

УДК 517.977

ОБ УСПОКОЕНИИ МНОГОЗВЕННОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

И. В. Востриков, А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

Данная статья посвящена решению задачи о синтезе управлений для колебательных систем высоких размерностей. В ней указаны эффективные схемы решения подобных задач для систем, подверженных неизвестным, но ограниченным возмущениям, в том числе находящимся в резонансе с системой. Выбранный подход основан на вычислении слабо инвариантных многозначных отображений, известных как множества разрешимости задачи синтеза или попятных областей достижимости («мостов Н. Н. Красовского») [1]. Указанные множества далее используются в рамках метода динамического программирования для построения соответствующих стратегий управления, а также для исследования возможности успокоения колебаний системы за заданное конечное время при различных параметрах системы и возмущениях. Отмечена роль эллипсоидальных методов для численного решения данного круга задач. Наряду с теорией в статье приведены результаты численного моделирования, выполненного с использованием специализированного программного пакета эллипсоидального исчисления при вычислении в данной работе искомых областей достижимости. Последний позволяет решать задачи реалистично высоких размерностей в условиях ограниченного времени.

1 Задача

Рассмотрим задачу о синтезе управления, успокаивающего колебания подвешенной цепи из конечного числа нагруженных пружин за счёт управляющей силы, приложенной к концу одной из пружин (рис. 1). Система должна достичь состояния равновесия за заданное конечное время.

Помимо пружин, цепь содержит также грузы с известной массой, закреплённые между пружинами. Предполагается, что массы пружин пренебрежимо малы по сравнению с массами грузов, а верхний конец цепи жёстко закреплён на неподвижном подвесе, тогда малые колебания цепи могут быть описаны следующей системой линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{w}_1 = k_2(w_2 - w_1) - k_1 w_1, \\ m_i \ddot{w}_i = k_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - k_i(w_i - w_{i-1}), & i \neq 1, \nu, N; \\ m_\nu \ddot{w}_\nu = k_{\nu+1}(w_{\nu+1} - w_\nu) - k_\nu(w_\nu - w_{\nu-1}) + u(t), \\ m_N \ddot{w}_N = -k_N(w_N - w_{N-1}), \end{cases} \quad t > t_0. \quad (1)$$

Здесь N — число пружин, пронумерованных сверху вниз. Грузы пронумерованы аналогичным образом, так что i -й груз прикреплен к нижнему концу i -й пружины. Через w_i обозначается смещение i -го груза относительно состояния равновесия, $m_i > 0$ — масса i -го груза, $k_i > 0$ — коэффициент жёсткости i -й пружины. Сила тяжести входит в систему уравнений (1) неявным образом, определяя длины пружин в состоянии покоя.

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00332), программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант УР.03.02.521) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-5344.2006.1).

Начальное состояние цепи в момент времени t_0 определяется смещениями w_i^0 и скоростями грузов $\dot{w}_i^0$:

$$w_i(t_0) = w_i^0, \quad \dot{w}_i(t_0) = \dot{w}_i^0.$$

Управляющая сила $u(t)$ приложена к ν -му грузу, её величина принимает значения из отрезка $\mathcal{P} = [u_{\min}, u_{\max}]$. Последнее является *геометрическим*, или *жестким* ограничением, позволяющим учесть конструктивные особенности управляемой системы. Например, абсолютное значение прикладываемой силы не должно превышать предельного значения μ ($\mathcal{P} = [-\mu, \mu]$), или силу можно прикладывать только в одном направлении (только вниз: $\mathcal{P} = [0, \mu]$, или только вверх: $\mathcal{P} = [-\mu, 0]$).

Систему (1) при $\nu = N$ можно рассматривать как разностную аппроксимацию по пространственной переменной (метод прямых) одномерного уравнения малых колебаний струны с закреплённым левым концом и силой, приложенной на правом свободном конце:

$$\begin{aligned} \rho(\xi)w_{tt}(t, \xi) &= [E(\xi)w_\xi(t, \xi)]_\xi, \quad t > t_0, \quad 0 < \xi < L; \\ w(t, 0) &= 0, \quad w_\xi(t, L) = E^{-1}(L)u(t), \quad t \geq t_0; \\ w(t_0, \xi) &= w^0(\xi), \quad w_t(t_0, \xi) = \dot{w}^0(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq L. \end{aligned}$$

(Здесь $w(t, \xi)$ — смещение точки ξ в момент t ; каждая точка струны ξ описывается модулем Юнга $E(\xi)$ и плотностью $\rho(\xi)$.) Следовательно, предлагаемый подход может оказаться полезным для исследования задач граничного управления волновым уравнением [2].

Целью статьи является построение позиционной стратегии управления, обеспечивающей перевод системы (1) из любого начального положения в состояние равновесия в заданный момент времени в указанный момент времени¹ $t_1: w(t_1) = 0, \dot{w}(t_2) = 0$.

В отсутствие неопределённостей в системе программные управления и управления с обратной связью обеспечивают достижение одного и того же результата, то есть задача разрешима или не разрешима одновременно для указанных классов управлений (см. [5]). Однако при наличии помех использование синтеза управлений может заметно улучшить результат за счёт использования дополнительной информации о реализации возмущений по ходу процесса управления.

Прежде чем дать определение синтеза управлений и формулировку задачи, перепишем исходную колебательную систему в нормальной матричной форме, для чего введём расширенный вектор неизвестных $x \in \mathbb{R}^{2N}$, так что $(x_1, \dots, x_N) = w$, $(x_{N+1}, \dots, x_{2N}) = \dot{w}$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) = x^0 = \begin{pmatrix} w^0 \\ \dot{w}^0 \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & I_{N \times N} \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \underbrace{(0, \dots, 0)_N}_{N}, \underbrace{(0, \dots, 0, m_\nu^{-1}, 0, \dots, 0)_N}_{N}^T, \\ M &= \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k_{N-1} & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ & & & -k_N & k_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

Перейдём к строгому определению стратегий управления.

