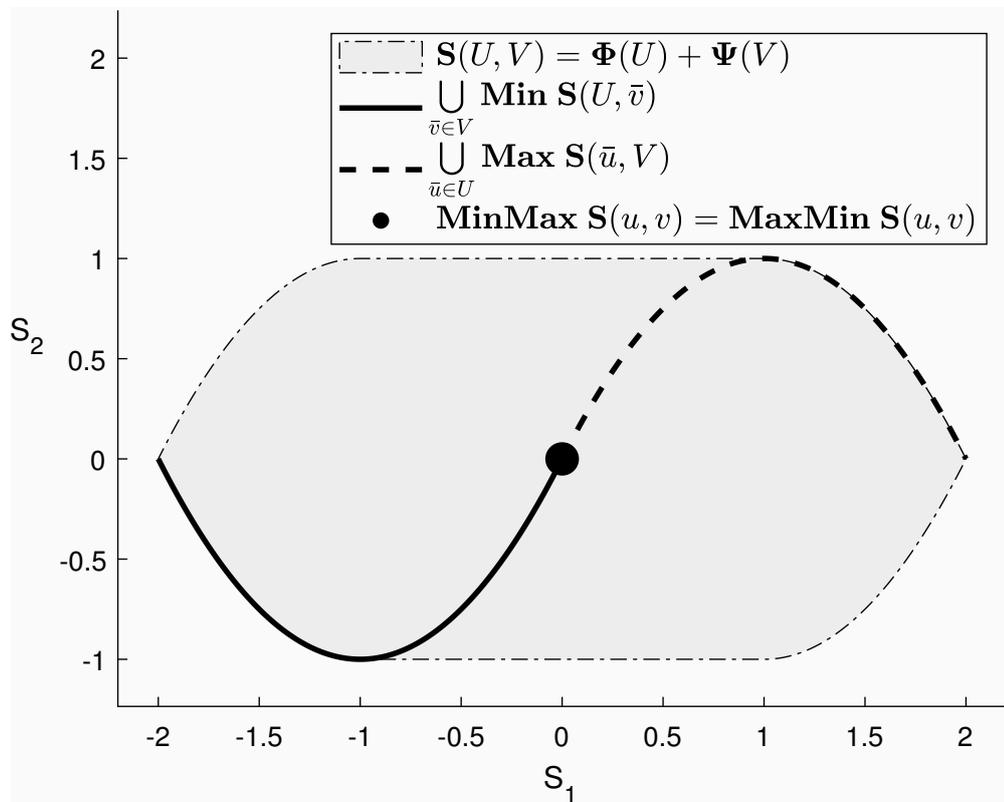


Рисунок 4.3 — Равенство векторных минимакса и максимина для функции с сепарируемыми переменными в примере 4.2

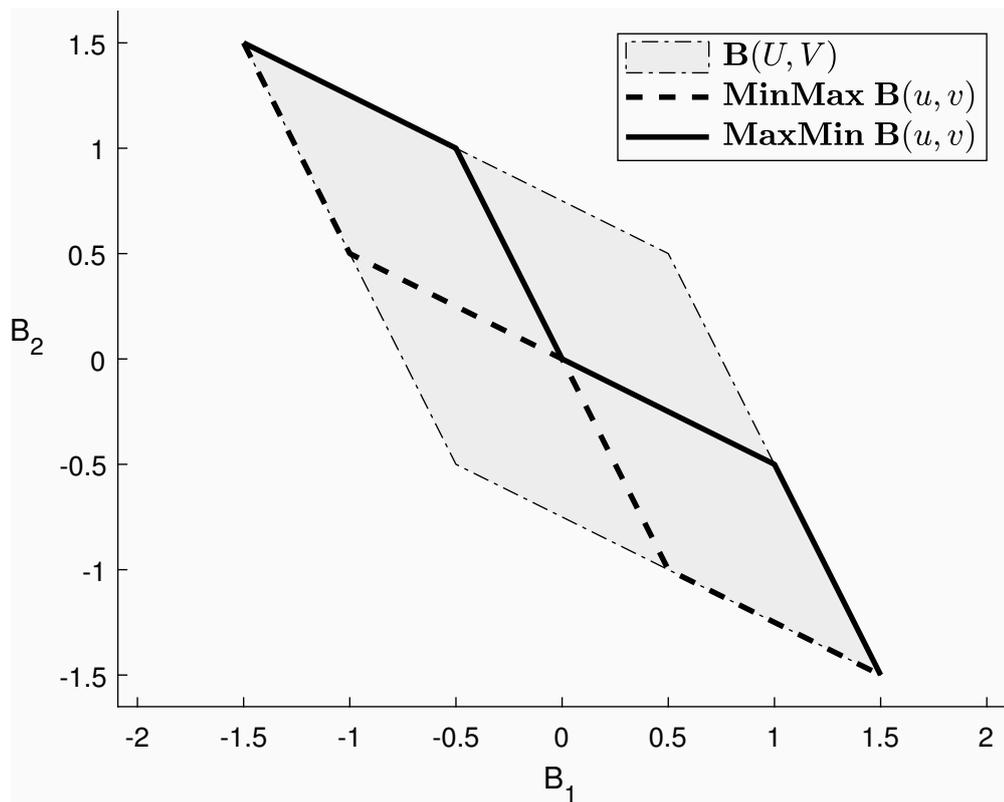


Рисунок 4.4 — Нарушение основного минимаксного неравенства для билинейной функции в примере 4.3

