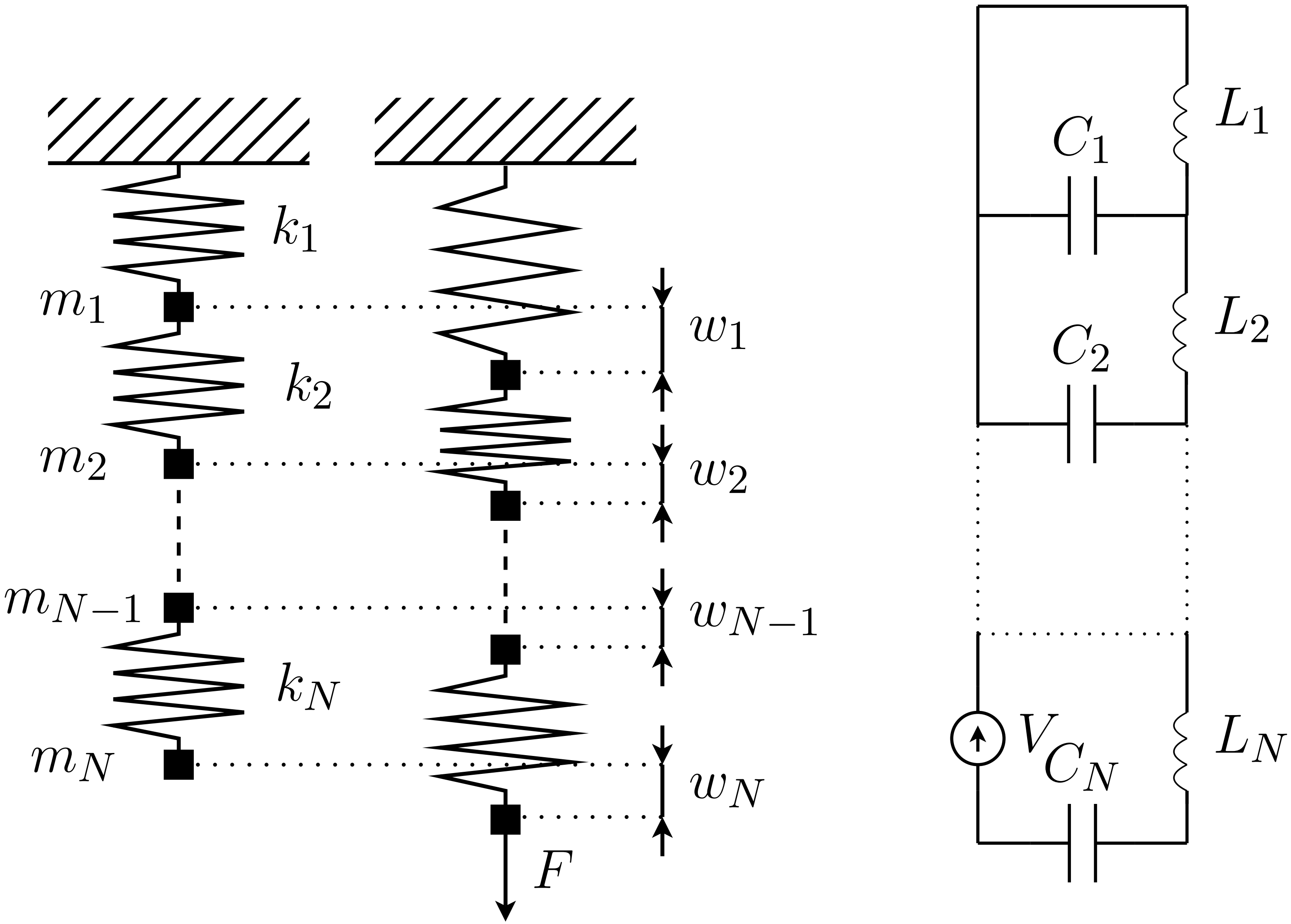
Об успокоении колебательных систем за конечное время ограниченными, гладкими управлениями