Определение 1. Позиционной стратегией управления (синтезом управлений) называется многозначное отображение $\mathcal{U}(t, x) : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathcal{P}$, полунепрерывное сверху по переменной x , измеримое по t , принимающее непустые выпуклые компактные значения во множестве $\mathcal{P}$. Класс позиционных стратегий обозначается $\mathcal{U}_{CL}$.

¹Задача о полной остановке линейной системы с минимальной интенсивностью управления рассматривалась в работах [3, 4] и другими авторами.

Указанный класс управлений обеспечивает существование и продолжаемость решений дифференциального включения [6]

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + b\mathcal{U}(t, x), \quad t \geq t_0 \quad (3)$$

возникающего после подстановки в правую часть (2) позиционной стратегии $\mathcal{U}(t, x)$ вместо $u(t)$. Хотя исходная система была линейной, система с обратной связью (3) таковой не является из-за присутствия нелинейной функции $\mathcal{U}(t, x)$.

Задача 1. Найти множество разрешимости $\mathcal{W}[t_0] \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ и такую позиционную стратегию управления $\mathcal{U}(t, x)$, что все траектории системы (3), выпущенные из начального множества $\mathcal{W}[t_0]$ в момент времени t_0 , будут достигать положения равновесия к моменту t_1 (то есть $x(t_1) = 0$).

Множество разрешимости $\mathcal{W}[t_0]$ также называют *понятным множеством достижимости* (поскольку это множество точек, достижимых из состояния равновесия в обратном времени).

Приведённая постановка естественным образом распространяется на задачи с неопределённостью. Далее будет рассмотрена задача синтеза, где управлению требуется успокоить колебания системы несмотря на действие заранее неизвестных возмущений. При этом будет предполагаться, что доступная информация о помехе исчерпывается множеством её допустимых значений.

Такой подход позволяет, в частности, учесть модельные ошибки. Например, верхний конец цепочки может быть закреплен недостаточно жёстко, вследствие чего возникают дополнительные неизвестные слагаемые в первом уравнении системы (1). Входящие в систему физические параметры — массы и коэффициенты упругости — могут быть измерены с некоторой погрешностью, тогда при условии ограниченности рассматриваемых колебаний соответствующие поправки в правую часть (1) также будут ограничены. Тем же способом можно учесть и нелинейности, связанные с изменением жёсткости при удлинении пружин.

Система с помехой имеет вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{w}_1 = k_2(w_2 - w_1) - k_1 w_1 + v_1, \\ m_i \ddot{w}_i = k_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - k_i(w_i - w_{i-1}) + v_i, \quad i \neq 1, \nu, N; \\ m_\nu \ddot{w}_\nu = k_{\nu+1}(w_{\nu+1} - w_\nu) - k_\nu(w_\nu - w_{\nu-1}) + u(t) + v_\nu, \\ m_N \ddot{w}_N = -k_N(w_N - w_{N-1}) + v_N, \end{cases} \quad t > t_0. \quad (4)$$

Здесь возмущающая сила v_i прилагается к i -му грузу. Как и управление, помеха стеснена геометрическим ограничением: $v(t) \in \mathcal{Q}$, где $\mathcal{Q}$ — непустой выпуклый компакт из $\mathbb{R}^N$.

Запишем систему (4) в стандартной матричной форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + Cv(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad C = \begin{pmatrix} 0_{N \times N} \\ M^{-1} \end{pmatrix},$$

где матрицы A , b и M определены в (2). Отметим, что помеха здесь входит лишь в половину уравнений.

При позиционном управлении $\mathcal{U}(t, x) \in \mathcal{U}_{CL}$ система превращается в дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + b\mathcal{U}(t, x) + C\mathcal{Q}(t), \quad t \geq t_0, \quad (5)$$

решения которого существуют на интервале $[t_0, t_1]$ в силу свойств класса $\mathcal{U}_{CL}$.

Из-за наличия неизвестных возмущений управление уже не может в общем случае гарантировать полного успокоения колебательной системы. Тогда будем требовать приведения траекторий системы в заданную ε -окрестность начала координат.

Задача 2. Для заданного числа $\varepsilon > 0$ найти множество разрешимости $\mathcal{W}_\varepsilon[t_0] \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ и такую позиционную стратегию управления $\mathcal{U}_\varepsilon(t, x)$, чтобы все траектории системы (5), выпущенные из начального множества $\mathcal{W}_\varepsilon[t_0]$ в момент времени t_0 , удовлетворяли условию $\|x(t_1)\| \leq \varepsilon$, каким бы ни было возмущение $v(t)$.

Множество $\mathcal{W}_\varepsilon[t_0]$ слабо инвариантно относительно дифференциального включения (5). Напомним, что множество называется слабо инвариантным, если для каждой его точки существует стратегия с обратной связью, переводящая систему из этой точки в целевое множество в заданный момент времени. Свойство слабой инвариантности весьма важно для построения точных стратегий управления или их аппроксимаций (например, при использовании эллипсоидальных аппроксимаций, описанных далее).

Задачу (2) можно также интерпретировать как дифференциальную игру [7, 8, 9].

2 Анализ управляемости

Прежде чем перейти непосредственно к решению поставленных задач, исследуем управляемость линейной системы (2).