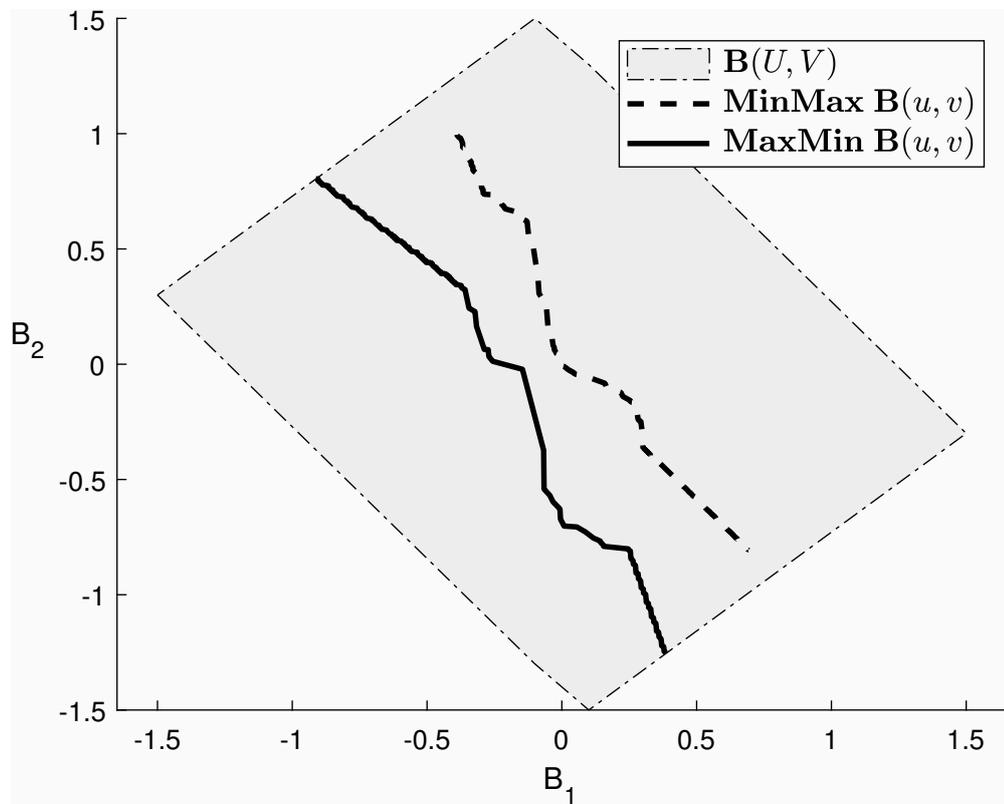


Рисунок 4.5 — Выполнение основного минимаксного неравенства для билинейной функции в примере 4.4

подобный переход к последовательному вычислению покомпонентных минимаксов и максиминов не позволяет построить разумную аппроксимацию указанных векторных границ.

Рассмотрим векторную функцию $\mathbf{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$\mathbf{F}(u,v) = \begin{bmatrix} \langle u - u_1^0, M_1(u - u_1^0) \rangle - \langle v - v_1^0, P_1(v - v_1^0) \rangle \\ \langle u - u_2^0, M_2(u - u_2^0) \rangle - \langle v - v_2^0, P_2(v - v_2^0) \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Отображения указанного вида также связаны с решением линейно-квадратичной задачи с векторным критерием.

Пример 4.5. Рассмотрим функцию вида 4.3 со следующими значениями параметров:

$$U = V = [-1; 1],$$

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 1,$$

$$v_1^0 = 1, \quad v_2^0 = 0,$$

$$M_1 = M_2 = 1, \quad P_1 = 1, \quad P_2 = 5.$$

$\mathbf{F}(u,v)$ в этом случае примет вид

$$\vec{J}(u,v) = \begin{bmatrix} u^2 - (v - 1)^2 \\ (u - 1)^2 - 5v^2 \end{bmatrix}.$$

Введём равномерную сетку по v на отрезке $[-1, 1]$ с шагом $h = 2E - 2$. На рис. 4.6 изображены множества значений $\mathbf{F}(u,v)$ при фиксированных значениях $v = \bar{v}$, их векторные и покомпонентные минимумы (сначала минимизация проводилась по F_1 , затем по F_2). На рис. 4.7 изображены граница $\mathbf{Max}_v \mathbf{Min}_u \mathbf{F}(u,v)$ на $U \times V$; точка $\hat{F} = \mathbf{F}(\hat{u}, \hat{v})$ такова, что $F_1(\hat{u}, \hat{v}) = \min \max F_1(u,v)$.

Сравнивая векторную максиминную границу с покомпонентным максимином, можно видеть, что в данном примере выполняется разве что соотношение

$$\mathbf{Max}_u \mathbf{Min}_v \mathbf{F}(u,v) \not\leq \hat{f}.$$

Этого неравенства недостаточно для того, чтобы что-то сказать о поведении исходной векторной максиминной границы.