И. В. Востриков, А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

Кафедра системного анализа

Колебательная система



Математическая модель

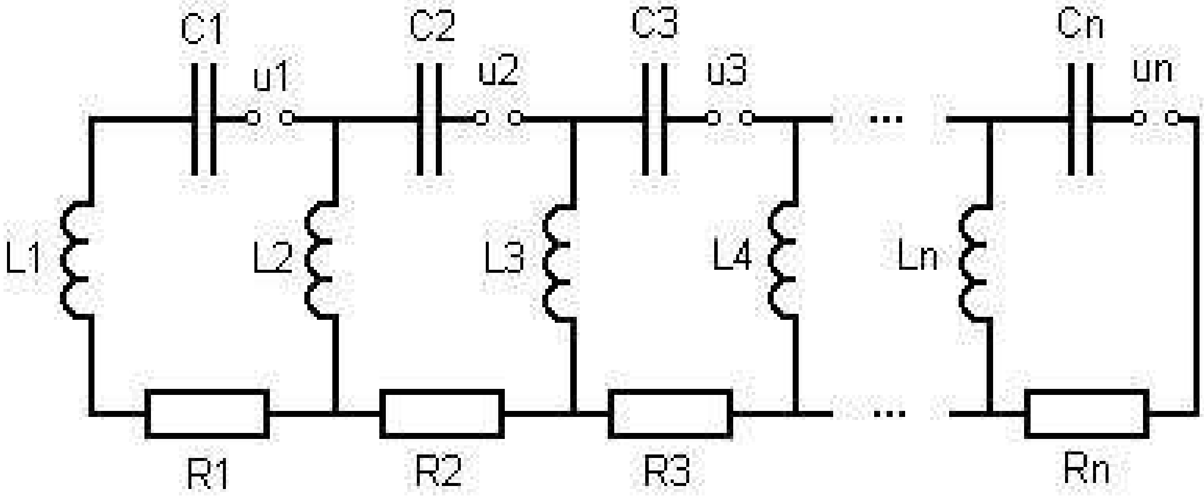
$$\begin{cases} m_1\ddot{w}_1(t) &= k_2(w_2 - w_1) - k_1 w_1 + v_1(t) \\ m_i\ddot{w}_i(t) &= k_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - k_i(w_i - w_{i-1}) + v_i(t) \quad i = \overline{2, N-1} \\ m_N\ddot{w}_N(t) &= -k_N(w_N - w_{N-1}) + F(t) + v_N(t) \\ \\ w_i(t_0) &= w_i^0 \quad \dot{w}_i(t_0) = \dot{w}_i^0 \quad i = \overline{1, N} \end{cases}$$

- F — управляющая сила
- v_i — неизвестные возмущающие силы

Система **вполне управляема**.

При большом N размерность системы высокая.
(В наших экспериментах N до 25, т.е. размерность до 50).

Аппроксимация телеграфного уравнения



Аппроксимация телеграфного уравнения

$$
\begin{cases}
m_1\ddot{y}_1(t) = -(k_1 + k_2)y_1(t) + k_2y_2(t) - \mu_1\dot{y}_1(t) \\
m_2\ddot{y}_2(t) = k_2y_1(t) - (k_2 + k_3)y_2(t) + k_3y_3(t) - \mu_2\dot{y}_2(t) \\
\ldots \\
m_2\ddot{y}_{N_1}(t) = k_{N-1}y_{N-2}(t) - (k_{N-1} + k_N)y_{N-1}(t) + \\
\qquad k_Ny_N(t) - \mu_{N-1}\dot{y}_{N-1}(t) \\
m_N\ddot{y}_N(t) = -k_Ny_{N-1}(t) + k_Ny_N(t) - \mu_N\dot{y}_N(t) - \\
\qquad \nu_Ny_N(t) + F(t) + v(t)
\end{cases}
$$

- F — управляющее воздействие
- v — неизвестное возмущение

Управление и помеха

Гладкость управления обеспечивается интегратором:

$$\begin{cases} \dot{F}(t) &= F_1(t), \\ \dot{F}_1(t) &= u(t) \end{cases} \qquad u(t) \text{ — управление}$$

Ограниченность управления достигается за счёт модификации интегратора:

$$\begin{cases} \dot{F}(t) &= -\alpha_0 F(t) + F_1(t), \\ \dot{F}_1(t) &= -\alpha_1 F_1(t) + u(t) \end{cases}$$

Другой возможный подход — введение фазовых ограничений

$$|F(t)| \leqslant \mu_0, \quad |F_1(t)| \leqslant \mu_1.$$

Управление и помеха

Геометрическое ограничение на управление и помеху:

$$u(t) \in \mathscr{P} = [-\mu, \mu] \qquad v(t) \in \mathscr{Q} \subset \mathbb{R}^N$$

Помеха может быть **в резонансе** с колебательной системой, может присутствовать

- во всех уравнениях
- только в последнем уравнении

Система в матричной форме (здесь $x = (w, \dot{w}, F, F_1)$):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu + Cv.$$

Задача

Синтез управлений — $\mathscr{U}_{\mathsf{CL}}$: $\mathscr{U}(t,x) : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{conv} \mathscr{P}$ (выпуклые компактные значения, измеримо по t, полунепрерывно снизу по x)

Замкнутая система — дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + b\mathscr{U}(t,x) + C\mathscr{Q}$$

Задача. Для данного $\varepsilon > 0$ найти

- *множество разрешимости* $\mathscr{W}[t_0] \subseteq \mathbb{R}^n$
- синтез управлений $\mathscr{U}(t,x)$

т.ч. при $x(t_0) \in \mathscr{W}[t_0]$, выполняется $\|x(t_1)\| \leqslant \varepsilon$.