Напомним, что линейная система вида $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$) называется *вполне управляемой* [13, 14], если для любых пар состояний (t_0, x_0) и (t_1, x_1) ($t_1 > t_0$, $x_i \in \mathbb{R}^n$) существует программное управление $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, переводящее систему из первого состояния во второе. Критерием полной управляемости является условие

$$\text{rank } \Phi(A, B) = n, \quad \Phi(A, B) = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B). \quad (6)$$

Теорема 1. Система (2) вполне управляема тогда и только тогда, когда для всех собственных векторов $\xi^{(i)}$ матрицы $A_0 = M^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}}$ выполняется условие $\xi_\nu^{(i)} \neq 0$.

Доказательство. Произведём в уравнении (1) линейную замену переменных в два этапа. Сначала положим $y(t) = M^{\frac{1}{2}}w(t)$, после чего система примет вид

$$\ddot{w}(t) = -A_0w(t) + b_y u(t), \quad b_y = (0, \dots, 0, m_\nu^{-\frac{1}{2}}, 0, \dots, 0)^T.$$

Поскольку A_0 — самосопряжённая положительно определённая матрица, она представима в виде $A_0 = \Xi \Lambda \Xi^T$, где Ξ — ортогональная матрица, столбцы которой $\xi^{(i)}$ являются собственными векторами матрицы A_0 , а Λ — диагональная матрица, содержащая соответствующие собственные числа $\lambda_i > 0$.

После второй замены $w(t) = \Xi h(t)$ получаем систему

$$\ddot{h}(t) = -\Lambda h(t) + b_h u(t), \quad b_h = \Xi^T b_y, \quad (7)$$

или, в поэлементной записи,

$$\ddot{h}_i(t) = -\lambda_i h_i(t) + m_\nu^{-\frac{1}{2}} \xi_\nu^{(i)} u(t).$$

Далее понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Система $\ddot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ вполне управляема тогда и только тогда, когда система $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ вполне управляема.

Доказательство. Запишем первую систему в нормальной форме: $\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t)$, где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0_{n \times m} \\ B \end{pmatrix}.$$

Далее имеем

$$\Phi(\hat{A}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & AB & \dots & 0 & A^{n-1}B \\ B & 0 & AB & 0 & \dots & A^{n-1}B & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{rank } \Phi(\hat{A}, \hat{B}) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & \Phi(A, B) \\ \Phi(A, B) & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{rank } \Phi(A, B),$$

откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Применяя доказанную лемму к системе (7), приходим к исследованию ранга матрицы $\Phi(\Lambda, b_h)$. Имеем

$$\Phi(\Lambda, b_h) = m_\mu^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \xi_\nu^{(1)} & \lambda_1 \xi_\nu^{(1)} & \dots & \lambda_1^{N-1} \xi_\nu^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_\nu^{(N)} & \lambda_N \xi_\nu^{(N)} & \dots & \lambda_N^{N-1} \xi_\nu^{(N)} \end{pmatrix}$$

. Используя определитель Вандермонда, получаем

$$\det \Phi(\Lambda, b_h) = m_\mu^{-\frac{1}{2}} \left[\prod_{i=1}^N \xi_\nu^{(i)} \right] \left[\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_j - \lambda_i) \right].$$

Собственные числа λ_i различны, так как A_0 — симметричная трёхдиагональная матрица. В результате получаем доказываемое условие управляемости: числа $\xi_\nu^{(i)}$ не обращаются в нуль. $\square$

Следствие 1.1. В случае $m_i \equiv m$, $k_i \equiv k$ система (2) является вполне управляемой тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(\nu, 2N+1) = 1$. В частности, система всегда вполне управляема при $\nu = 1, 2, N$.

Доказательство. Матрица A_0 здесь имеет вид

$$A_0 = \frac{k}{m} \hat{A}_0, \quad \hat{A}_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что собственные векторы матрицы $\hat{A}_0$ имеют вид $\xi_j^{(i)} = \sin \frac{j(2i-1)}{2N+1} \pi$, $i, j = \overline{1, N}$, а соответствующие собственные числа равны $\lambda_i = 2 \left(1 - \cos \frac{2i-1}{2N+1} \pi \right)$. Учитывая, что $\xi_j^{(i)} = \sin(\nu - \frac{j(2i-1)}{2N+1}) \pi = \sin \frac{2\nu(N+1-i)}{2N+1} \pi$, получаем, что координаты собственных векторов $\xi_\nu^{(i)}$ пробегает набор значений $\sin \frac{\nu i}{2N+1} \pi$, $i = \overline{1, 2N}$. Следовательно, условие управляемости имеет вид $\nu i \not\equiv 0 \pmod{2N+1}$, $i \in \overline{1, 2N}$. $\square$

Следствие 1.2. В случаях $\nu = 1$ и $\nu = N$ система (2) является вполне управляемой при любых $m_i > 0$, $k_i > 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\nu = 1$. Пусть $A_0 \xi = \lambda \xi$, $\xi \neq 0$, $\xi_1 = 0$. Но тогда $(A_0 \xi)_1 = -k_2 \xi_2 = 0$, следовательно, $\xi_2 = 0$. $(A_0 \xi)_2 = -k_3 \xi_3$, следовательно, $\xi_3 = 0$. Продолжая этот процесс далее, получаем, что $\xi = 0$, что противоречит предположению $\xi \neq 0$. Следовательно, для всех собственных векторов $\xi_1 \neq 0$.

Случай $\nu = N$ рассматривается аналогично. $\square$

В случаях, не охваченные следствиями 1.1 и 1.2, полную управляемость системы можно исследовать, непосредственно проверяя условие теоремы.

