

Институт космических исследований НАН и НКА Украины

Эллипсоидальные оценки состояния одного вида нелинейных динамических систем

В.В. Волосов

E-mail: wolosov@mail.ru

$$x_{k+1} = f(k, x_k, u_k) + \eta_k, \quad x_k \in R^n, u_k \in R^s, \|\eta_k\| \leq c_d, k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

$$y_k = g(k, x_k^*) + \xi_k, \quad y_k \in R^m, \quad m \leq n, \|\xi_k\| \leq c, x_k^* = ? \quad (2)$$

$$x_k^* \in E_k = E[\hat{x}_k, H_k] = \{x : \sigma(x, \hat{x}_k, H_k) \leq 1\},$$

$$\sigma(x, \hat{x}_k, H_k) = (x - \hat{x}_k)^T H_k^{-1} (x - \hat{x}_k), H_k = H_k^T > 0.$$

$$\hat{x}_{k+1} = \psi(\hat{x}_k, H_k, y_k, u_k, c, c_d), \quad H_{k+1} = \Psi(\hat{x}_k, H_k, y_k, u_k, c, c_d)$$

$$\dot{x} = f(t, x, u_k) + \eta, \quad x \in R^n, u_k \in R^s, \|\eta\| \leq c_d ; \quad (3)$$

Уравнение измерений:

$$y_k = g(t_k, x_k^*) + \xi_k, \quad y_k \in R^m, y_k = y(t_k), t_{k+1} = t_k + T, \|\xi_k\| \leq c, x_k^* = ? \quad (4)$$

где T – заданный интервал, $u(t) = u_k$ при $t_k \leq t < t_{k+1}$.

При решении задачи оценивания состояния используется робастный алгоритм оценивания состояния линейной системы вида

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \eta_k, \|\eta_k\| \leq c_d, \quad (1a)$$

