Об успокоении многозвенной колебательной системы в условиях неопределённых возмущений

И. В. Востриков, А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

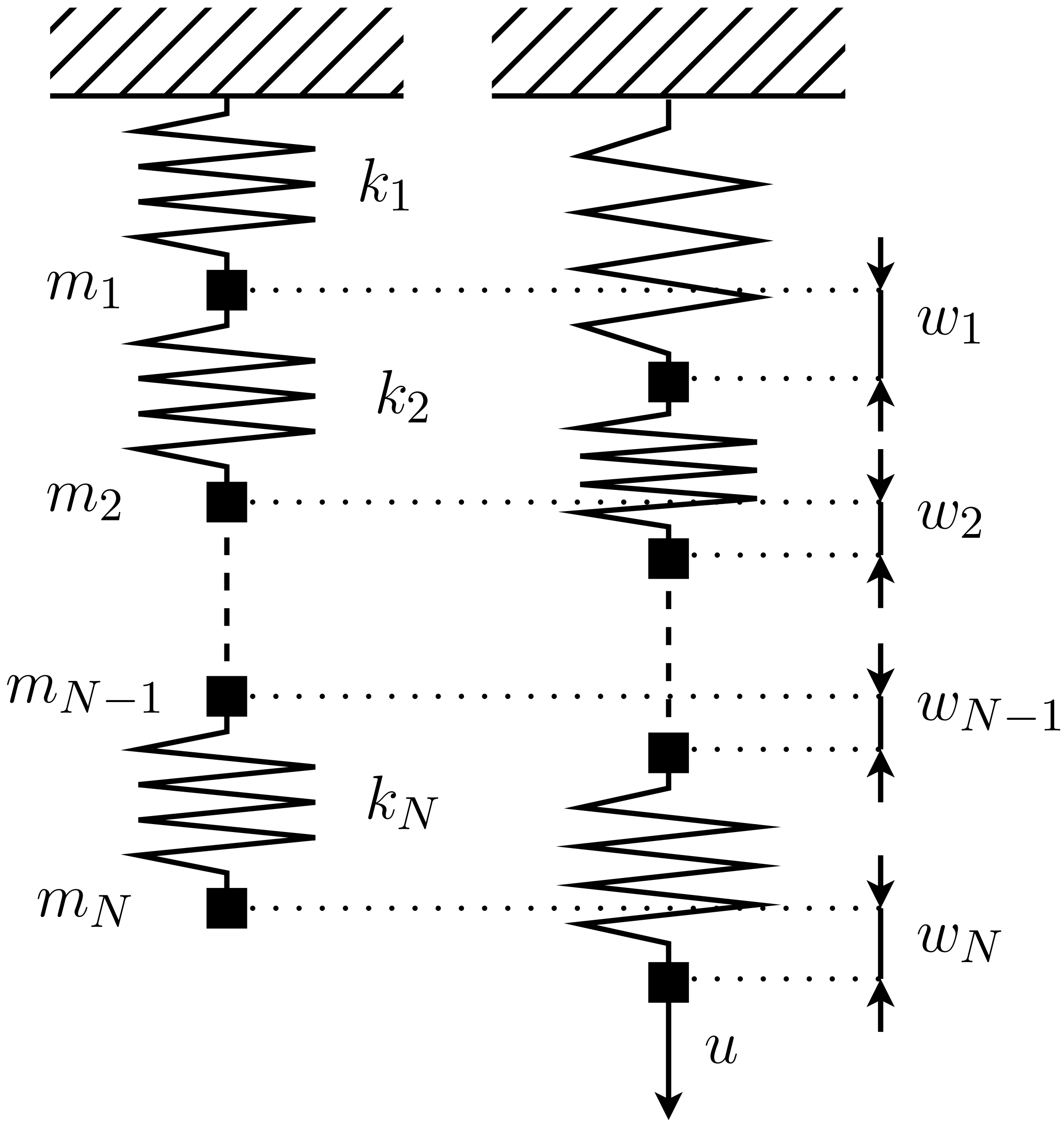
ivan_vostrikov@cs.msu.su, daryin@cs.msu.su, kurzhans@mail.ru

