РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 1

1. **Решение:** Имеем соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\Big(1+3\sin x\Big)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\operatorname{ctg} x \ln(1+3\sin x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+3\sin x)}{\sin x}} = \mathrm{e}^3 .$$

2. **Решение:** Имеем цепочку элементарных преобразований матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & (10-\lambda) & -5 & -1 \\ 0 & -(1+2\lambda) & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $10-\lambda = 1+2\lambda$, или $\lambda = 3$, то легко видеть, что ранг матрицы A равен 2, иначе он равен 3.

3. **Решение:** При каждом фиксированном значении $x > 0$ мы имеем предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha x}{n^2+x^2} ,$$

который существует и равен нулю при $\alpha < 2$. При таких α функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится поточечно к предельной функции $f(x) = 0$. Исследуем равномерную сходимость этой последовательности к такой предельной функции. Для этого, изучим на интервале $(0,+\infty)$ функцию $f_n(x)$ на максимум. Имеем выражения:

$$f_n'(x) = n^\alpha \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} = 0,$$

из которых мы находим точку максимума $x_n = n \in (0,+\infty)$. Значит, получаем соотношения:

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = f_n(x_n) = \frac{1}{2n^{1-\alpha}} \to 0,$$

когда $\alpha < 1$. Поэтому, при $\alpha < 1$ функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к предельной функции $f(x) = 0$.

4. **Решение:** Выполним замену переменных $z(x) = y^2(x)$. Тогда, исходная задача Коши переписывается в виде:

$$\begin{cases} 2xz'(x) - 3z(x) = -2x^2, \\ z(1) = 25. \end{cases}$$

В этой задаче Коши соответствующее уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Применим для его решения метод вариации постоянной. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $z(x) = Cx^{\frac{3}{2}}$, где C – произвольная постоянная. Тогда, решение неоднородного уравнения ищем в виде: $z(x) = C(x)x^{\frac{3}{2}}$. Подставляя такое представление в соответствующее неоднородное дифференциальное уравнение, мы находим выражение: $C'(x) = -x^{-\frac{1}{2}}$, из которого получаем формулу: $C(x) = -2x^{\frac{1}{2}} + \widetilde{C}$, где $\widetilde{C}$ – произвольная постоянная. Значит, общее решение неоднородного дифференциального уравнения записывается в виде: $z(x) = -2x^2 + \widetilde{C}x^{\frac{3}{2}}$. Из начального условия мы имеем значение константы $\widetilde{C} = 27$. Поэтому, получаем формулу: $z(x) = -2x^2 + 27x^{\frac{3}{2}}$, из которой находим окончательное решение: $y(x) = \sqrt{-2x^2 + 27x^{\frac{3}{2}}}$.

5. **Решение:** Функция $w(z)$ имеет две особые точки $z = \frac{1}{2}$, $z = 2$, и для нее справедливо представление:

$$w(z) = 2\left(\frac{1}{2-z} + \frac{z}{1-2z}\right).$$

Поскольку мы ищем разложение по степеням z и требуемое кольцо должно содержать точку i, то такое кольцо имеет вид: $\frac{1}{2} < |z| < 2$. Тогда, для простых дробей найденного представления мы получаем разложения:

$$\frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2; \qquad \frac{z}{1-2z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}z^n}, \quad |z| > \frac{1}{2} .$$

Значит, мы находим в кольце $\frac{1}{2} < |z| < 2$ требуемое разложение функции $w(z)$ в ряд Лорана:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n z^n} .$$

6. **Решение:** В задаче требуется упорядочить значения, поступающие на входы x_1, x_2, x_3. Можно либо воспользоваться сортировкой «пузырьком», либо в явном виде выписать функции, вычисляющие минимальное, максимальное и среднее значения из x_1, x_2, x_3.
Сортировка (u_1, u_2, z_1 – вспомогательные переменные):

$$\begin{array}{lll} u_1 = x_1 \& x_2, & z_1 = x_1 \vee x_2, & u_2 = z_1 \& x_3, \\ y_3 = z_1 \vee x_3, & y_1 = u_1 \& u_2, & y_2 = u_1 \vee u_2. \end{array}$$

Явные функции:

$$\begin{array}{l} y_1 = (x_1 \& x_2) \& x_3, \\ y_2 = (x_1 \vee x_2) \& x_3 \vee (x_1 \& x_2), \\ y_3 = (x_1 \vee x_2) \vee x_3. \end{array}$$

7. **Решение:** БНФ задаёт сбалансированные последовательности «скобок», если под скобками иметь в виду следующее: «открывающая скобка» – цифры 0 или 2, «закрывающая» – цифры 3 или 4. Цифры 1 могут стоять в любых местах. Остаток от деления на 4 такой же как у суммы цифр числа по модулю 4. Программа должна проверить, содержит ли входная цепочка символы, отличные от 0, 1, 2, 3, 4, и есть ли баланс скобок в указанном смысле. Сделать это можно, проходя по записи и подсчитывая «скобки». Массив для хранения ввода не нужен и запрещён условием. Если становится ясно, что встречен неверный символ, или что баланса нет, следует не дочитывать ввод до конца.
Код программы:

```
program var1 (input, output);
var c : char;
    n : longint;
    balance, sum, zeroNum : integer;
begin
   readln(n);
   balance := 0;
   sum := 0;
   zeroNum := ord('0');
   if (n > 0) then begin
      while (n > 0) and (balance >= 0) do begin
         read(c);
         case c of
          '1' : ;
          '0', '2' : balance := balance + 1;
          '3', '4' : balance := balance - 1;
          else  balance := -1 {вместо else допускается otherwise}
         end; {case}
         sum := (sum + ord(c) - zeroNum) mod 4;
         n := n - 1;
      end; {while}
      if (balance <> 0) then writeln('не v1-число')
      else if (sum = 0) then writeln('подходящее v1-число')
           else writeln('не подходящее v1-число')
   end {then (n > 0)}
   else begin
      writeln('неверное N')
   end {if}
end.
```

Критерии оценивания: Синтаксические ошибки, присутствующие в разумных количествах, не учитываются. Программа, нарушающая ограничения из условия, но выдающая верный результат оценивается 1/3. Программа, соблюдающая ограничения, но имеющая ошибки, выдающая верный ответ на большинстве входных данных, но неверный – на некоторых цепочках, оценивается 2/3 (при неверном ответе на большинстве входных данных – 1/3). Верная программа, соблюдающая ограничения, оценивается на полный балл. В других случаях программа оценивается 0.
Пожелания по оформлению проверенных работ: Пожалуйста, выделяйте ошибки в ответах и решении, подписывайте, в чём именно состоят ошибки. Если ошибка алгоритмическая, указывайте, в чём конкретно она состоит и приводите примеры входных данных, на которых программа будет работать неверно.