$$y_k = h_k^T x_k + \xi_k, \|\xi_k\| \leq c, x_k^* = ? \quad (2a)$$

Геометрическая иллюстрация алгоритма для $n = 2, m = 1$

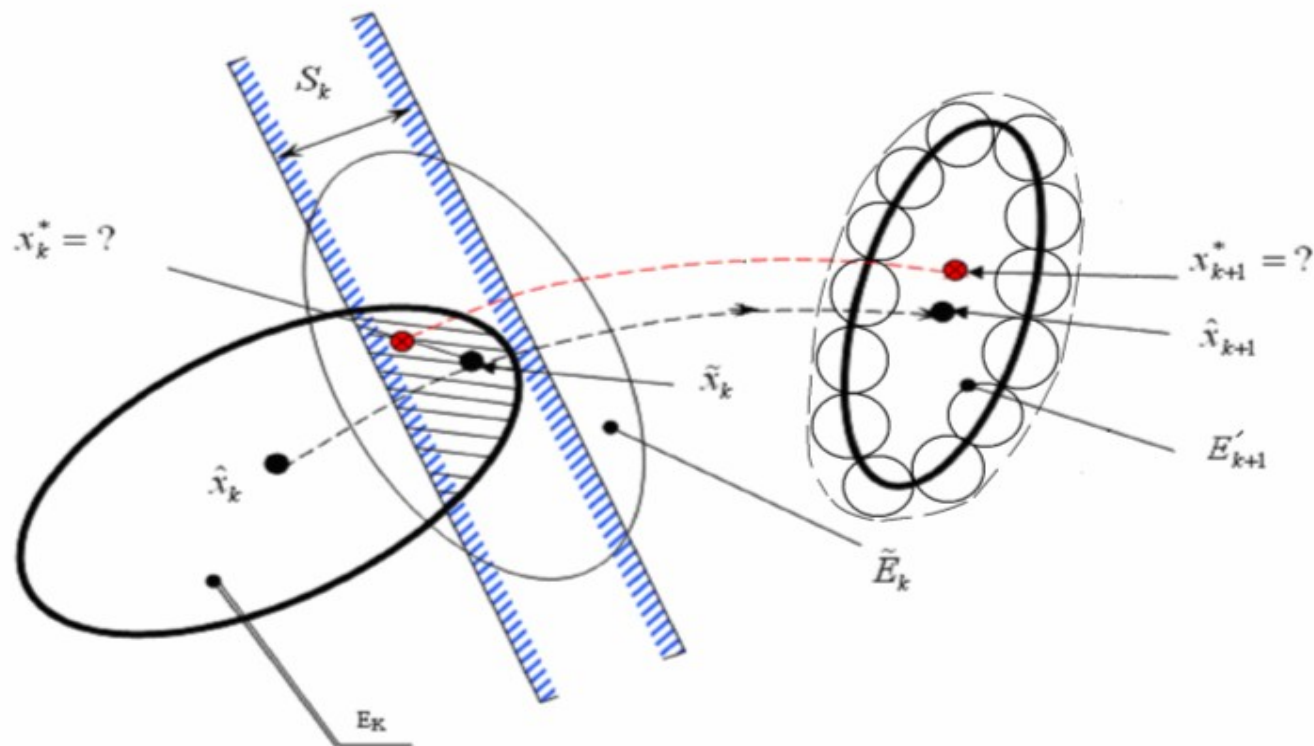


Рисунок 1

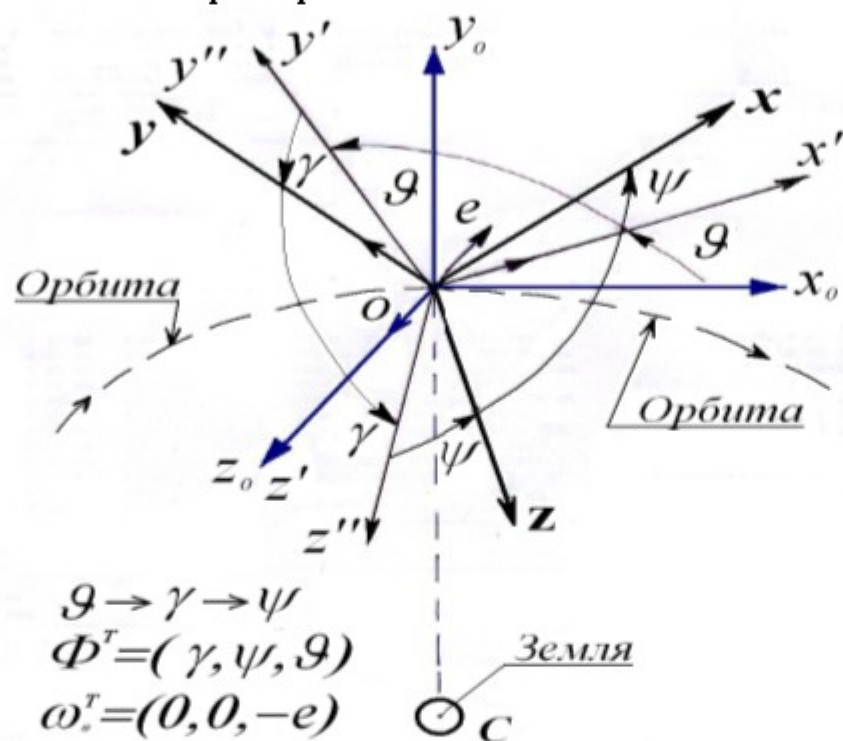
Здесь $S_k = \{x : |h_k^T x - y_k| \leq c\}$, $x_k^* \in S_k$, $E'_{k+1} = E[\hat{x}_{k+1}, H'_{k+1}]$,

$$E''_{k+1} = E[0, H''_{k+1}], H'_{k+1} = A_k \tilde{H}_k A_k^T, H''_{k+1} = c^2 I_2.$$

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k, H_{k+1} = (1+p)H'_{k+1} + p^{-1}(1+p)H''_{k+1}.$$

Параметры ориентации и уравнения углового движения КА

1 Углы Эйлера -Крылова



O – центр масс КА, C – центр Земли, $Ox_0y_0z_0$ – ОСК, $Oxyz$ – ССК.

Пусть $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – произвольный вектор, заданный в ОСК, $X = (x, y, z)$ – соответствующий вектор в ССК

Рисунок 2

$$X = S(\Phi)X_0, \Phi^T = (\gamma, \psi, \theta), S(\Phi) = A_1(\gamma)A_2(\psi)A_3(\theta), \quad (5)$$

$$A_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & s\gamma \\ 0 & -s\gamma & c\gamma \end{pmatrix}, A_2(\psi) = \begin{pmatrix} c\psi & 0 & -s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ s\psi & 0 & c\psi \end{pmatrix}, A_3(\psi) = \begin{pmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c\psi = \cos\psi.$$

Пусть $x^T = (\Phi^T, \omega^T)$, $\omega^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $u^T = M^T = (M_1, M_2, M_3)$.