МГУ им. М. В. Ломоносова

Факультет ВМиК

Кафедра системного анализа

Колебательная система



Математическая модель

$$
\begin{cases}
m_1\ddot{w}_1(t) = k_2(w_2 - w_1) - k_1 w_1 \\
m_i\ddot{w}_i(t) = k_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - k_i(w_i - w_{i-1}) \quad i = \overline{2, N-1} \\
m_N\ddot{w}_N(t) = -k_N(w_N - w_{N-1}) + u(t) \\
\\
w_i(t_0) = w_i^0 \quad \dot{w}_i(t_0) = \dot{w}_i^0 \quad i = \overline{1, N}
\end{cases}
$$

- w_i — отклонение от состояния равновесия
- u — управляющая сила
- m_i — массы грузов
- k_i — жёсткости пружин

$N \to \infty$

$$\rho(\xi) w_{tt}(t,\xi) = \big[E(\xi) w_\xi(t,\xi)\big]_\xi, \quad t > t_0, \quad 0 < \xi < L$$

$$w(t,0) = 0, \quad w_\xi(t,L) = E^{-1}(L) u(t), \quad t \geqslant t_0$$

$$w(t_0,\xi) = w^0(\xi), \quad w_t(t_0,\xi) = \dot{w}^0(\xi), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant L$$

- $w(t,\xi)$ — отклонение от состояния равновесия
- $u(t)$ — управляющая сила
- $\rho(\xi)$ — плотность
- $E(\xi)$ — модуль Юнга

Матричная форма

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} \quad w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_N(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -M^{-1}K & 0_N \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_N^{-1} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k_{N-1} & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ & & & -k_N & k_N \end{pmatrix}$$

Управляемость

Система **вполне управляема** на $[t_0, t_1]$, если

$$\forall x(t_0) \quad \exists u(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R} \quad \text{т.ч.} \quad x(t_1) = 0$$

Выполнен **критерий управляемости**:

$$\operatorname{rank} \left[b \; Ab \; A^2 b \; \ldots \; A^{2N-1} b \right] = 2N$$

Ограничение на управление

Жёсткое (геометрическое) ограничение

$$u(t) \in \mathscr{P} = [u_{\min}, u_{\max}]$$

Например:

- Симметричное ограничение: $\mathscr{P} = [-\mu, \mu]$
- Одностороннее управление:
  - $\mathscr{P} = [0, \mu]$
  - $\mathscr{P} = [-\mu, 0]$

Классы управлений

$\mathscr{U}_{\mathsf{OL}}$ — **программные управления** $u(t)$

измеримые функции $[t_0, t_1] \to \mathscr{P}$

$\mathscr{U}_{\mathsf{CL}}$ — **позиционные стратегии** $\mathscr{U}(t, x)$

многозначные отображения $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{conv} \mathscr{P}$,
измеримые по t
полунепрерывные сверху по x