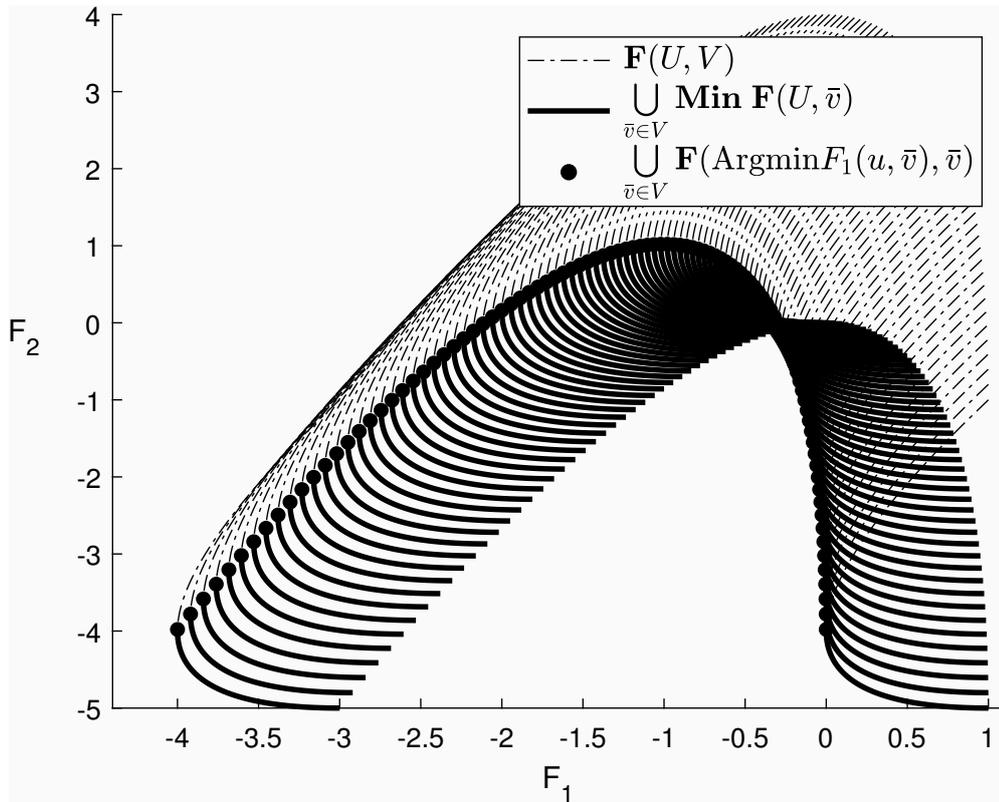


Рисунок 4.6 — Сравнение векторных и покомпонентных минимумов при фиксированном \bar{v} в примере 4.5

Пример 4.6. Рассмотрим функцию вида 4.3 со следующими значениями параметров:

$$U = V = [0; 1],$$

$$u_1^0 = 0, u_2^0 = 1,$$

$$v_1^0 = 1, v_2^0 = 0,$$

$$M_1 = M_2 = 1, P_1 = 1, P_2 = 5.$$

$F(u, v)$ в этом случае примет вид

$$\vec{J}(u, v) = \begin{bmatrix} u^2 - (v - 1)^2 \\ (u - 1)^2 - 5v^2 \end{bmatrix}.$$

Данный пример отличается от предыдущего областью определения.