При этом $\dot{x} = f(x, u) + \eta$, $\|\eta\| \leq c_d \Rightarrow$

$$\dot{\Phi} = A(\Phi)\omega - \omega_*, \quad J\dot{\omega} = M - \tilde{\omega}J\omega + \eta, \quad (6)$$

$$A(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ \sin\psi \operatorname{tg}\gamma & 1 & -\cos\psi \operatorname{tg}\gamma \\ -\frac{\sin\psi}{\cos\gamma} & 0 & \frac{\cos\psi}{\cos\gamma} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение измерений $y_k^T = (y_p^T(t_k), y_\omega^T(t_k))$

$$y_p(t_k) = G_m S(\Phi_k) D(t_k) + \xi_k, \quad y_\omega(t_k) = \omega_k + \zeta_k, \quad (7)$$

$m \times 3$ - матрица G_m состоит из нулей и единиц и определяется типом датчиков. Векторы

$D^T(t) = (d_1(t), d_2(t), d_3(t))$ также определяются типом датчиков и полагаются

заданными своими проекциями на оси ОСК. Так для датчика центра Земли (местной

вертикали) $m = 2$, $G_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^T(t) \equiv (0, 1, 0)$.

2. Компоненты нормированных кватернионов (параметры Эйлера)

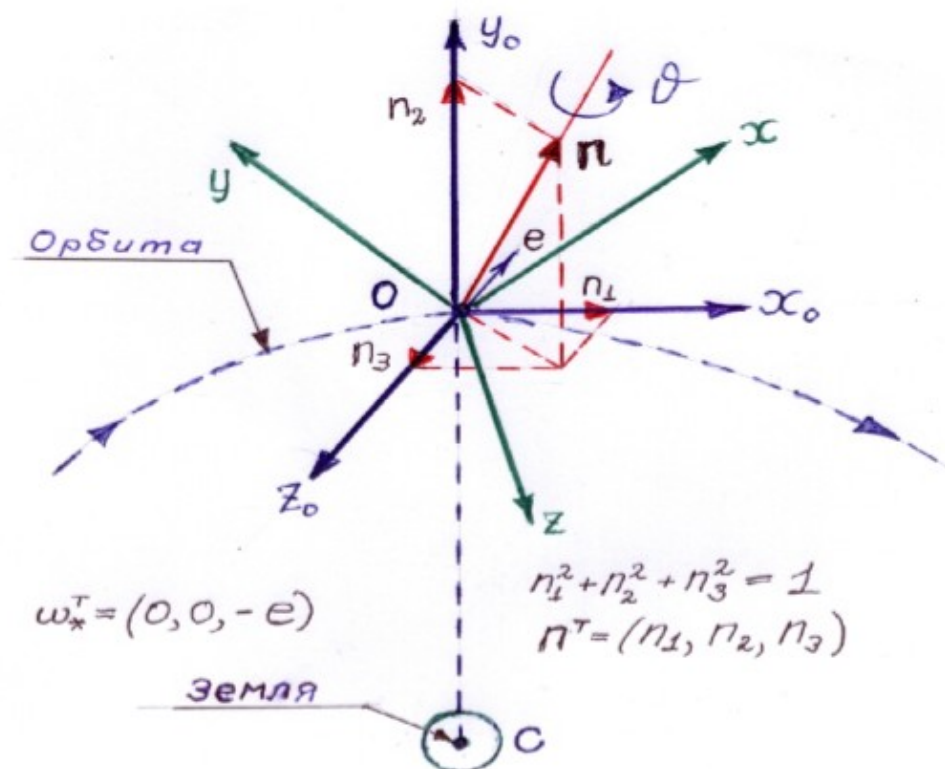


Рисунок 3

Для определения ориентации (углового положения) ССК $Oxyz$ относительно ОСК $Ox_0y_0z_0$ используются параметры Родрига-Гамильтона

$$\lambda_0 = \cos \frac{\vartheta(t)}{2}, \lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_i = n_i(t) \sin \frac{\vartheta(t)}{2}, i = \overline{1,3}; \lambda_0^2 + \lambda^T \lambda \equiv 1. \quad (8)$$