Система с обратной связью — *дифференциальное включение*

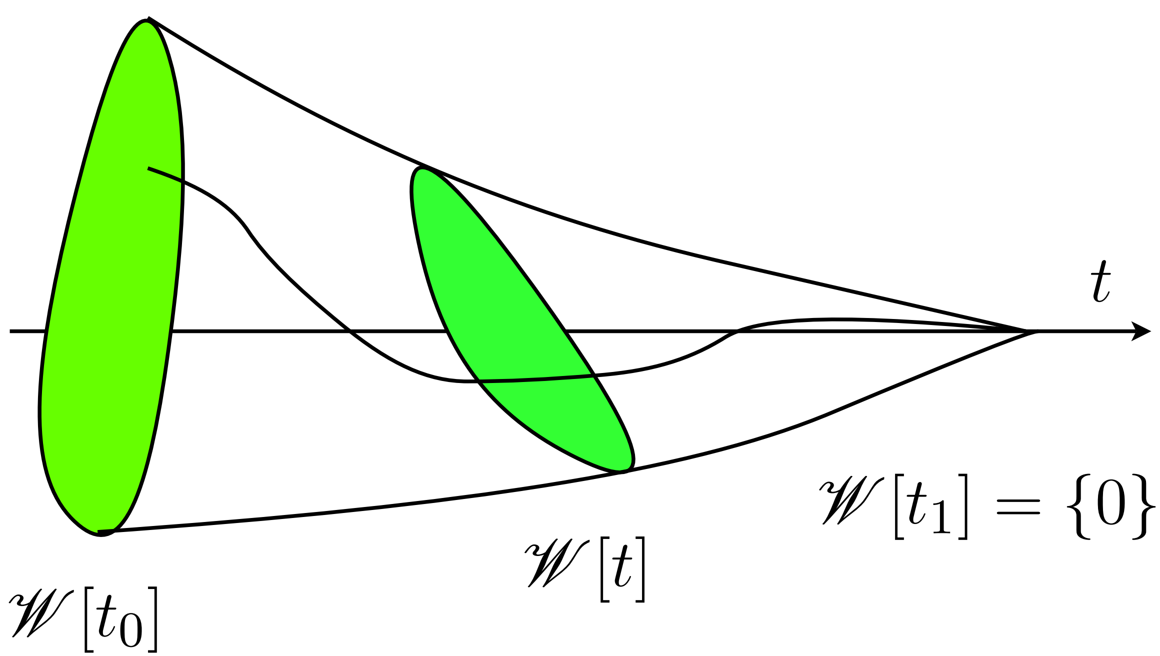
$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + b\mathscr{U}(t, x)$$

Задача

Задача. Найти

- *множество разрешимости* $\mathscr{W}[t_0] \subseteq \mathbb{R}^{2N}$
- позиционную стратегию управления $\mathscr{U}(t, x)$

т.ч. все траектории системы, выпущенные из $\mathscr{W}[t_0]$, успокаиваются к заданному моменту t_1: $x(t_1) = 0$.



Метод динамического программирования

Функция цены:

$$V(t,x) = \min_{\mathscr{U} \in \mathscr{U}_{\mathsf{CL}}} \max_{x(\cdot)} \left\{ \|x(t_1)\|^2 \;\middle|\; x(t) = x \right\}$$

$$V(t,x) = V(t,x;t_1,V(t_1,\cdot)) = V\left(t,x;t_1,\|\cdot\|^2\right)$$

Принцип оптимальности:

$$V\left(t,x;t_1,\|\cdot\|^2\right) = V\left(t,x;\tau,V\left(\tau,\cdot;t_1,\|\cdot\|^2\right)\right) \quad t \leqslant \tau \leqslant t_1$$

Уравнение Беллмана

$$V_t + \min_{u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}} \langle V_x, Ax + bu \rangle = 0 \quad t < t_1$$

$$V(t_1, x) = \|x\|^2$$

$$\mathscr{W}[t] = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2N} \;\middle|\; V(t, x) \leqslant 0 \right\}$$

$$\mathscr{U}^*(t, x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}} \langle V_x, bu \rangle = \begin{cases} u_{\min}, & V_{x_{2N}} > 0; \\ u_{\max}, & V_{x_{2N}} < 0; \\ [u_{\min}, u_{\max}], & V_{x_{2N}} = 0. \end{cases}$$

Точное решение

$$V(t,x) = d^2(\mathrm{e}^{(t_1-t)A}x, \mathrm{e}^{(t_1-t)A}\mathscr{W}[t])$$

Опорная функция множества разрешимости

$$\rho(\ell \mid \mathscr{W}[t]) = \max_{x\in\mathscr{W}[t]} \langle \ell, \mathscr{W}[t]\rangle =$$

$$= \int_t^{t_1} [u_{\max}\cdot\max\{s_{2N}(\tau),0\} + u_{\min}\cdot\min\{s_{2N}(\tau),0\}]\,\mathrm{d}\tau$$