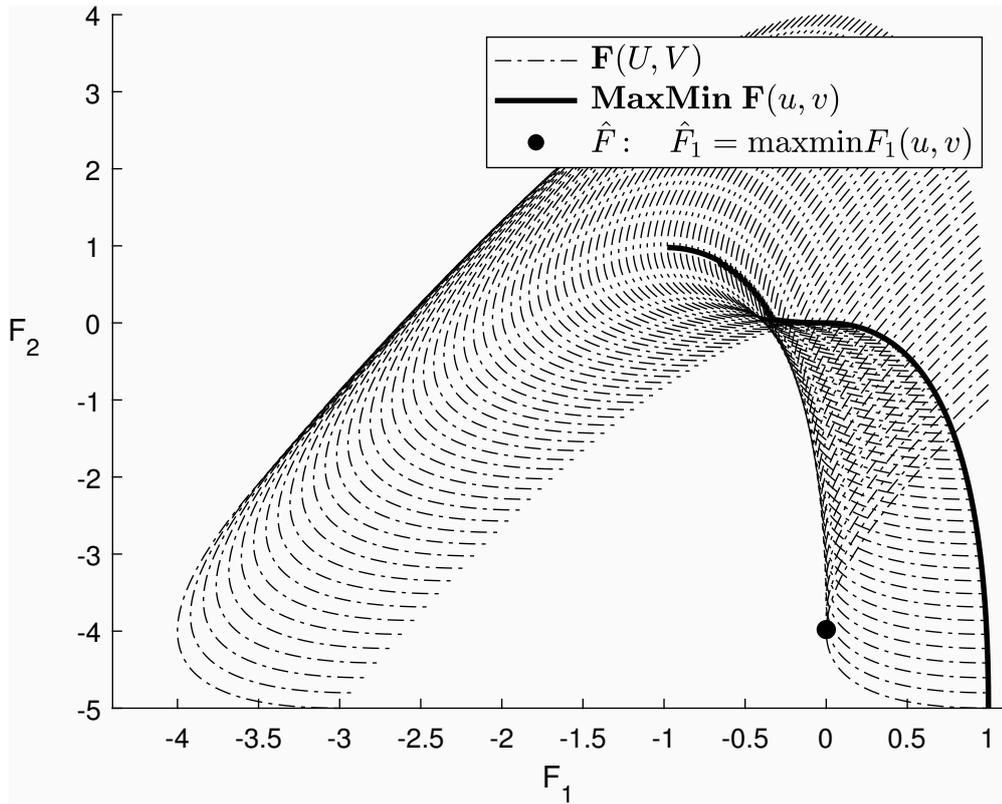


Рисунок 4.7 — Сравнение векторного и покомпонентного максиминов в примере 4.5

Построим графики, аналогичные тем, что приводятся в примере 4.5, но уже для минимакса. Введём равномерную сетку с шагом $d = 1E - 2$ и найдём для каждого фиксированного $u = \bar{u}$ векторный и покомпонентный минимумы (см. рис. 4.8, в каждый момент времени кривая $\mathbf{F}(\bar{u}, V)$ совпадает со своим максимумом). Беря от них соответствующие максимумы, получим границы, изображённые на рис. 4.9.

Рассмотрим теперь предположение, что добавление слагаемого вида αuv позволит избежать указанного эффекта. Векторная функция в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{F}(u, v) = \begin{bmatrix} \langle u - u_1^0, M_1(u - u_1^0) \rangle - \langle v - v_1^0, P_1(v - v_1^0) \rangle + \alpha uv \\ \langle u - u_2^0, M_2(u - u_2^0) \rangle - \langle v - v_1^0, P_2(v - v_2^0) \rangle + \beta uv \end{bmatrix}.$$

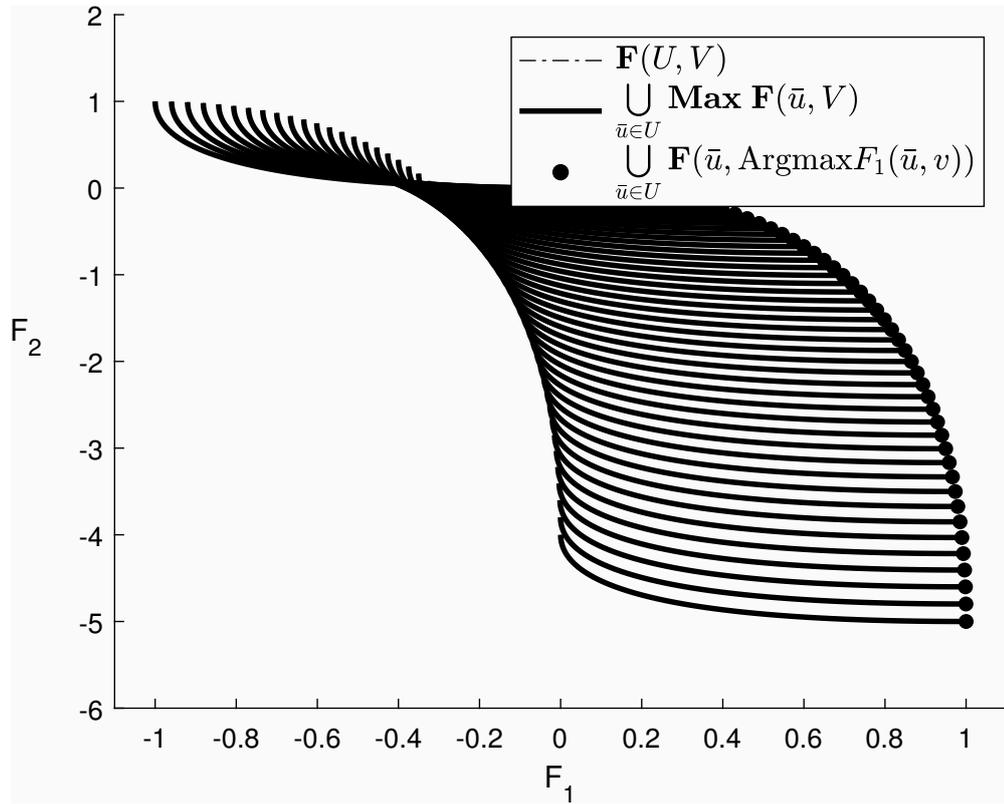


Рисунок 4.8 — Сравнение векторных и покомпонентных максимумов при фиксированном \bar{u} в примере 4.6