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \mathfrak{W} - \mathfrak{W}_* \circ \Lambda, \quad (9)$$

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda, \lambda = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3, \mathfrak{W} = \omega_1 i_1 + \omega_2 i_2 + \omega_3 i_3;$$

$$i_s \circ i_s = -1, i_1 \circ i_2 = i_3, i_2 \circ i_1 = -i_3, \dots$$

Под обозначением $\check{a}$, где $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ – произвольный вектор, понимается матрица

$$\check{a} = -\check{a}^T = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Формула $c = \check{a}b$ определяет векторное произведение $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ в СК, в которой $a = (a_1, a_2, a_3)^T, b = (b_1, b_2, b_3)^T, c = (c_1, c_2, c_3)^T$.

$$\Lambda \in R^4, \Lambda^T = (\lambda_0, \lambda^T), \lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Пусть $x \in R^7, x^T = (\Lambda^T, \omega^T), \omega^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), u^T = M^T = (M_1, M_2, M_3)$.

При этом $\dot{x} = f(x, u) + \eta, \|\eta\| \leq c_d \Rightarrow$

$$2\dot{\Lambda} = A(\omega, \omega_*)\Lambda, J\dot{\omega} = M - \check{\omega}J\omega + \eta, \|\eta\| \leq c_d, \quad (10)$$

$$A(\omega, \omega_*) = -A^T(\omega, \omega_*) = \begin{pmatrix} 0 & -(\omega - \omega_*)^T \\ (\omega - \omega_*) & -(\check{\omega} - \check{\omega}_*) \end{pmatrix}.$$

Первое из (10) имеет интеграл $\|\Lambda(t)\| \equiv const = 1$.

$$2\dot{\Lambda} = B(\Lambda)[\omega - S(\Lambda)\omega_*], B(\Lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda^T \\ \lambda_0 I_3 + \check{\lambda} \end{pmatrix}, S(\Lambda) = I_3 - 2\lambda_0 \check{\lambda} + 2\check{\lambda}\check{\lambda}.$$

Уравнение измерений имеет вид (7) с заменой $S(\Phi_k)$ на $S(\Lambda_k)$.

Синтез управления для нелинейной динамической системы

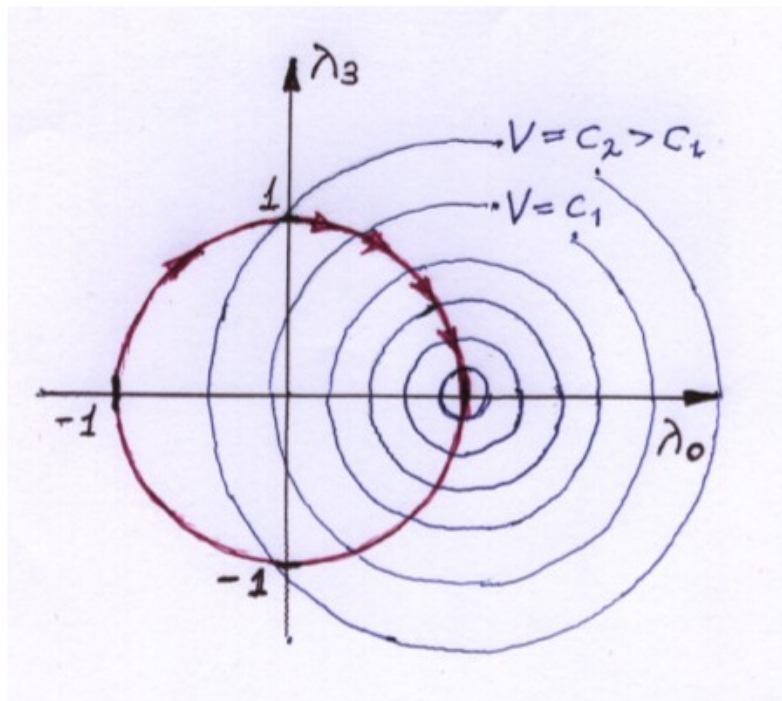
Решалась задача синтеза управления $M = M(\Lambda, \omega)$ системы (10) при $\eta = 0$.