Сопряжённая система

$$\dot{s}(t) = -A^T s(t) \quad s(t_1) = \ell \qquad \text{или} \qquad s(t) = \mathrm{e}^{(t-t_1)A}\ell$$

Точное решение

Управление — прицеливание на $\mathscr{W}[t]$

$$\mathscr{U}^*(t,x) = \begin{cases} u_{\min}, & \ell^0_{2N} > 0 \\ u_{\max}, & \ell^0_{2N} < 0 \\ [u_{\min}, u_{\max}], & \ell^0_{2N} = 0 \end{cases}$$

$$d^2(\mathrm{e}^{(t_1-t)A}x, \mathrm{e}^{(t_1-t)A}\mathscr{W}[t]) = \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \langle \ell, x\rangle - \rho(\ell \mid \mathscr{W}[t]) - \frac{1}{4}\left\|\mathrm{e}^{(t-t_1)A}\ell\right\|^2 =$$

$$= \left\langle \ell^0, x\right\rangle - \rho\left(\ell^0 \mid \mathscr{W}[t]\right) - \frac{1}{4}\left\|\mathrm{e}^{(t-t_1)A}\ell^0\right\|^2$$

$$x \in \mathscr{W}[t] \quad \Longleftrightarrow \quad \ell^0 = 0$$

Приближённое решение

Множество разрешимости $\mathscr{W}[t]$
заменяется аппроксимацией $\mathscr{Z}[t]$.

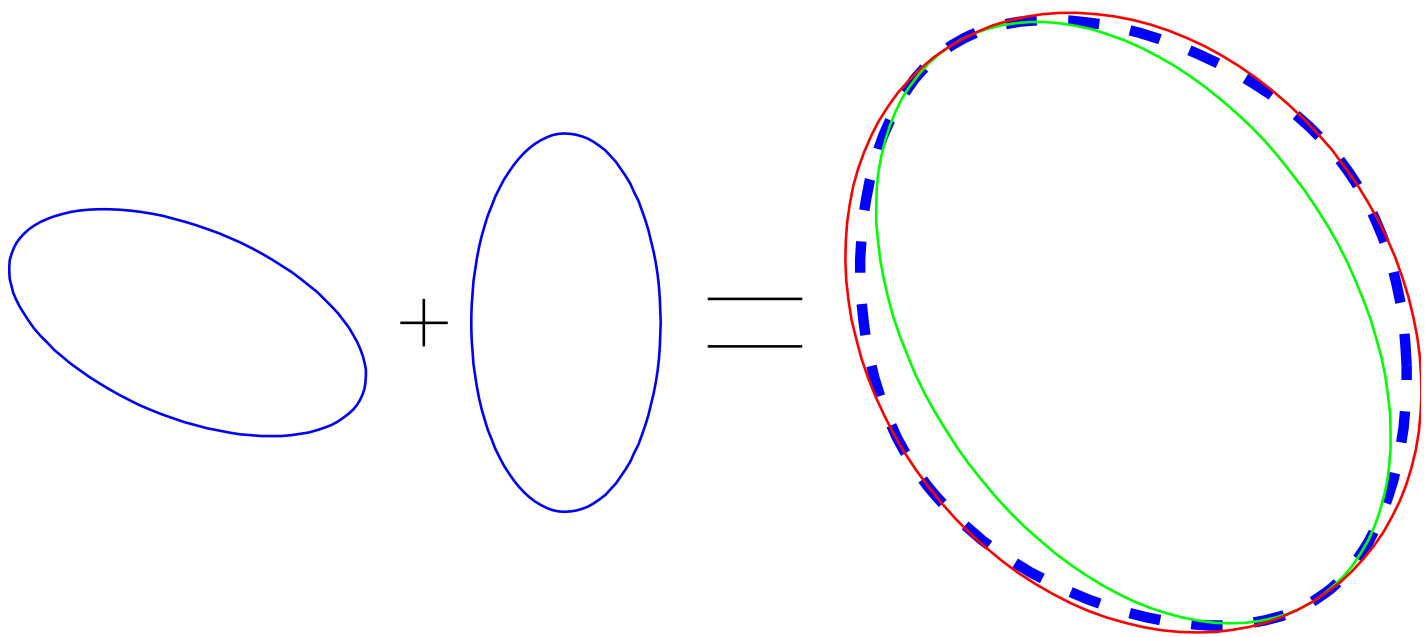
Требования к аппроксимации:

- Небольшой объём информации для описания $\mathscr{Z}[t]$
- Прицеливание на $\mathscr{Z}[t]$ успокаивает систему

Эллипсоиды

$$\mathscr{E}(m, M) = \left\{ x \mid \langle x - m, M^{-1}(x - m)\rangle \leqslant 1 \right\}$$

$$\rho(\ell \mid \mathscr{E}(m, M)) = \langle m, \ell\rangle + \sqrt{\langle \ell, M\ell\rangle}$$



Эволюционное уравнение

$$\lim_{\sigma\to 0+} \sigma^{-1} h_+(\mathscr{Z}[t-\sigma], (I-\sigma A)\mathscr{Z}[t] - \sigma b\mathscr{P}) = 0$$

$$\mathscr{Z}[t_1] = \{0\}$$

$$h_+(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \min\{r > 0 \mid \mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y} + \mathscr{B}_r\}$$

$\mathscr{W}[t]$ — максимальное по включению решение эволюционного уравнения

Прицеливание на $\mathscr{Z}[t]$

$$Z(t,x) = d^2(x, \mathscr{Z}[t])$$

$$\min_{u_{\min}\leqslant u\leqslant u_{\max}} \frac{\mathrm{d}Z(t,x(t))}{\mathrm{d}t} = Z_t + \min_{u_{\min}\leqslant u\leqslant u_{\max}} \langle Z_x, Ax+bu\rangle \leqslant 0.$$

$$\mathscr{U}_{\mathscr{Z}}(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u_{\min}\leqslant u\leqslant u_{\max}} \langle Z_x, bu\rangle$$

Если $x(t) \in \mathscr{Z}[t]$, то

$$\|x(t_1)\| = d(x(t_1), \mathscr{Z}[t_1]) \leqslant d(x(t), \mathscr{Z}[t]) = 0$$

Эллипсоидальная аппроксимация

$$\mathscr{Z}[t] = \mathscr{E}(x^*(t), X_-(t))$$

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + bp$$

$$\dot{X}_-(t) = AX_-(t) + X_-(t)A^T + X_-^{\frac{1}{2}}(t)S(t)(bPb^T)^{\frac{1}{2}} + (bPb^T)^{\frac{1}{2}}S^T(t)X_-^{\frac{1}{2}}(t)$$

$$x^*(t_1) = 0 \quad X_-(t) = 0$$

$$S(t)P^{\frac{1}{2}}B^T s(t) = \lambda(t)X_-^{\frac{1}{2}}s(t) \quad S^T(t)S(t) = I \quad s(t) = \mathrm{e}^{(t-t_1)A}\ell$$

$$\mathscr{P} = \mathscr{E}(p, P) \quad p = \frac{1}{2}(u_{\min} + u_{\max}) \quad P = \frac{1}{4}(u_{\max} - u_{\min})^2$$

$$\rho(\, s(t) \mid \mathscr{Z}[t]) = \rho(\, s(t) \mid \mathscr{W}[t])$$

Эллипсоидальный синтез управлений

$$\mathscr{U}_{\mathscr{X}}(t,x) = \begin{cases} u_{\min}, & \ell^0_{2N} > 0; \\ u_{\max}, & \ell^0_{2N} < 0; \\ [u_{\min}, u_{\max}], & \ell^0_{2N} = 0, \end{cases}$$