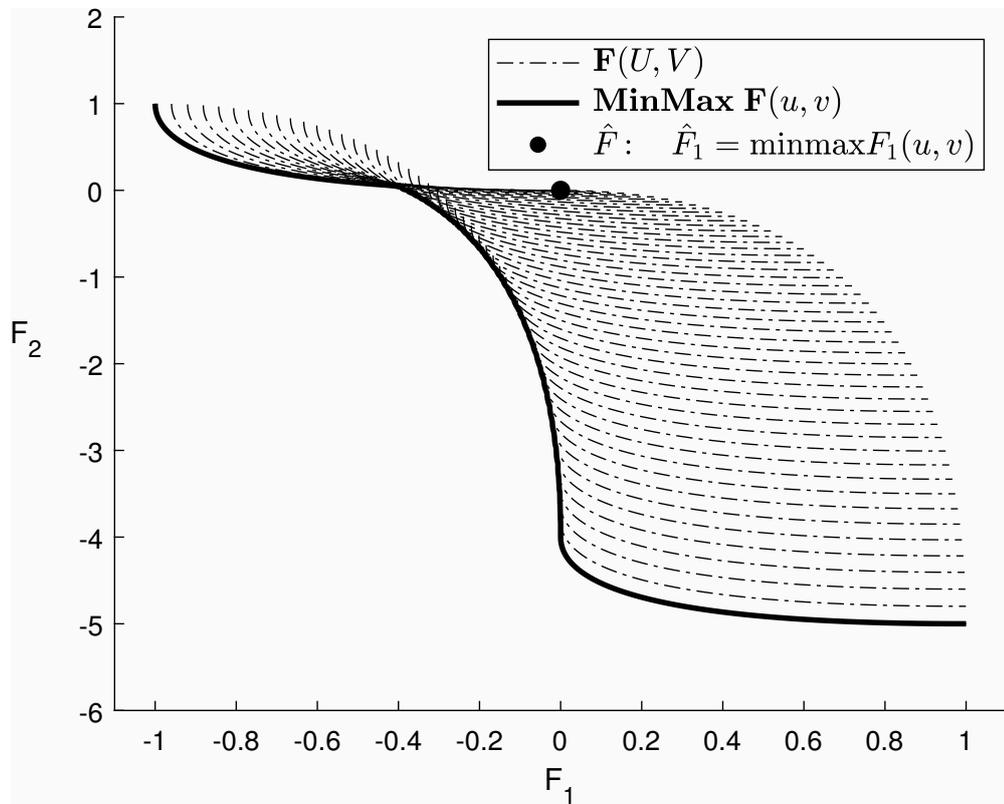


Рисунок 4.9 — Сравнение векторного и покомпонентного минимаксов в примере 4.6

Пример 4.7. Дополним набор параметров из примера 4.5 следующим образом:

$$U = V = [-1; 1],$$

$$u_1^0 = 0, u_2^0 = 1,$$

$$v_1^0 = 1, v_2^0 = 0,$$

$$M_1 = M_2 = 1, P_1 = 1, P_2 = 5,$$

$$\alpha = \beta = 1.$$

Рассматриваемая функция в этом случае примет вид

$$\vec{J}(u, v) = \begin{bmatrix} u^2 - (v - 1)^2 + uv \\ (u - 1)^2 - 5v^2 + uv \end{bmatrix}$$

Результаты построений приведены на рисунках 4.10 и 4.11.

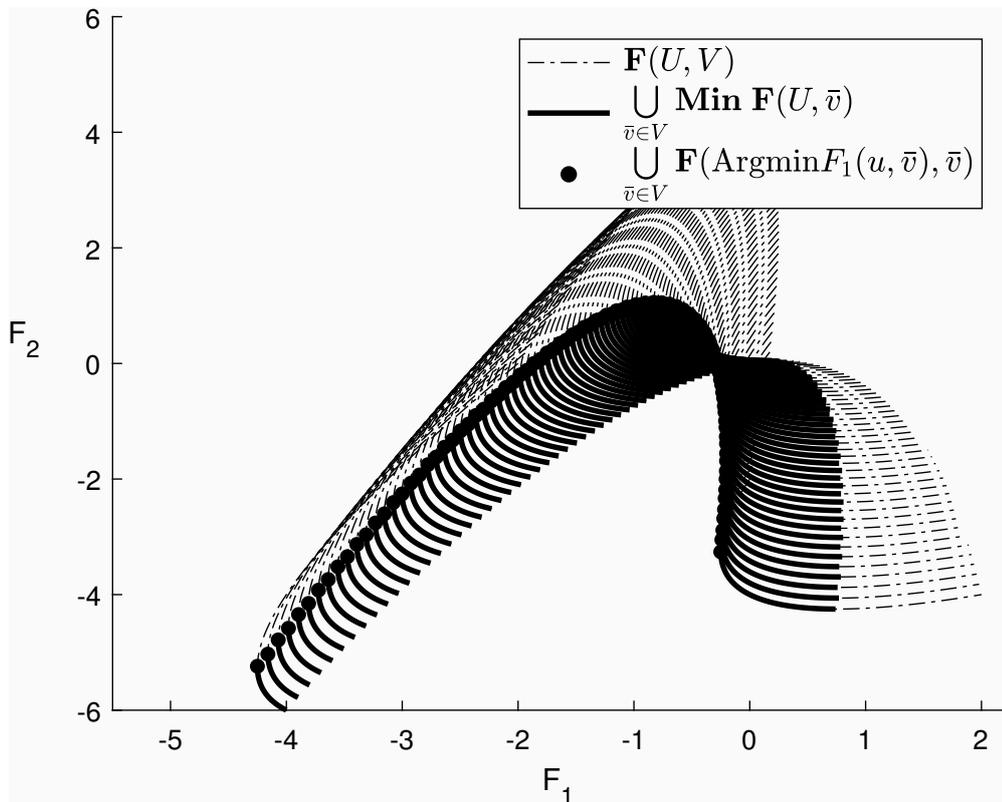


Рисунок 4.10 — Сравнение векторных и покомпонентных минимумов при фиксированном \bar{v} в примере 4.7