3 Решение

3.1 Система без неопределённости

Рассмотрим вначале задачу об успокоении колебаний в отсутствии неопределённых возмущений (задача 1). Постановка задачи не содержала какого-либо оптимизационного критерия, однако для применения методов динамического программирования потребуем от управления, чтобы оно минимизировало отклонение от состояния покоя в конечный момент времени. В частности, если такое отклонение равно нулю, то выполняется требование задачи 1 о полном успокоении колебаний. Введём соответствующую *функцию цены*

$$V(t, x) = \min_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\text{CL}}} \max_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)} \|x(t_1)\|^2. \quad (8)$$

Здесь $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — трубка решений дифференциального включения (3), соответствующая стратегии управления $\mathcal{U}(t, x)$ и начальному условию $x(t) = x$.

Можно считать, что функция цены зависит не только от начальной позиции (t, x) , но также от конечного момента времени t_1 и заданного в этот момент терминального функционала, в данном случае $\varphi(x) = \|x\|^2 = d^2(x, \{0\})$. С помощью расширенного обозначения, отражающего указанную зависимость:

$$V(t, x) = V(t, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \min_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\text{CL}}} \max_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)} \varphi(x(t_1))$$

можно сформулировать *принцип оптимальности*, выраженный в виде полугруппового свойства для обобщённой динамической системы

$$V(t, x; t_1, \varphi(\cdot)) = V(t, x; \tau, V(\tau, \cdot; t_1, \varphi(\cdot))), \quad t \leq \tau \leq t_1. \quad (9)$$

Отсюда следует, что в паре (t, x) содержится вся информация о текущем состоянии системы, что позволяет записать основное уравнение динамического программирования.

Теорема 2. *Функция цены $V(t, x)$ является классическим решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ)*

$$V_t + \min_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \langle V_x, Ax + bu \rangle = 0, \quad t < t_1, \quad (10)$$

с краевым условием $V(t_1, x) = \|x\|^2$.

Доказательство основано на использовании средств выпуклого анализа [15] (см. [5]).

Решение задачи 1 может быть выражено через функцию цены, если последняя каким-либо образом найдена. А именно, множество разрешимости представимо в виде:

$$\mathcal{W}[t] = \{x \in \mathbb{R}^{2N} \mid V(t, x) \leq 0\}. \quad (11)$$

Оптимальная позиционная стратегия здесь состоит из минимизаторов u в (10):

$$\mathcal{U}^*(t, x) = \underset{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}}{\text{Arg min}} \langle V_x, bu \rangle = \underset{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}}{\text{Arg min}} V_{x_{N+\nu}} u = \begin{cases} u_{\min}, & V_{x_{N+\nu}} > 0; \\ u_{\max}, & V_{x_{N+\nu}} < 0; \\ [u_{\min}, u_{\max}], & V_{x_{N+\nu}} = 0. \end{cases}$$

Отметим, что управление принимает лишь крайние значения $u_{\min}$, $u_{\max}$, за исключением положений x внутри множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$ и некоторых вырожденных положений вне $\mathcal{W}[t]$, где $V_{x_{N+\nu}} = 0$.

Для упрощения вычислений заметим, что функция цены может быть выражена через множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$. Применяя методы выпуклого анализа, получаем (см. [5]):

$$V(t, x) = d^2\left(e^{(t_1-t)A}x, e^{(t_1-t)A}\mathcal{W}[t]\right). \quad (12)$$

Последнее может быть записано более подробно:

$$\begin{aligned} d^2(e^{(t_1-t)A}x, e^{(t_1-t)A}\mathcal{W}[t]) &= \max_{\ell \in \mathbb{R}^{2N}} \left\{ \langle \ell, x \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{W}[t]) - \frac{1}{4} \|e^{(t-t_1)A}\ell\|^2 \right\} = \\ &= \langle \ell^0, x \rangle - \rho(\ell^0 \mid \mathcal{W}[t]) - \frac{1}{4} \|e^{(t-t_1)A}\ell^0\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\rho(\ell \mid \mathcal{W}[t])$ — опорная функция множества $\mathcal{W}[t]$ в направлении ℓ (см. [15]):

$$\rho(\ell \mid \mathcal{W}[t]) = \max_{x \in \mathcal{W}[t]} \langle \ell, x \rangle, \quad (14)$$

а ℓ^0 — максимизатор в (13), единственный в силу сильной выпуклости максимизируемой функции. Для нашей задачи опорная функция (14) может быть выражена следующим образом:

$$\rho(\ell \mid \mathcal{W}[t]) = \int_t^{t_1} [u_{\max} \cdot (s_{N+\nu}(\tau))_+ + u_{\min} \cdot (s_{N+\nu}(\tau))_-] d\tau, \quad (15)$$

где $a_- = \min\{a, 0\}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$, а $s(t)$ является решением сопряжённого уравнения

$$\dot{s}(t) = -A^T s(t), \quad s(t_1) = \ell. \quad (16)$$

Оптимальная позиционная стратегия тогда записывается в виде

$$\mathcal{U}^*(t, x) = \begin{cases} u_{\min}, & \ell_{N+\nu}^0 > 0; \\ u_{\max}, & \ell_{N+\nu}^0 < 0; \\ [u_{\min}, u_{\max}], & \ell_{N+\nu}^0 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Теорема 3. Синтез управлений, описываемый соотношениями (17)–(16), принадлежит классу позиционных стратегий $\mathcal{U}_{CL}$, и в совокупности со множеством разрешимости, определённым своей опорной функцией (15), составляет решение задачи 1.

Наибольшая вычислительная нагрузка здесь возникает при решении задачи оптимизации в (13). Последняя может быть существенно упрощена, если заменить точное множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ на его аппроксимацию $\mathcal{Z}[t]$ достаточно простой структуры.

