

## Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2018)

## ВАРИАНТ 1

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

2. Вычислить ранг матрицы  $A$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

в зависимости от значения параметра  $\lambda$ .

3. Выяснить, при каких значениях параметра  $\alpha$  функциональная последовательность

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{n^2 + x^2}, \quad n \geq 1$$

сходится поточечно, а при каких равномерно на интервале  $(0, +\infty)$ .

4. Найти решение  $y(x)$  задачи Коши

$$\begin{cases} 4xy(x)y'(x) - 3y^2(x) = -2x^2, \\ y(1) = 5. \end{cases}$$

5. Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  в кольце, содержащем точку  $i$ , функцию

$$w(z) = \frac{2(1 - z^2)}{2z^2 - 5z + 2}.$$

Указать границы этого кольца.

6. В базисе  $B = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$  из функциональных элементов конъюнкции, дизъюнкции и отрицания построить схему из функциональных элементов (СФЭ) сложности не более 6 с входами  $x_1, x_2, x_3$  и выходами  $y_1, y_2, y_3$ , которая осуществляет следующее преобразование: упорядочивает по неубыванию значения, поступающие на входы  $x_1, x_2, x_3$ , и передает  $j$ -е по порядку значение на выход  $y_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

7. Среди целых чисел выделим подмножество «v1-чисел», запись которых в пятеричной позиционной системе счисления с возможными незначащими нулями в старших разрядах согласуется с формой Бэкуса–Наура:

```
<v1-число> ::= <начало><конец> | <начало><v1-число><конец> |
               <v1-число><v1-число> | 1<v1-число> | <v1-число>1
<начало> ::= 0 | 2
<конец> ::= 3 | 4
```

Составить программу на одном из предлагаемых языков: Free Pascal, C, C++. Программа принимает на вход целое число  $N$  ( $0 < N \leq 320000$ ) и с начала следующей строки считывает непустую последовательность из  $N$  символов. При  $N \leq 0$  программа выводит «неверное N». Иначе программа анализирует последовательность. Она выводит «не v1-число», если входная последовательность не согласуется с данной БНФ. Если последовательность согласуется с БНФ, и записанное число кратно 4, то программа выводит «подходящее v1-число». Иначе программа выводит «не подходящее v1-число». Программа должна находить результат эффективно: за не более чем один проход по записи числа, используя память постоянного размера ( $\ll 320000$ ), не зависящего от длины введенной записи числа. «Длинную» арифметику не использовать. Библиотечные функции для конвертации пятиричной записи в число не использовать.