$$\ell^0 = 2\lambda(X_- + \lambda F)^{-1}(x - x^*)$$

$$F = \mathrm{e}^{(t-t_1)A^T}\mathrm{e}^{(t-t_1)A}$$

$$\left\langle (X_- + \lambda F)^{-1}(x - x^*), X_-(X_- + \lambda F)^{-1}(x - x^*)\right\rangle = 1$$

$$\lambda \geqslant 0$$

Система с неопределённостью

$$\begin{cases} m_1\ddot{w}_1(t) = k_2(w_2 - w_1) - k_1 w_1 + v_1(t) \\ m_i\ddot{w}_i(t) = k_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - k_i(w_i - w_{i-1}) + v_i(t) \\ m_N\ddot{w}_N(t) = -k_N(w_N - w_{N-1}) + u(t) + v_N(t) \\ \\ w_i(t_0) = w_i^0 \quad \dot{w}_i(t_0) = \dot{w}_i^0 \quad i = \overline{1, N} \end{cases}$$

v_i — **возмущения** (неизвестные, но ограниченные):

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{Q} \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^N$$

Система с неопределённостью

$$\begin{cases} m_1\ddot{w}_1(t) = k_2(w_2 - w_1) - k_1 w_1 \\ m_i\ddot{w}_i(t) = k_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - k_i(w_i - w_{i-1}) \\ m_N\ddot{w}_N(t) = -k_N(w_N - w_{N-1}) + u(t) + v_N(t) \\ \\ w_i(t_0) = w_i^0 \quad \dot{w}_i(t_0) = \dot{w}_i^0 \quad i = \overline{1, N} \end{cases}$$

$$v(t) \in \mathscr{Q}_N = \left\{ v \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; v_i = 0,\ i = \overline{1, N-1};\ v_N \in [v_{\min}, v_{\max}] \right\}$$

Матричная форма

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + Cv(t)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0_N \\ M^{-1} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N \end{pmatrix} \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{pmatrix}$$

Система с обратной связью:

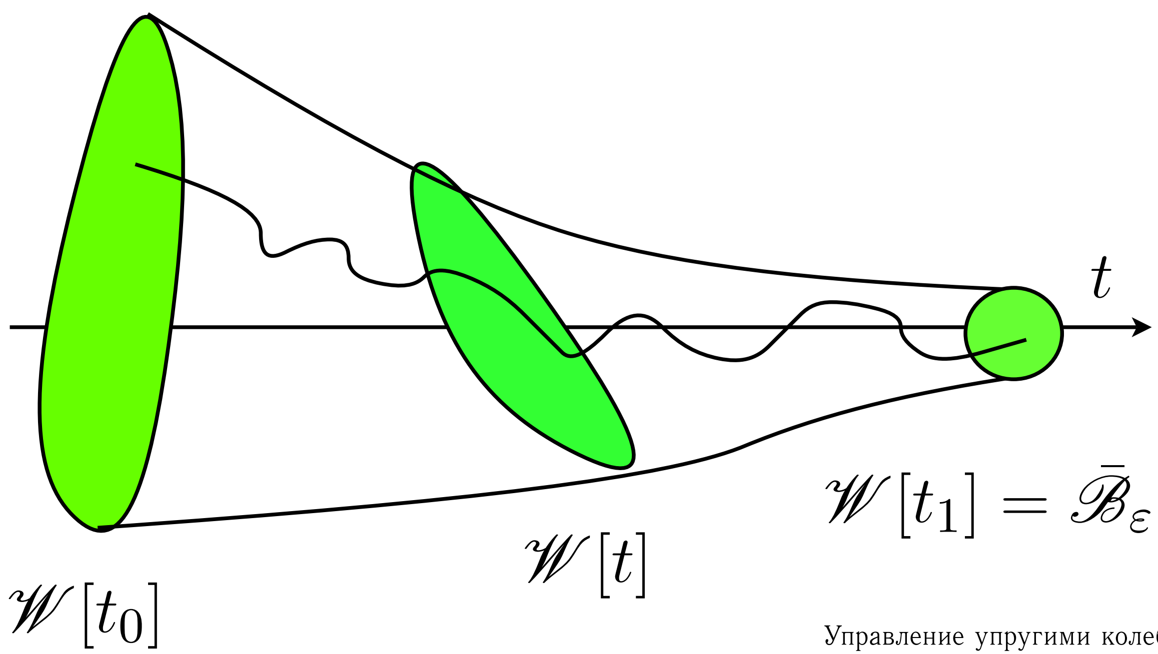
$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + b\mathscr{U}(t, x) + C\mathscr{Q}$$