С этой целью для аппроксимации множества разрешимости используем эллипсоиды:

$$\mathcal{E}(q, Q) = \{x \in \mathbb{R}^{2N} \mid \langle x - q, Q^{-1}(x - a) \rangle \leq 1\}.$$

Здесь $q \in \mathbb{R}^N$ — центр эллипсоида, $Q \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ — положительно определённая матрица конфигурации (её собственные числа и векторы определяют ориентацию и размер эллипсоида). Опорная функция эллипсоида равна

$$\rho(\ell \mid \mathcal{E}(q, Q)) = \langle \ell, q \rangle + \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Вывод уравнений эллипсоидальной аппроксимации [5, 16, 17, 18] основан на эволюционном уравнении [19, 20, 21, 22] для множества разрешимости и его аппроксимаций:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} h_+(\mathcal{W}[t - \sigma], (I - \sigma A)\mathcal{W}[t] - \sigma b\mathcal{P}) = 0, \quad (18)$$

с начальным условием $\mathcal{W}[t_1] = \{0\}$. Здесь $h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \min\{r > 0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} + \mathcal{B}_r(0)\}$ — метрика Хаусдорфа в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^{2N}$. Наибольшее по включению решение (18) совпадает со множеством разрешимости $\mathcal{W}[t]$.

Для целей синтеза управлений важно следующее свойство решений эволюционного уравнения [5]:

Теорема 4. Пусть $\mathcal{Z}[t]$ — такое решение эволюционного уравнения (18), что функция $\rho(\ell \mid \mathcal{Z}[t])$ дифференцируема по t для любого $\ell \in \mathbb{R}^{2N}$. Тогда функция

$$Z(t, x) = d^2 \left(e^{(t_1-t)A} x, e^{(t_1-t)A} \mathcal{Z}[t] \right)$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\min_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \frac{dZ(t, x(t))}{dt} = Z_t + \min_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \langle Z_x, Ax + bu \rangle \leq 0. \quad (19)$$

Как следствие (19) выполняется следующее свойство позиционного управления, определённого как множество минимизаторов в (19):

$$\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t, x) = \operatorname{Arg} \min_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \langle Z_x, bu \rangle. \quad (20)$$

Если начальная точка $x(t_0)$ траектории дифференциального включения (3) находится внутри $\mathcal{Z}[t_0]$, то остальная часть траектории также лежит в трубке $\mathcal{Z}[t_0]$. Последнее верно, поскольку расстояние от $x(t)$ до $\mathcal{Z}[t]$ является невозрастающей функцией.

Следовательно, если внутренняя аппроксимация множества разрешимости является решением эволюционного уравнения, то позиционная стратегия (20) успокаивает цепь для всех начальных состояний из $\mathcal{Z}[t_0]$ в момент t_1 . При этом управление может быть вычислено по формулам (13)–(17) с заменой $\mathcal{W}[t]$ на $\mathcal{Z}[t]$. Такую стратегию управления можно интерпретировать как «прицеливание» на трубку $\mathcal{Z}[t]$.

Поиск внутренней эллипсоидальной аппроксимации $\mathcal{E}(x^*(t), X_-(t))$, удовлетворяющей эволюционному уравнению, приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для параметров эллипсоида [16]:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= Ax^*(t) + bp, \quad x^*(t_1) = 0; \\ \dot{X}_-(t) &= AX_-(t) + X_-(t)A^T + X_-^{\frac{1}{2}}(t)S(t)(bPb^T)^{\frac{1}{2}} + (bPb^T)^{\frac{1}{2}}S^T(t)X_-^{\frac{1}{2}}(t), \quad X_-(t_1) = 0; \\ S(t)P^{\frac{1}{2}}B^Ts(t) &= \lambda(t)X_-^{\frac{1}{2}}(t), \quad S^T(t)S(t) = I. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $p = \frac{1}{2}(u_{\min} + u_{\max})$ и $P = \frac{1}{4}(u_{\max} - u_{\min})^2$ — параметры одномерного эллипсоида $\mathcal{E}(p, P)$, равного отрезку $\mathcal{P} = [u_{\min}, u_{\max}]$.

Полученная таким образом эллипсоидальная аппроксимация касается множества разрешимости в направлении, определяемом решением сопряжённой системы (16) (для заданного направления $\ell \in \mathbb{R}^{2N}$):

$$\rho(s(t) \mid \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t))) = \rho(s(t) \mid \mathcal{W}[t]). \quad (22)$$

Из (22) следует, что объединение аппроксимаций по всем направлениям ℓ даёт в точности множество разрешимости:

$$\mathcal{W}[t] = \bigcup \{ \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t)) \mid \|\ell\| = 1 \}.$$

В случае эллипсоидальной аппроксимации максимизатор ℓ^0 в формуле (13), необходимый для вычисления управления, может быть найден как

$$\ell^0 = 2\lambda(X_- + \lambda F)^{-1}(x - x^*), \quad F = e^{(t-t_1)A^T} e^{(t-t_1)A}, \quad (23)$$

где λ — единственный неотрицательный корень уравнения

$$\langle (X_- + \lambda F)^{-1}(x - x^*), X_-(X_- + \lambda F)^{-1}(x - x^*) \rangle = 1, \quad (24)$$

или $\ell^0 = 0$, если (24) не имеет неотрицательных решений.

Возможно уменьшить вычислительную сложность отыскания управления, отказавшись от решения уравнения (24), если в определении функции $Z(t, x)$ использовать метрику, порожаемую матрицей $X_-(t)$ (см. [23]).

3.2 Система с неопределённостью

Решение, изложенное в предыдущем разделе, может быть распространено на случай неопределённых возмущений (задача 2). Приведём краткое изложение этого решения, останавливаясь более подробно на изменениях, вызванных присутствием неопределённости.

