Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2016)

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2+2n-3}\right).$$

2. Написать разложение вектора $\bar{x}$ по векторам $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, где:

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}-2\\4\\7\end{pmatrix},\ \bar{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\ \bar{q}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \bar{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}.$$

3. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию

$$f(x)=\frac{9}{20-x-x^2}.$$

Указать область сходимости полученного степенного ряда.

4. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$$

Ответ представить в виде $f(x,y)=C$.

5. Решить в комплексных числах уравнение

$$z^2+\bar{z}=0.$$

6. Найти совершенную дизъюнктивную нормальную форму для функции алгебры логики $f(x,y,z)=\overline{x\to(y\oplus z)}$.

7. Написать программу, принимающую на стандартный вход последовательность из не более чем 10000 натуральных чисел $a[i]$, $0<a[i]<100001$. Концом последовательности является число 0. Программа должна найти элементы последовательности, являющиеся двойными факториалами неотрицательных чётных чисел, то есть, представимые в виде $(2n)!!=1*2*4*\ldots*2n$, где n – целое и $n>0$, $0!!=1$, и вывести на стандартный вывод наибольший из таких элементов. Если в последовательности нет искомых чисел, то программа должна вывести -1.
Указание: Программа должна быть эффективной по вычислениям. Размер используемой памяти должен быть мал и не должен зависеть от размера ввода. Неэффективное решение рассматривается как ошибочное. Допустимые языки программирования: *FreePascal*, *Delphi*, *C*, *C++*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 1

1. **Решение:** Домножая и деля на сопряженное выражение, имеем соотношения:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2+2n-3}\right)=-\lim_{n\to+\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+2n-3}}=-\lim_{n\to+\infty}\frac{4-\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}}=-2\,.$$

2. **Решение:** Требуется найти такие числа α, β, γ, что $\bar{x}=\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r}$. Для этого, например, достаточно решить следующую линейную алгебраическую систему с помощью формул Кронекера-Капелли:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 7\end{pmatrix}.$$

Вычисляя соответствующие определители, имеем: $\Delta_0=-1$, $\Delta_\alpha=-2$, $\Delta_\beta=1$, $\Delta_\gamma=-1$. Значит, находим:

$$\alpha=\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_0}=2,\ \beta=\frac{\Delta_\beta}{\Delta_0}=-1,\ \gamma=\frac{\Delta_\gamma}{\Delta_0}=1\,.$$

Окончательно, имеем: $\bar{x}=2\bar{p}-\bar{q}+\bar{r}$.

3. **Решение:** Используя дважды формулу суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, имеем искомый степенной ряд:

$$f(x)=\frac{1}{5+x}+\frac{1}{4-x}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{5}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{5^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}\,,$$

у которого $|x|<4$ есть интервал сходимости. Легко видеть, что при $x=\pm4$ полученный ряд расходится. Таким образом, область сходимости этого степенного ряда есть интервал $(-4,4)$.

4. **Решение:** Выполним соответствующие преобразования:

$$2d(x^2)-\frac{3}{2}d(y^2)=\frac{3}{2}x^2d(y^2)-y^2d(x^2)\,.$$

После приведения подобных слагаемых, видим, что рассматриваемое дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$2(y^2+2)d(x^2)=3(x^2+1)d(y^2)\,.$$

Разделяя соответствующие переменные, получаем:

$$\frac{2d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{3d(y^2+2)}{y^2+2}\,.$$

Интегрируя полученное выражение, находим требуемый общий интеграл этого дифференциального уравнения:

$$\frac{(y^2+2)^3}{(x^2+1)^2}=C.$$

5. **Решение:** Пусть $z=x+iy$, тогда исходное уравнение перепишем в виде: $(x+iy)^2+(x-iy)=0$. После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых, приравниваем нулю действительную и мнимую части полученного комплексного числа. В результате, имеем имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2+x=0\,,\\ 2xy-y=0\,.\end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=0$. Если $x=\dfrac{1}{2}$, то из первого уравнения получаем: $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, имеем: $z=\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Если $y=0$, то из первого уравнения получаем: $x=0$, $x=-1$. Поэтому, имеем: $z=0$, $z=-1$. Таким образом, окончательно находим: $z=0$, $z=-1$, $z=\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. **Решение:** Требуемая формула имеет следующий вид: $x\bar{y}\bar{z}\vee xyz$.