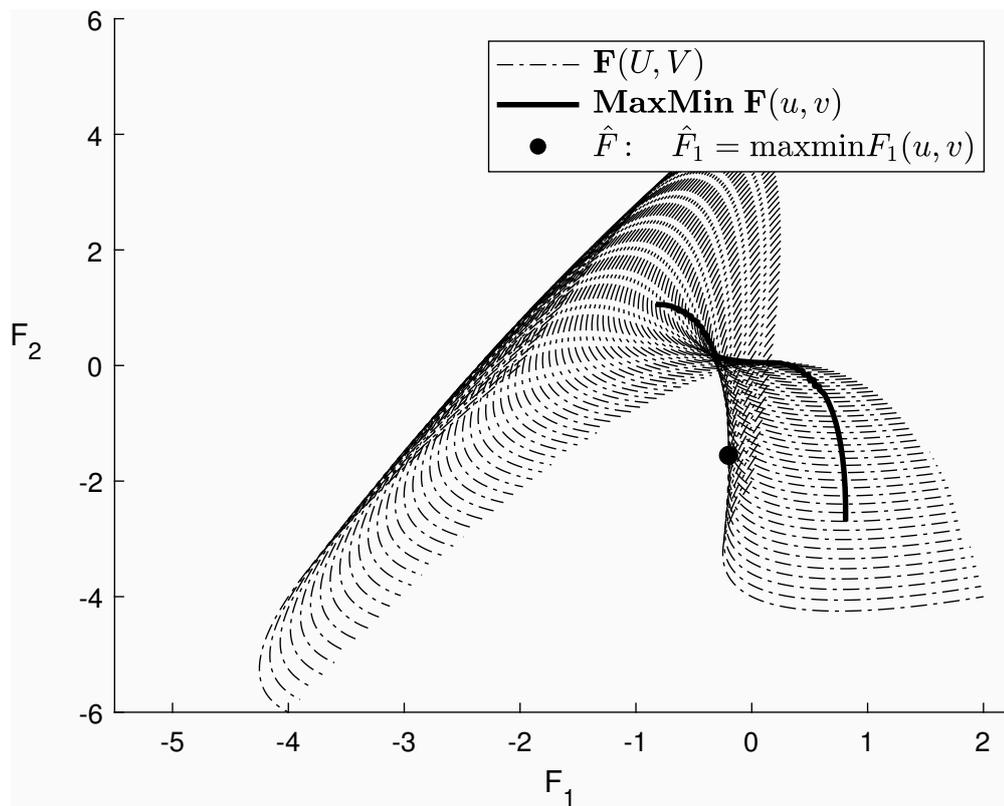


Рисунок 4.11 — Сравнение векторного и покомпонентного максиминов в примере 4.7

Заключение

Кратко сформулируем основные результаты работы.

1. Предложен векторный гамильтонов формализм для решения задач оптимизации управления движением динамических систем как в дискретном, так и в непрерывном времени. Были получены векторные аналоги принципа оптимальности для обоих классов систем. Кроме того, сформулированы аналог классического уравнения Беллмана для систем с дискретным временем и векторное уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана в форме эволюционного уравнения. Исследованы условия применимости метода, в том числе для пространств с порядком, отличным от паретовского.
2. Для дискретных динамических систем предложен метод точечного гарантированного оценивания, позволяющий отыскать конечное число точек точной границы Парето для рассматриваемого векторного функционала.
3. Исследована применимость предложенного гамильтонова формализма к задачам достижимости и разрешимости для систем в непрерывном и дискретном времени. Продемонстрирована связь получаемого таким образом решения с подходом, применяемым в рамках классического динамического программирования.
4. Введены понятия минимакса и максимина для векторного функционала. Продемонстрировано, что повышение размерности влечёт нарушение классического неравенства, связывающего минимакс и максимин для скалярной функции. В связи с этим введены понятия основного и обратного векторных минимаксных неравенств. Выполнение этих неравенств исследовано для классов функционалов с сепарируемыми переменными и билинейных функционалов. Приведён контрпример, демонстрирующий невозможность оценки векторных

минимаксной и максиминной границ с помощью отыскания покомпонентных скалярных минимаксов и максиминов.

Следующие вопросы остаются открытыми на момент подготовки публикаций.

1. Построение гарантированных точечных оценок для систем с непрерывным временем. Предполагается, что удастся свести полученное векторное уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана к обыкновенному дифференциальному уравнению, разрешение которого позволит получить, по крайней мере, конечное число точек точной границы Парето для векторного функционала в рассматриваемой задаче.
2. Использование альтернативных концепций эффективности. Предполагается, что их применение вместо границы Парето позволит устранить точки разрыва введённой векторной функции цены для систем с непрерывным временем.
3. В связи с возможностью использования введённого векторного гамильтонова формализма для решения задач достижимости (разрешимости), представляется полезным обобщение классического метода построения эллипсоидальных оценок для разрешения задач со сложным начальным (целевым) множеством.
4. Исследование условий равенства введённых векторных минимакса и максимина, а также расширение множества классов рассматриваемых функционалов.
5. Получение интерпретируемого аналога седловой точки в векторных задачах на минимакс и максимин.

Результаты данной работы допускают обобщение в рамках указанных проблем, а также любых других задач, предполагающих динамическую оптимизацию векторного критерия.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, преподавателям, а также всем, благодаря кому эта работа стала возможной.