Здесь функция цены снова вводится с помощью (8), при этом в данном случае $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — трубка решений дифференциального включения (5) при фиксированном позиционном управлении $\mathcal{U}(t, x)$ и начальном условии $x(t) = x$.

Для функции цены выполнен принцип оптимальности (9), что позволяет сформулировать основное уравнение динамического программирования. В общем случае указанное уравнение, если потребуется, следует понимать в обобщённом смысле вязкостных [25, 26] или минимаксных решений [27].

Теорема 5. *Функция цены $V(t, x)$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (ГЯБА)*

$$V_t + \min_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \langle V_x, Ax + bu + Cv \rangle = 0, \quad t < t_1, \quad (25)$$

с начальным условием $V(t_1, x) = \max \left\{ \|x\|^2 - \varepsilon^2, 0 \right\}$.

Отметим, что уравнение ГЯБ (10) является частным случаем (25) при $\mathcal{Q} = \{0\}$.

Множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ представимо в виде (11), однако в отличие от задачи без неопределённости уже невозможно выразить функцию цену исключительно через множество разрешимости, как это было сделано в (12). Тем не менее, для целей синтеза управлений можно использовать следующую верхнюю оценку [5]:

$$V(t, x) \leq W(t, x) = d^2 \left(e^{(t_1-t)A} x, e^{(t_1-t)A} \mathcal{W}[t] \right).$$

Подставляя эту оценку вместо самой функции цены в уравнение ГЯБА, получаем дифференциальное неравенство (ср. (19))

$$\min_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \frac{dW(t, x)}{dt} = W_t + \min_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \langle W_x, Ax + bu + Cv \rangle \leq 0. \quad (26)$$

Определим стратегию $\mathcal{U}_{\mathcal{W}}(t, x)$ как множество минимизаторов в (26):

$$\mathcal{U}_{\mathcal{W}}(t, x) = \underset{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}}{\text{Arg min}} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} d^2 \left(e^{(t_1-t)A} x, e^{(t_1-t)A} \mathcal{W}[t] \right), Bu \right\rangle. \quad (27)$$

Если найдено множество разрешимости, позиционная стратегия управлений (27) может быть вычислена с помощью (17), (13).

Вычислительные схемы для отыскания множества разрешимости или его внутренних аппроксимаций могут быть основаны на следующем эволюционном уравнении:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} h_+ (\mathcal{W}[t - \sigma] + C\mathcal{Q}, (I - \sigma A)\mathcal{W}[t] - \sigma b\mathcal{P}) = 0, \quad (28)$$

с начальным условием $\mathcal{W}[t_1] = \mathcal{B}_{\varepsilon}(0)$.

Разностная схема для эволюционного уравнения (28) может рассматриваться как операция многозначного интегрирования — *альтернированный интеграл* Л. С. Понтрягина [8, 28].

Соотношения (26), (27) остаются верными, если заменить в них множество разрешимости на любое решение эволюционного уравнения (28). Среди таких решений находится внутренняя эллипсоидальная аппроксимация $\mathcal{E}(x^*(t), X_-(t))$, для параметров которой выполняются

следующие дифференциальные уравнения [16]:

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= Ax^*(t) + bp + Cq, \quad x^*(t_1) = 0; \\ \dot{X}_-(t) &= AX_-(t) + X_-(t)A^T - \pi(t)X_-(t) - \pi^{-1}(t)CQC^T + \\ &+ X_-^{\frac{1}{2}}(t)S(t)(bPb^T)^{\frac{1}{2}} + (bPb^T)^{\frac{1}{2}}S^T(t)X_-^{\frac{1}{2}}(t), \quad X_-(t_1) = \varepsilon^2 I; \\ S(t)P^{\frac{1}{2}}B^T s(t) &= \lambda(t)X_-^{\frac{1}{2}}s(t), \quad S^T(t)S(t) = I; \quad \pi(t) = \frac{\langle s(t), CQC^T s(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle s(t), X_-(t)s(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Здесь полагаем, что множество допустимых значений помехи также является эллипсоидом $\mathcal{Q} = \mathcal{E}(q, Q)$ — в случае, если это не так, следует рассмотреть эллипсоид, описанный вокруг $\mathcal{Q}$.

Для каждого направления $\ell \in \mathbb{R}^{2N}$ существует длительность времени τ , такая, что эллипсоидальная аппроксимация касается множества разрешимости в направлении ℓ (т.е. выполняется (16)) на интервале $[t_1 - \tau, t_1]$. Замыкание объединения всех внутренних эллипсоидальных аппроксимаций даёт множество разрешимости:

$$\mathcal{W}[t] = \text{cl} \bigcup \{ \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t)) \mid \|\ell\| = 1 \}.$$

После получения эллипсоидальной аппроксимации синтез управлений вычисляется по формулам (17), (23), (24).

3.3 Частный случай неопределённости

Рассмотрим важный частный случай неопределённости, когда неизвестные возмущения входят в то же уравнение, что и управление, т.е. $v_i = 0$, $i \neq \nu$; $v_\nu \in [v_{\min}, v_{\max}]$.

В этом случае уравнение ГЯБА (25)

$$V_t + \min_{u_{\min} \leq u \leq u_{\max}} \max_{v_\nu \in [v_{\min}, v_{\max}]} \langle V_x, Ax + b(u + v_\nu) \rangle = 0$$

эквивалентно (имеет то же решение) следующему уравнению ГЯБ:

$$V_t + \min_{u_{\min} + v_{\max} \leq u \leq u_{\max} + v_{\min}} \langle V_x, Ax + bu \rangle = 0.$$

Таким образом, рассматриваемый частный случай сводится к задаче без неопределённости со множеством допустимых значений управления $\mathcal{P} = [u_{\min} + v_{\max}, u_{\max} + v_{\min}]$.