Задача

Задача. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найти

- *множество разрешимости* $\mathscr{W}[t_0] \subseteq \mathbb{R}^{2N}$
- позиционную стратегию управления $\mathscr{U}(t, x)$

т.ч. все траектории системы, выпущенные из $\mathscr{W}[t_0]$, успокаиваются к заданному моменту t_1 с точностью ε: $\|x(t_1)\| \leqslant \varepsilon$.



Уравнение Беллмана–Айзекса

$$V_t + \min_{u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}} \max_{v \in \mathscr{Q}} \langle V_x, Ax + bu + Cv \rangle = 0 \quad t < t_1$$

$$V(t_1, x) = \|x\|^2$$

$$\mathscr{W}[t] = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2N} \;\middle|\; V(t, x) \leqslant 0 \right\}$$

$$\mathscr{U}^*(t, x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}} \langle V_x, bu \rangle = \begin{cases} u_{\min}, & V_{x_{2N}} > 0; \\ u_{\max}, & V_{x_{2N}} < 0; \\ [u_{\min}, u_{\max}], & V_{x_{2N}} = 0. \end{cases}$$

Решение для $\mathscr{Q}_N$

Если $v_i(t) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, а $v_N(t) \in [v_{\min}, v_{\max}]$, то

$$V_t + \min_{u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}} \max_{v \in \mathscr{Q}} \langle V_x, Ax + bu + Cv \rangle = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$V_t + \min_{u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}} \max_{v_{\min} \leqslant v_N \leqslant v_{\max}} \langle V_x, Ax + b(u + v_N) \rangle = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$V_t + \min_{u_{\min} + v_{\max} \leqslant u \leqslant u_{\max} + v_{\min}} \langle V_x, Ax + bu \rangle = 0$$

Рассматриваемая задача эквивалентна задаче без неопределённости при $\mathscr{P} = [u_{\min} + v_{\max}, u_{\max} + v_{\min}]$

Список литературы

Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.

Бондаренко В. И., Красовский Н. Н., Филимонов Ю. М. К задаче об успокоении линейной системы // ПММ. 1965. Т. 29. № 5. С. 828–834.

Красовский Н. Н. К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления // ПММ. 1965. Т. 29. № 2. С. 218–225.

Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.

Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: 1974.

Куржанский А. Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.

Куржанский А. Б., Мельников Н. Б. О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби // Математический сборник. 2000. Т. 191. № 6. С. 69–100.

Куржанский А. Б., Никонов О. И. К задаче синтеза стратегий управления. Эволюционные уравнения и многозначное интегрирование // ДАН. 1990. Т. 311. № 4.

Куржанский А. Б., Никонов О. И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Доклады РАН. 1993. Т. 333. № 4.

Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // ДАН. 1986. Т. 289. № 1.

Панасюк А. И., Панасюк В. И. // Математические заметки. 1980. Т. 27. № 3. С. 213–218.

Список литературы

Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх II // ДАН. 1967. Т. 175. № 4.

Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330.

Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М., И.: Институт компьютерных исследований, 2003.

Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of American Mathematical Society. 1983. V. 277. P. 1–41.

Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. N.Y.: Springer, 1993.

Kurzhanski A. B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhäuser, 1997.

Kurzhanski A. B., Varaiya P. On reachability under uncertainty // SIAM Journal on Control. 2002. V. 41. N. 1. P. 181–216.

Kurzhanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal toolbox. `http://www.eecs.berkeley.edu/~akurzhan/ellipsoids/`, 2005.