Список литературы

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — Москва : ИЛ, 1960.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Физматлит, 2006.
3. *Комаров Ю. А.* Гамильтонов формализм для задачи оптимизации управляемого движения по векторному критерию // Дифференциальные уравнения. — Москва, 2019. — Т. 55, № 11. — С. 1499—1509.
4. *Комаров Ю. А., Куржанский А. Б.* Векторный вариант гамильтонова формализма // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко. Т. 1. — Москва, 2019. — С. 317—319.
5. *Комаров Ю. А., Куржанский А. Б.* Минимаксные соотношения в задачах оптимизации векторного критерия // Доклады Академии наук. — Москва, 2020. — Т. 492, № 1. — С. 104—107.
6. *Комаров Ю. А., Куржанский А. Б.* Минимаксные-максиминные неравенства для задач с векторным критерием // «Тихоновские чтения»: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — С. 16—16.
7. *Комаров Ю. А., Куржанский А. Б.* О задачах минимаксного типа с векторным критерием // Материалы Международной конференции «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. — Екатеринбург, 2019. — С. 180—184.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — Москва : Наука, 1968.
9. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. — Москва : Наука, 1985.

10. *Куржанский А. Б.* Гамильтонов формализм в задачах группового управления // Дифференциальные уравнения. — Москва, 2019. — Т. 55, № 4. — С. 546—554.
11. *Куржанский А. Б.* Задача управления групповым движением. Общие соотношения // Доклады Академии наук. — Москва, 2009. — Т. 426, № 1. — С. 20—25.
12. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — Москва : Наука, 1977. — 230 с.
13. *Куржанский А. Б., Комаров Ю. А.* Гамильтонов формализм в задачах оптимизации управления движением с векторным критерием // Ломоносовские чтения 2018 ф-т ВМК МГУ. — Москва : МАКС Пресс, 2018. — С. 70—72.
14. *Куржанский А. Б., Комаров Ю. А.* Гамильтонов формализм для задачи управления движением с векторным критерием // Доклады Академии наук. — Москва, 2018. — Т. 480, № 4. — С. 408—412.
15. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — Москва : Наука, 1972.
16. *Лотов А. В., Поспелова И. И.* Многокритериальные задачи принятия решений. — Москва : МАКС Пресс, 2008. — 197 с.
17. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — Москва : Наука, 1961.
18. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — Москва : Физматлит, 2004.
19. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальных игр // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. — Москва, 1985. — Т. 169. — С. 119—157.

20. *Пиеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — Москва : Наука, 1980.
21. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — Москва : Мир, 1973.
22. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. — Москва : Наука, 1991.
23. *Artstein Z.* A Calculus for Set-Valued Maps and Set-Valued Evolution Equations // Set-Valued Analysis. — 1995. — No. 3. — P. 213–261.
24. *Benson H. P.* An improved definition of proper efficiency for vector minimization with respect to cones // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — Vol. 71. — P. 232–241.
25. *Benson H. P.* Efficiency and proper efficiency in vector maximization with respect to cones // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1983. — Vol. 93. — P. 273–289.
26. *Corley H. W.* An existence result for maximizations with respect to cones // Optimal Theory Applications. — 1981. — Vol. 84. — P. 277–281.
27. *Elliot D. L.* Bilinear Control Systems. — Springer, 2009.
28. *Hartley R.* On cone-efficiency, cone-convexity, and cone-compactness // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1978. — Vol. 34, no. 2. — P. 211–222.
29. *Henig M. I.* Proper efficiency with respect to cones // Optimal Theory Applications. — 1982. — Vol. 36. — P. 387–407.
30. *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix analysis. — Cambridge : Cambridge University Press, 1985. — 562 p.
31. *Komarov Y., Kurzhanski A. B.* On the Problems of Minmax–Maxmin Type Under Vector-Valued Criteria // Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. — Cham, Switzerland : Springer International Publishing AG, 2020. — P. 145–155.

32. *Komarov Y. A.* Hamiltonian Formalism for a Multicriteria Optimal Motion Control Problem // *Differential Equations*. — Moscow, 2019. — Vol. 55, no. 11. — P. 1454–1465.
33. *Komarov Y. A., Kurzhanski A. B.* Minimax-Maximin Relations for the Problem of Vector-Valued Criteria Optimization // *Doklady Mathematics*. — Moscow, 2020. — Vol. 101, no. 3. — P. 259–261.
34. *Kurzhanski A. B.* Differential equations in control synthesis problems: I. Ordinary systems // *Differential Equations*. — Russian Federation, 2005. — Vol. 41, no. 1. — P. 10–21.
35. *Kurzhanski A. B., Komarov Y. A.* Hamiltonian Formalism for the Problem of Optimal Motion Control under Multiple Criteria // *Doklady Mathematics*. — Moscow, 2018. — Vol. 97, no. 3. — P. 291–294.
36. *Kurzhanski A. B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. — Birkhäuser Basel, 1994. — 321 p.
37. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Dynamic Optimization for Reachability Problems // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 2001. — Vol. 2. — P. 227–251.
38. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation. — Cham : Birkhäuser Basel, 2014. — 445 p.
39. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On reachability under uncertainty // *SIAM Journal on Control and Optimization*. — United States, 2002. — Vol. 41, no. 1. — P. 181–216.
40. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Reachability under Uncertainty and Measurement Noise // *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. — United Kingdom, 2005. — Vol. 11, no. 2. — P. 183–194.
41. *Nonsmooth Analysis and Control Theory* / F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski. — New York : Springer, 1998.