4 Примеры

Предложенный алгоритм был реализован в среде Matlab с использованием специализированного пакета эллипсоидального исчисления [29] для построения внутренних эллипсоидальных аппроксимаций множества разрешимости.

Пример 1. Цепь состоит из $N = 10$ пружин с коэффициентами жёсткости $k_i \equiv N$ и массами грузов $m_i \equiv \frac{1}{N}$, управляющая сила прикладывается к нижнему грузу, неопределённость отсутствует. Рассмотрим три различных ограничения на управление: $\mathcal{P}_1 = [-1, 1]$ (управляющая сила может быть направлена как вверх, так и вниз), $\mathcal{P}_2 = [0, 1]$ (только вниз) и $\mathcal{P}_3 = [-1, 0]$ (только вверх).

На рис. 2, сверху, изображены проекции соответствующих трубок разрешимости $\mathcal{W}_1[\cdot]$ (красная), $\mathcal{W}_2[\cdot]$ (зелёная) и $\mathcal{W}_3[\cdot]$ (синяя). Как и должно быть, трубка $\mathcal{W}_1$ больше объединения трубок $\mathcal{W}_2$ и $\mathcal{W}_3$. Трубки были вычислены по формулам (15), (16).

На рис. 2, снизу, показаны проекции эллипсоидальных аппроксимаций трубок $\mathcal{W}_i$ (в направлении скорости $\dot{w}_{10}$), $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{W}_i$. Хотя $\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3 \subseteq \mathcal{W}_1$, подобное вложение не является верным для эллипсоидальных аппроксимаций. Более того, существуют моменты времени, когда $\mathcal{E}_1$ даже не пересекается с $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$.

Пример 2. Цепь состоит из $N = 4$ пружин с $k_i \equiv 1$, $m_i \equiv 1$, управляющая сила прикладывается к нижнему грузу. Наименьшая собственная частота такой колебательной системы $\omega_0 \approx 0,35$. К нижнему грузу приложена возмущающая сила $v(t) = 0,5 \sin \omega_0 t$, имеющая целью «раскачать» цепь на частоте резонанса. Управление, принимающее значения из множества $\mathcal{P} = [0, 1]$ (т.е. действующее только вниз) должно преодолеть действие помехи и успокоить колебания цепи за заданное конечное время.

На рис. 3 показаны помеха $v(t)$ (слева сверху) и траектория $\|x(t)\|$ (слева снизу) при выключенном управлении. Видно, что амплитуда колебаний возрастает с течением времени. Соответствующее управление (справа сверху) действительно успокаивает колебания (траектория $\|x(t)\|$ приведена графике справа снизу).

Список литературы

- [1] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. Springer, 1988 (английское название Positional Differential Games).
- [2] Ильин В. А., Муссеев Е. И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при закрепленном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Доклады РАН. 2004. Т. 399. № 6.
- [3] Красовский Н. Н. К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления // ПММ. 1965. Т. 29. № 2. С. 218–225.
- [4] Бондаренко В. И., Красовский Н. Н., Филимонов Ю. М. К задаче об успокоении линейной системы // ПММ. 1965. Т. 29. № 5. С. 828–834.
- [5] Kurzhanski A. B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [6] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [7] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [8] Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх II // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 910–912.
- [9] Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [10] Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
- [11] Başar T., Bernhard P. H^∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems. SCFA. Basel: Birkhäuser, 2nd ed., 1995.
- [12] Leitmann G. Optimality and reachability with feedback controls // Dynamical Systems and Microphysics: Control Theory and Mechanics / Eds. Blaquière A., Leitmann G. Orlando: Academic Press, 1982.
- [13] Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды I конгресса ИФАК. 1960. Т. 1.
- [14] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [15] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [16] Kurzhanski A. B., Varaiya P. On reachability under uncertainty // SIAM Journal on Control. 2002. V. 41. N. 1. P. 181–216.
- [17] Kurzhanski A. B., Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization methods and software. 2002. V. 17. P. 177–237.
- [18] Kurzhanski A. B., Varaiya P. Reachability analysis for uncertain systems — the ellipsoidal technique // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser. B. 2002. V. 9. N. 3. P. 347–367.
- [19] Панасюк А. И., Панасюк В. И. // Математические заметки. 1980. Т. 27. № 3. С. 213–218.
- [20] Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Доклады АН СССР. 1986. Т. 289. № 1. С. 38–41.

- [21] Куржанский А. Б., Никонов О. И. К задаче синтеза стратегий управления. Эволюционные уравнения и многозначное интегрирование // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311. № 4. С. 788–793.
- [22] Куржанский А. Б., Никонов О. И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Доклады РАН. 1993. Т. 333. № 4. С. 578–581.
- [23] Куржанский А. Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
- [24] Куржанский А. Б., Мельников Н. Б. О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби // Математический сборник. 2000. Т. 191. № 6. С. 69–100.
- [25] Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of American Mathematical Society. 1983. V. 277. P. 1–41.
- [26] Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. N.Y.: Springer, 1993.
- [27] Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М., И.: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [28] Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330.
- [29] Kurzhanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal toolbox. <http://www.eecs.berkeley.edu/~akurzhan/ellipsoids/>, 2005.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию

??? июня 2006 г.

Востриков И. В., Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. **Об успокоении многозвенной колебательной системы в условиях неопределённых возмущений** // Дифференц. уравнения. 2006. Т. ???, № ???. С. 1 — 12.

Рассматривается задача синтеза управлений для успокоения цепочки связанных колебательных систем. Для решения задачи используется подход, опирающийся на методы динамического программирования в сочетании со схемами теории альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина и теории игровых задач динамики Н. Н. Красовского. Это позволяет разработать конструктивные методы, направленные на решение задачи «до конца», то есть до эффективных численных алгоритмов. Приводится описание таких алгоритмов, основанных на эллипсоидальном исчислении, и примеры решения конкретных задач.