Устойчивое совмещение ССК с ОСК $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_s = (\pm 1, 0, 0, 0)$, $\omega(t) \rightarrow \omega_*$ обеспечивает управляющий момент

$$M = -\alpha \lambda - K(\omega - \omega_*) + \ddot{\omega} J \omega, \quad \alpha > 0, K = K^T > 0, \quad (12)$$

полученный с помощью функции Ляпунова

$$V = \alpha[(\lambda_0 - 1)^2 + \lambda^T \lambda] + 0,5(\omega - \omega_*)^T J(\omega - \omega_*).$$



Структура фазовых траекторий для $\lambda^T = (0, 0, \lambda_3)$, $\omega^T = (0, 0, \omega_3)$, $\omega_* = 0$ показана на рисунке.4

Рисунок 4

$$M = \alpha B^T(\Lambda) \Lambda_s \operatorname{sign}(\Lambda_s^T \Lambda) - K(\cdot)(\omega - \omega_s) + \ddot{\omega} J \omega, \quad K(\cdot) = K^T(\cdot) > 0, \quad (12a)$$

$$V_1 = \alpha \left[\left(|\Lambda_s^T P_s \Lambda| - 1 \right)^2 + \Lambda^T (I - P_s) \Lambda \right] + 0,5(\omega - \omega_s)^T J(\omega - \omega_s), P_s = \Lambda_s \Lambda_s^T.$$

Эллипсоидальная оценка вектора состояния системы (10)

Предполагалось, что угловая скорость $\omega_k = \omega(t_k)$ измеряется без помех $\zeta_k = 0$, использовался датчик вертикали, внешние возмущения отсутствуют $\eta_k = \eta(t_k) \equiv 0$.

Линеаризация уравнений движения (10) и уравнений измерения (7) при текущих значениях оценок $\hat{\Lambda}_k$ и $\hat{\omega}_k$:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\Lambda} &= A(\hat{\omega}, \omega_*)\Lambda + B(\hat{\Lambda})\omega - B(\hat{\Lambda})\hat{\omega}, \\ J\dot{\omega} &= (\check{f} - \check{\omega}J)\omega + M + \check{\omega}J\hat{\omega}, \quad f = J\hat{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

$$y(\Lambda, \hat{\Lambda}, D) = h^T(\hat{\Lambda}, D)\Lambda + \xi, \quad (7a)$$

где $y(\Lambda, \hat{\Lambda}, D) = y - G_m \left[D + 2(\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_0 I_3) \check{D} \hat{\lambda} \right],$

$$h^T(\hat{\Lambda}, D) = 2G_m \left\{ \check{D} \hat{\lambda} : \check{D}(\hat{\lambda}_0 I_3 + \check{q}) - 2\check{q} \check{D} \right\} \quad q = \hat{\lambda}$$

и индекс при векторах $y_k, \hat{\omega}_k, \hat{\Lambda}_k, D_k, \xi_k$ опущен. При вычислении управляющих моментов (управлений) $M = M_k$ использовалась формула (12a) с заменой в ней векторов Λ, ω на $\hat{\Lambda}_k, \hat{\omega}_k$.

Результаты компьютерного моделирования

Интервал дискретности оценивания и управления $T=1\text{с}$. Орбита КА круговая радиусом 7070 км. Начальные значения нормированного вектора $\Lambda(t), t=0$:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \quad \lambda_1 = \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \quad \lambda_3 = \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2}.$$

Начальные значения углов $\vartheta(0)=90^\circ, \gamma(0)=-90^\circ, \psi(0)=120^\circ$ и угловых скоростей

$$\omega_1(0)=0, \omega_2(0)=0, \omega_3(0)=-2 \text{ } ^\circ/\text{с}. \quad \text{Центр } \hat{\Lambda}_0 \text{ начального эллипсоида}$$

$E[\hat{\Lambda}_0, H_0]$ соответствовал $\hat{\vartheta}(0)=\hat{\gamma}(0)=\hat{\psi}(0)=0$, матрица $H_0 = 2 \cdot I_4$. Параметры закона управления и объекта $\alpha = 0,05, K = I_3, J = \text{diag}\{40 \ 40 \ 40\}$. Использовался датчики вертикали и угловой скорости при $\zeta_k = 0$. Процессы управления и оценивания показаны на рисунках 5,6.