42. *Salukvadze M. E.* Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory. — New York : Academic Press, 1979. — 230 p.
43. *Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.* Theory of Multiobjective Optimization. — London : Academic Press, 1985. — 296 p.
44. *Tanino T., Sawaragi Y.* Stability of nondominated solutions in multicriteria decision-making // Optimal Theory Applications. — 1980. — Vol. 30. — P. 229—253.
45. *White D. J.* Optimality and Efficiency. — New York : Wiley, 1982. — 244 p.
46. *Yu P. L.* Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiple objectives // Optimal Theory Applications. — 1974. — Vol. 14. — P. 319—377.

Список рисунков

2.1	Множество достижимых значений критерия $\mathcal{Z}(0,0)$ и его граница Парето для системы (2.6)	34
2.2	Сравнение решения $\mathcal{V}(0,0)$ векторного уравнения Беллмана (2.5) с истинной границей Парето $\mathbf{Min}\mathcal{Z}(0,0)$ для системы (2.6)	34
2.3	Сравнение истинной границы Парето $\mathbf{Min}\mathcal{Z}(0,0)$ для системы (2.6) и полученных гарантированных точечных оценок	43
4.1	Примеры сравнения двух произвольных множеств A и B относительно порядка \leq	63
4.2	Нарушение основного минимаксного неравенства для функции с сепарируемыми переменными в примере 4.1	76
4.3	Равенство векторных минимакса и максимина для функции с сепарируемыми переменными в примере 4.2	76
4.4	Нарушение основного минимаксного неравенства для билинейной функции в примере 4.3	77
4.5	Выполнение основного минимаксного неравенства для билинейной функции в примере 4.4	77
4.6	Сравнение векторных и покомпонентных минимумов при фиксированном \bar{v} в примере 4.5	79
4.7	Сравнение векторного и покомпонентного максимумов в примере 4.5	80
4.8	Сравнение векторных и покомпонентных максимумов при фиксированном \bar{u} в примере 4.6	81
4.9	Сравнение векторного и покомпонентного минимаксов в примере 4.6	81
4.10	Сравнение векторных и покомпонентных минимумов при фиксированном \bar{v} в примере 4.7	82
4.11	Сравнение векторного и покомпонентного максимумов в примере 4.7	83

Приложение А

Листинги кода Matlab для вычисления векторных минимума и максимума

Для удобства воспроизведения полученных результатов в данном приложении приводятся листинги программного кода для Matlab, при помощи которого были вычислены все приведённые на иллюстрациях векторные минимумы и максимумы.

Указанные методы оптимизированы с учётом ориентированности Matlab на векторные вычисления, при полном переборе всех точек входного набора сложность алгоритма составляет $O(n)$ (против сложности порядка $O(n^2)$ для простейшего алгоритма перебора всевозможных пар точек в исходном наборе данных).

Листинг А.1: Вычисление векторного минимума в \mathbb{R}^2

```

function [result, x] = pareto_min(x)
    result = [];
    if (size(x,2) == 0)
        return;
    end
    x = unique(x', 'rows')';

    m = [NaN; NaN];
    m(1) = min(x(1,:));
    m(2) = min(x(2, x(1,:) == m(1)));
    x(:, (min(x >= m) == 1)) = [];
    result(:, end+1) = m;

    if (size(x,2) == 0)
        return;
    end

    m = [NaN; NaN];
    m(2) = min(x(2,:));
    m(1) = min(x(1, x(2,:) == m(2)));
    x(:, (min(x >= m) == 1)) = [];
    result(:, end+1) = m;

    [~, i] = sort(x(1,:), 'asc');
    x = x(:, i);

    while(size(x,2) > 0)
        t = x(:, 1);
        x(:, 1) = [];

        x(:, (min(x >= t) == 1)) = [];

        if (size(x,2) == 0 || max(min(x <= t) == 1) == 0)
            result(:, end+1) = t;
        end
    end

    result = sortrows(result)';
end

```

Листинг А.2: Вычисление векторного максимума в \mathbb{R}^2

```

function [result, x] = pareto_max(x)
    result = [];
    if (size(x,2) == 0)
        return;
    end
    x = unique(x', 'rows')';

    m = [NaN; NaN];
    m(1) = max(x(1,:));
    m(2) = max(x(2, x(1,:) == m(1)));
    x(:, (min(x <= m) == 1)) = [];
    result(:, end+1) = m;

    if (size(x,2) == 0)
        return;
    end

    m = [NaN; NaN];
    m(2) = max(x(2,:));
    m(1) = max(x(1, x(2,:) == m(2)));
    x(:, (min(x <= m) == 1)) = [];
    result(:, end+1) = m;

    [~, i] = sort(x(1,:), 'desc');
    x = x(:, i);

    while(size(x,2) > 0)
        t = x(:, 1);
        x(:, 1) = [];

        x(:, (min(x <= t) == 1)) = [];

        if (size(x,2) == 0 || max(min(x >= t) == 1) == 0)
            result(:, end+1) = t;
        end
    end

    result = sortrows(result)';
end

```