Библиогр. 29 назв.

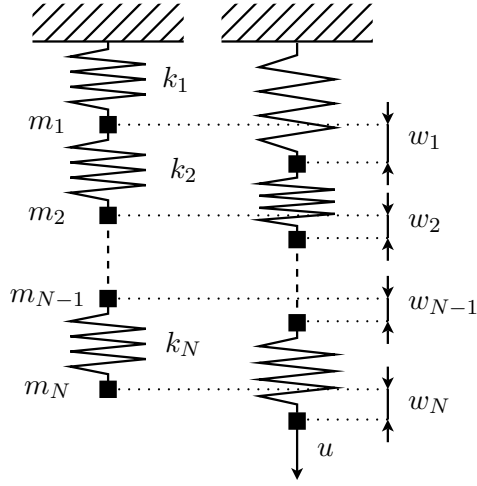


Рис. 1: Управляемая цепочка пружин в состоянии равновесия (слева) и в возмущённом состоянии (справа)

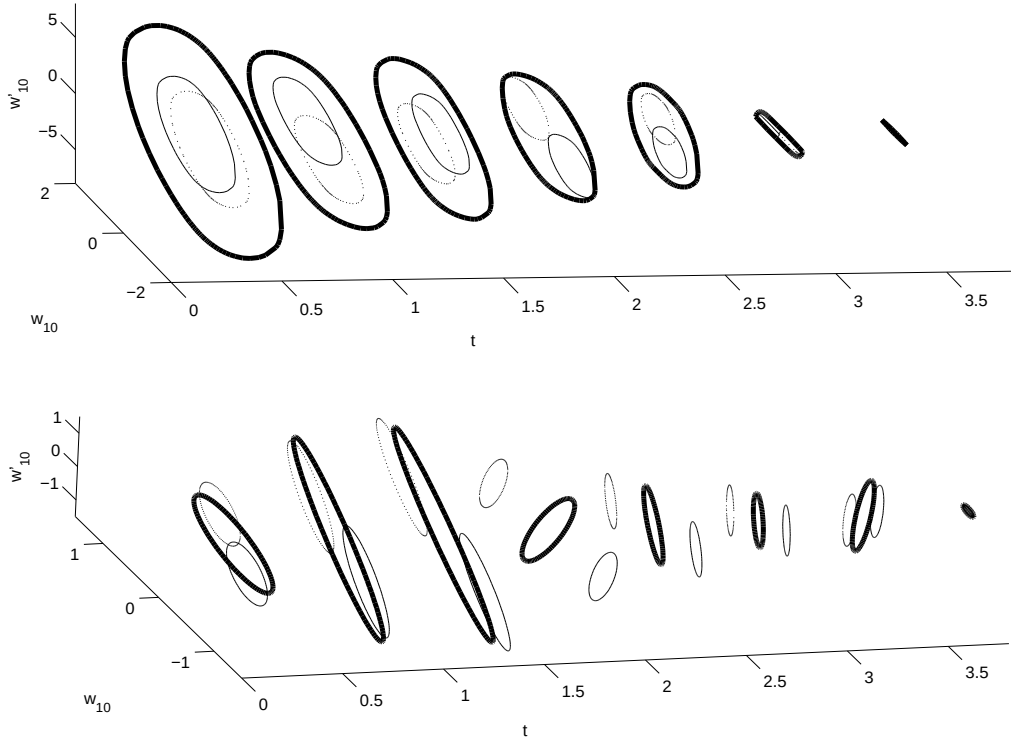


Рис. 2: Проекция трубок разрешимости в примере 1. Сверху: точные трубки, снизу: эллипсоидальные аппроксимации. Жирная линия: $\mathcal{P} = [-1, 1]$, пунктир: $\mathcal{P} = [0, 1]$, сплошная: $\mathcal{P} = [-1, 0]$.

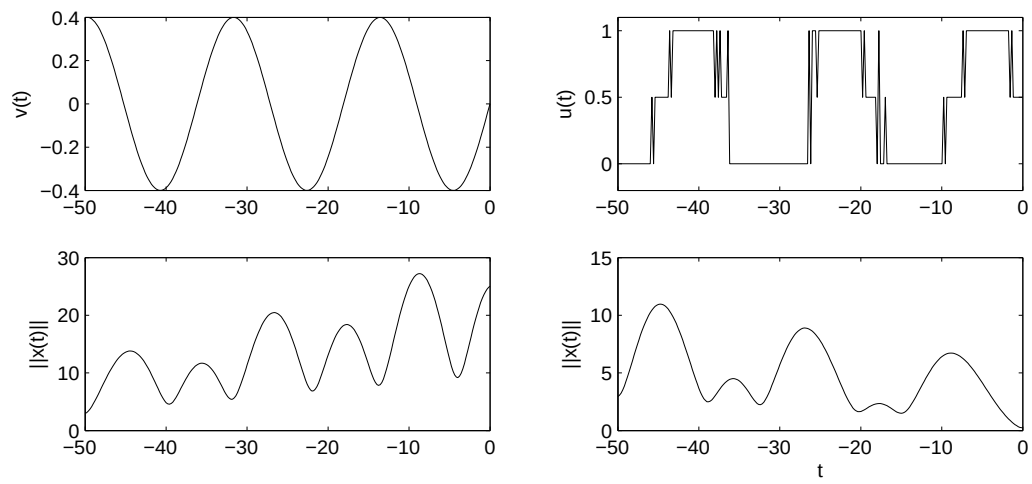


Рис. 3: Иллюстрация к примеру 2