Замечание: решение ищется на фиксированном отрезке времени $[t_0,t_1]$, это не задача стабилизации!

Динамическое программирование

Функция цены:

$$V(t,x) = \min_{\mathscr{U}\in\mathscr{U}_{\mathsf{CL}}} \max_{x(\cdot)} \left\{ \max\{0, \|x(t_1)\| - \varepsilon\}^2 \;\middle|\; x(t) = x \right\}$$

$$V(t,x) = V(t,x;t_1,V(t_1,\cdot)), \quad V(t_1,x) = \max\{0,\|x\|-\varepsilon\}^2$$

Принцип оптимальности:

$$V(t,x;t_1,V(t_1,\cdot)) = V(t,x;\tau,V(\tau,\cdot;t_1,V(t_1,\cdot))) \quad t \leqslant \tau \leqslant t_1$$

Динамическое программирование

$$V_t + \min_{|u|\leqslant\mu} \max_{v\in\mathscr{Q}} \langle V_x, Ax + bu + Cv\rangle = 0 \quad t < t_1$$

$$V(t_1, x) = V(t_1, x) = \max\{0, \|x\| - \varepsilon\}^2$$

$$V(t,x) = d\Big(\mathrm{e}^{(t_1-t)A}x, \mathrm{e}^{(t_1-t)A}\mathscr{W}[t]\Big) \quad V(t,x) \leqslant d\Big(\mathrm{e}^{(t_1-t)A}x, \mathrm{e}^{(t_1-t)A}\mathscr{W}[t]\Big)$$

без неопределённости при неопределённости

$$\mathscr{W}[t] = \Big\{ x \in \mathbb{R}^{2N+\nu} \;\Big|\; V(t,x) \leqslant 0 \Big\}$$

$$\mathscr{U}^*(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{|u|\leqslant\mu} \langle V_x, bu\rangle = \begin{cases} -\mu, & V_{x_n} > 0; \\ \mu, & V_{x_n} < 0; \\ [-\mu, \mu], & V_{x_n} = 0. \end{cases}$$

Аппроксимация

Нахождение точных $W[t]$, $V(t,x)$ требует чрезвычайно большого объёма вычислений и памяти.

Возможное решение:

- заменить множество разрешимости $\mathscr{W}[t]$ его внутренней аппроксимацией $\mathscr{W}_-[t]$ простой структуры;
- заменить функцию цены $V(t,x)$ верхней оценкой $d\Big(\mathrm{e}^{(t_1-t)A}x, \mathrm{e}^{(t_1-t)A}\mathscr{W}_-[t]\Big)$.

Эллипсоиды

$$\mathscr{E}(m, M) = \left\{ x \mid \left\langle x - m, M^{-1}(x - m) \right\rangle \leqslant 1 \right\}$$

$$\rho(\ell \mid \mathscr{E}(m, M)) = \langle m, \ell \rangle + \sqrt{\langle \ell, M\ell \rangle}$$

(A. B. Kurzhanski and I. Vályi, Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.)

Эллипсоидальная аппроксимация

$$\mathscr{W}_-[t] = \mathscr{E}(x^*(t), X_-(t))$$

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Cq$$

$$\dot{X}_-(t) = AX_-(t) + X_-(t)A^T - \pi(t)X_-(t) - \pi^{-1}(t)CQC^T +$$

$$+X_-^{\frac{1}{2}}(t)S(t)(bPb^T)^{\frac{1}{2}} + (bPb^T)^{\frac{1}{2}}S^T(t)X_-^{\frac{1}{2}}(t)$$

$$x^*(t_1) = 0 \quad X_-(t) = 0$$

$$S(t)P^{\frac{1}{2}}B^Ts(t) = \lambda(t)X_-^{\frac{1}{2}}s(t) \quad S^T(t)S(t) = I \qquad \pi(t) = \frac{\langle s(t), CQC^Ts(t)\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle s(t), X_-(t)s(t)\rangle^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathscr{Q} = \mathscr{E}(q, Q)$$