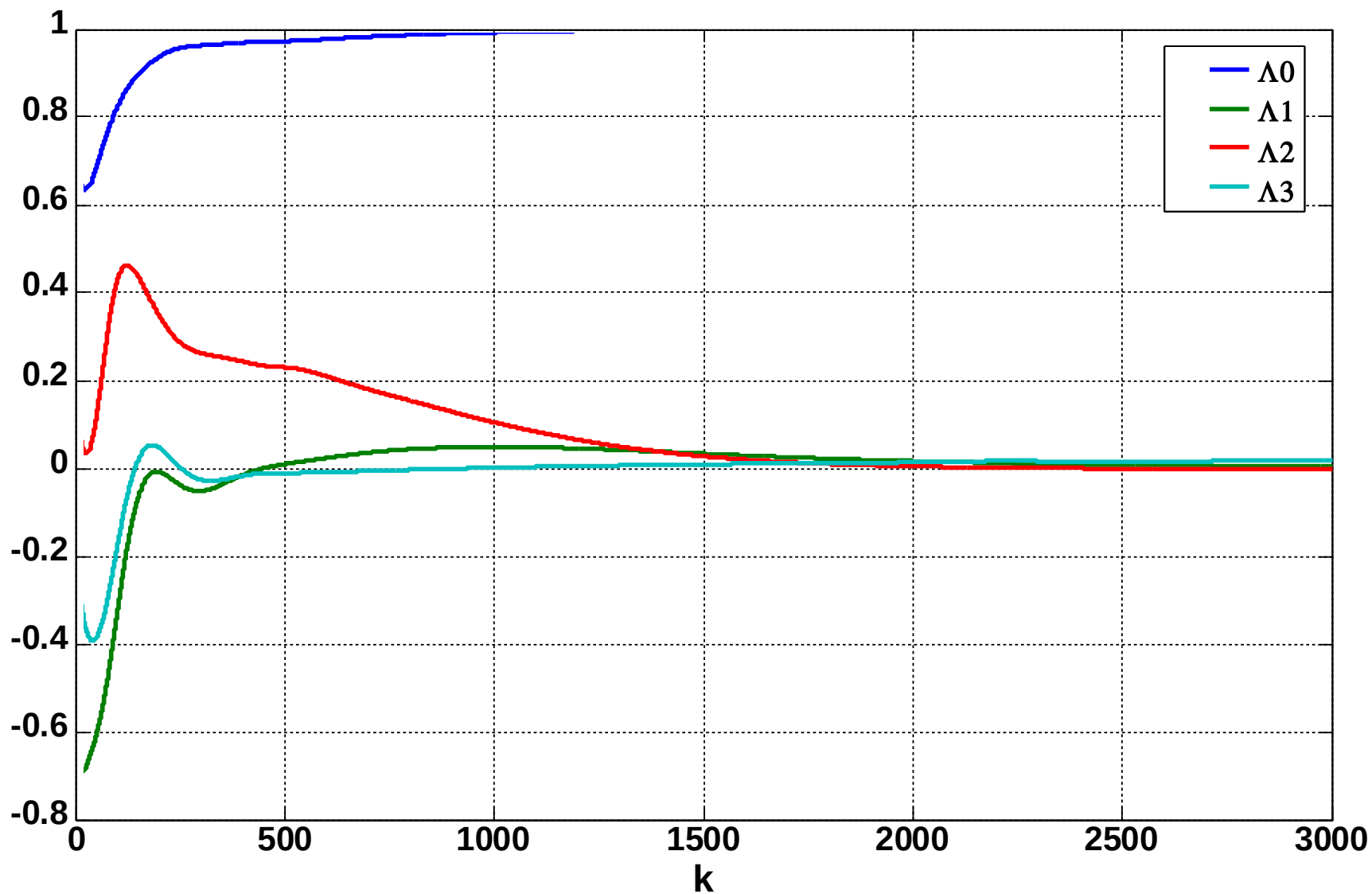


Рисунок 5 – Компоненты кватерниона ориентации Λ_k^*

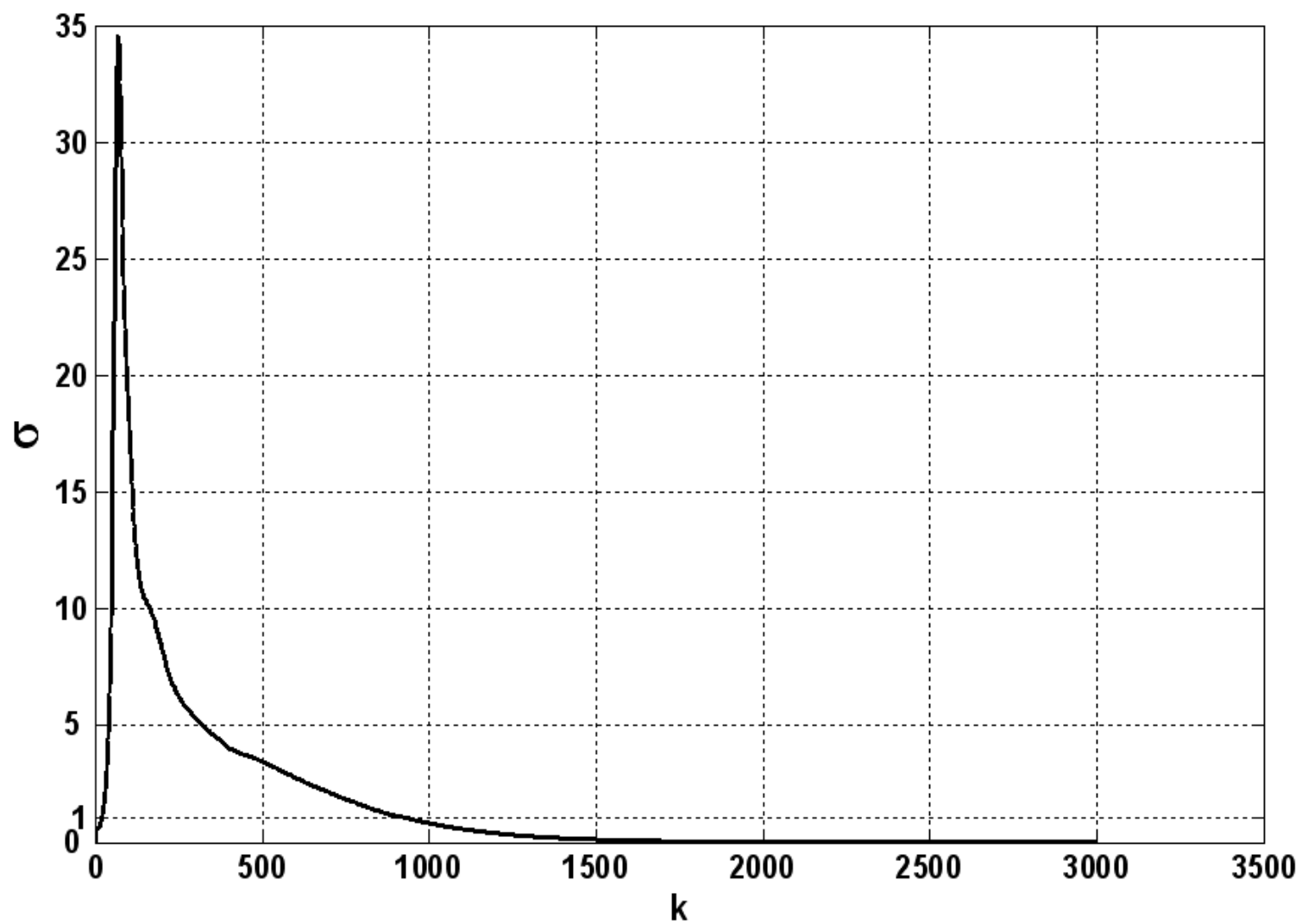


Рисунок 6 – Функция принадлежности $\sigma_k^* = \sigma(\Lambda_k^*, \hat{\Lambda}_k, H_k)$

Эллипсоидальная оценка предельного множества нелинейной системы

$$\dot{x} = f(x, u) + \eta, \quad \|\eta\| \leq c_d \quad \text{рассмотренного вида} \quad \rightarrow ? .$$

Спасибо за внимание!