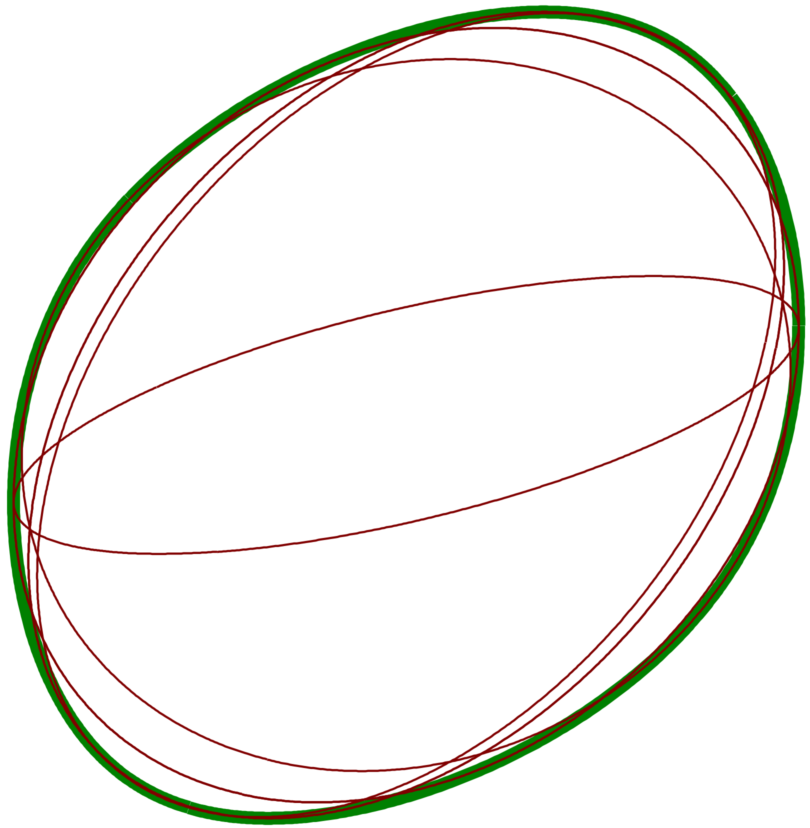
$$\rho(\, s(t) \mid \mathscr{W}_-[t]) = \rho(\, s(t) \mid \mathscr{W}[t])$$

(A. B. Kurzhanski and P. Varaiya, “Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints,” Optimization methods and software, *vol. 17, pp. 177–237, 2002.)*

Эллипсоидальная аппроксимация

Эллипсоидальные аппроксимации **тугие**:

$$\rho(\,s(t)\mid \mathscr{W}_-[t]) = $$
$$= \rho(\,s(t)\mid \mathscr{W}[t])$$



Эллипсоидальный синтез управлений

$$\mathscr{U}_{\mathscr{W}_-}(t,x) = \begin{cases} -\mu, & \ell^0_{2N+\nu} > 0; \\ \mu, & \ell^0_{2N+\nu} < 0; \\ [-\mu,\mu], & \ell^0_{2N+\nu} = 0, \end{cases}$$

$$\ell^0 = X_-^{-1}[t]\cdot(x - x^*(t))$$

Ellipsoidal toolbox:

http://www.eecs.berkeley.edu/~akurzhan/ellipsoids/

Преимущества подхода

Представленный подход — **общая схема** решения задач управления высоких размерностей.

Эффективность:

- В $\mathbb{R}^n$ эллипсоид описывается $O(n^2)$ значениями.
- Для нахождения аппроксимации решается система ОДУ.
- Управление вычисляется как решение линейной системы.
- Параллельные вычисления.
- Компромисс между точностью и вычислительной трудностью.

Преимущества подхода

При помощи эллипсоидальной аппроксимации возможно **анализировать соотношения** между

- ограничениями на управление
- ограничениями на помеху
- желаемой точностью управления (ε)
- длиной отрезка времени.

Список литературы

Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*. М.: Наука, 1970.

A. B. Kurzhanski, I. Vályi, *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. Birkhäuser, 1997.

R. Bellman, R. Kalaba, *Dynamic programming in modern control theory*. London math. soc. monographs. London, 1965.

А. Б. Куржанский, *Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений*. // Дифф. уравн. Т. 41. № 1. С. 12–22. 2005.

N. N. Krasovski, A. I. Subbotin *Game-Theoretical Control Problems*. Springer, 1998.

T. Başar and P. Bernhard, H^∞ *Optimal Control and Related Minimax Design Problems*. Birkhäuser, 1995.

A. A. Kurzhanskiy and P. Varaiya, “Ellipsoidal toolbox,” http://www.eecs.berkeley.edu/~akurzhan/ellipsoids/.

Список литературы

Л. С. Понтрягин, “О линейных дифференциальных играх II,” *ДАН СССР*, Т. 175. № 4. С. 910–912. 1967.

А. Б. Куржанский, “Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений,” Труды МИАН, Т. 224. С. 234–248. 1999.

А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М.: Наука, 1985.

И. В. Востриков, А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский , ”Успокоение многозвенной колебательной системы в условиях неопределённых возмущений”. Дифф. уравн. № 11. 2006.

В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, ”Оптимизация граничных управлений колебаниями струны ”. УМН. Т. 6. № 60. 2005.