МГУ им. М.В. Ломоносова ВМиК

Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2013)

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin\left(3x^2\right) dx \ .$$

2. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Найти матрицу этого оператора в базисе из его собственных векторов.

3. Определить область существования функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n + x}{n^2 + x^2}$$

и исследовать ее на этой области на непрерывность.

4. Выяснить, сколько на отрезке $[0, T]$, $T > 0$ существует решений краевой задачи

$$\begin{cases} y''(x) - 8y'(x) + 17y(x) = 0, \ x \in (0, T), \\ y(0) = 0, \ y'(T) - 4y(T) = 0. \end{cases}$$

Указать все эти решения.

5. Используя условия Коши-Римана, найти аналитическую функцию $w = f(z)$ такую, что:

$$\mathrm{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y, \ z = x + iy; \ f(1) = 6 \ .$$

6. В базисе $B = \{x \oplus y\}$ из одного элемента сложения по модулю два построить схему из функциональных элементов сложности 4 с входами x_1, x_2, x_3, x_4 и выходами y_1, y_2, y_3, y_4, реализующую линейное преобразование над полем вычетов по модулю два $y = Ax$, где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top$, и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

7. Написать программу, принимающую на стандартный вход строку, длина которой не более 1000000 символов. Входная строка может быть описана следующим набором металингвистических формул:

<входная строка>::= <выражение>.

<выражение>::= <переменная> | <переменная><знак><выражение>

<переменная>::= a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m | n | o | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y | z

<знак>::= + | -

Программа должна, воспринимая записанное во входной строке арифметическое выражение, назначить значения всем переменным от a до z, независимо от того, входят они во введенную строку или нет. Значения должны быть назначены так, чтобы результат вычисления введенного выражения был максимальным. Значение каждой переменной должно быть целым числом из диапазона $[1, 26]$, причём ни у каких двух переменных значения не должны совпадать. На вывод программа должна подать значения всех переменных от a до z (по алфавитному порядку имен переменных) и результат вычисления выражения. Для решения следует подобрать оптимальный алгоритм, время работы которого линейно зависит от длины входа, а размер используемой памяти невелик и не зависит от длины входа.

Пример работы программы. Ввод: $a + a + b - c$. Вывод (далее указан один из возможных выводов программы): 26 25 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 76

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 1

1. **Решение:** Выполняя замену переменной $t = x^2$ и затем интегрируя по частям, имеем:

$$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin\left(3x^2\right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(3t) dt = -\frac{1}{18}.$$

2. **Решение:** Находя собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ линейного оператора, видим, что требуемая матрица является диагональной, на главной диагонали которой расположены найденные собственные значения.

3. **Решение:** При каждом фиксированном $x \in \mathrm{R}^1$ справедливо равенство

$$\frac{(-1)^n n + x}{n^2 + x^2} = \frac{(-1)^n n}{n^2 + x^2} + \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

Первый ряд сходится по признаку Лейбница, а второй – по признаку сравнения. Поэтому, областью существования функции $f(x)$ является R^1. Для исследования функции $f(x)$ на R^1 на непрерывность достаточно изучить на множествах $|x| \le A$ при $\forall A > 0$ указанные ряды на равномерную сходимость. Первый ряд сходится равномерно по признаку Дирихле-Абеля, а второй – по признаку Вейерштрасса. Следовательно, функция $f(x)$ является непрерывной на множествах $|x| \le A$ при $\forall A > 0$, а, значит, и на R^1.

4. **Решение:** Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$. Поэтому, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$y(x) = e^{4x}\Big(C_1 \cos x + C_2 \sin x\Big),$$

где $C_{1,2}$ – произвольные постоянные. Удовлетворяя первому краевому условию, находим $y(x) = C_2 e^{4x} \sin x$. Из второго краевого условия получаем $C_2 e^{4T} \cos T = 0$. Из этого равенства заключаем:
• при $\cos T \neq 0$, или $T \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \ge 0$ имеем единственное решение $y(x) = 0$;
• при $\cos T = 0$, или $T = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \ge 0$ имеем бесконечно много решений $y(x) = Ce^{4x} \sin x$, где C – произвольная постоянная.

5. **Решение:** Для функции $w = u + iv$ имеем $u = x^2 - y^2 + 5x + y$. Из условий Коши-Римана находим:

$$u'_x = v'_y = 2x + 5, \; u'_y = -v'_x = -2y + 1.$$

Тогда получаем

$$v = \int v'_y dy = 2xy + 5y + C(x).$$

С другой стороны, находим

$$v'_x = 2y + C'(x) = 2y - 1.$$

Отсюда имеем $C'(x) = -1$, или $C(x) = -x + C_*$. Подставляя, находим $v = 2xy + 5y - x + C_*$. Следовательно, получаем

$$w = f(z) = \left(x^2 - y^2 + 5x + y\right) + i\left(2xy + 5y - x + C_*\right) = z^2 + (5 - i)z + iC_*.$$

Учитывая начальное условие, находим $C_* = 1$. Значит, требуемая функция имеет вид $w = f(z) = z^2 + (5 - i)z + i$.

Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2013)

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^5 \cos\left(5x^3\right) dx \,.$$

2. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе из его собственных векторов.

3. Определить область существования функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n|x| + x^2}{n^2}$$

и исследовать ее на этой области на непрерывность.

4. Выяснить, сколько на отрезке $[0, T]$, $T > 0$ существует решений краевой задачи

$$\begin{cases} y''(x) + 6y'(x) + 13y(x) = 0, \ x \in (0, T), \\ y(0) = 0, \ y'(T) + 3y(T) = 0. \end{cases}$$

Указать все эти решения.

5. Используя условия Коши-Римана, найти аналитическую функцию $w = f(z)$ такую, что:

$$\mathrm{Im} f(z) = y^2 - x^2 - 3y - x, \ z = x + iy; \ f(-1) = 2 \,.$$

6. В базисе $B = \{x \oplus y\}$ из одного элемента сложения по модулю два построить схему из функциональных элементов сложности 4 с входами x_1, x_2, x_3, x_4 и выходами y_1, y_2, y_3, y_4, реализующую линейное преобразование над полем вычетов по модулю два $y = Ax$, где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top$, и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Написать программу, принимающую на стандартный вход строку, длина которой не более 1000000 символов. Входная строка может быть описана следующим набором металингвистических формул:

<входная строка>::= <выражение>.

<выражение>::= <переменная> | <переменная><знак><выражение>

<переменная>::= A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z

<знак>::= + | -

Программа должна, воспринимая записанное во входной строке арифметическое выражение, назначить значения всем переменным от A до Z, независимо от того, входят они во введенную строку или нет. Значения должны быть назначены так, чтобы результат вычисления введенного выражения был минимальным. Значение каждой переменной должно быть целым числом из диапазона $[0, 25]$, причём ни у каких двух переменных значения не должны совпадать. На вывод программа должна подать значения всех переменных от A до Z (по алфавитному порядку имен переменных) и результат вычисления выражения. Для решения следует подобрать оптимальный алгоритм, время работы которого линейно зависит от длины входа, а размер используемой памяти невелик и не зависит от длины входа.

Пример работы программы. Ввод: $A+A+B-C$. Вывод (далее указан один из возможных выводов программы): 0 1 25 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 −24

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 2

1. **Решение:** Выполняя замену переменной $t = x^3$ и затем интегрируя по частям, имеем:

$$\int\limits_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^5 \cos\left(5x^3\right) dx = \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi} t \cos(5t) dt = -\frac{2}{75}.$$

2. **Решение:** Находя собственные значения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 7$ линейного оператора, видим, что требуемая матрица является диагональной, на главной диагонали которой расположены найденные собственные значения.

3. **Решение:** При каждом фиксированном $x \in \mathrm{R}^1$ справедливо равенство

$$\frac{(-1)^n n|x| + x^2}{n^2} = \frac{(-1)^n|x|}{n} + \frac{x^2}{n^2}.$$

Первый ряд сходится по признаку Лейбница, а второй – по признаку сравнения. Поэтому, областью существования функции $f(x)$ является R^1. Для исследования функции $f(x)$ на R^1 на непрерывность достаточно изучить на множествах $|x| \le A$ при $\forall A > 0$ указанные ряды на равномерную сходимость. Первый ряд сходится равномерно по признаку Дирихле-Абеля, а второй – по признаку Вейерштрасса. Следовательно, функция $f(x)$ является непрерывной на множествах $|x| \le A$ при $\forall A > 0$, а, значит, и на R^1.

4. **Решение:** Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$. Поэтому, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$y(x) = e^{-3x}\Big(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\Big),$$

где $C_{1,2}$ – произвольные постоянные. Удовлетворяя первому краевому условию, находим $y(x) = C_2 e^{-3x} \sin(2x)$. Из второго краевого условия получаем $C_2 e^{-3T} \cos(2T) = 0$. Из этого равенства заключаем:
- при $\cos(2T) \ne 0$, или $T \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \ge 0$ имеем единственное решение $y(x) = 0$;
- при $\cos(2T) = 0$, или $T = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \ge 0$ имеем бесконечно много решений $y(x) = Ce^{-3x}\sin(2x)$, где C – произвольная постоянная.

5. **Решение:** Для функции $w = u + iv$ имеем $v = y^2 - x^2 - 3y - x$. Из условий Коши-Римана находим:

$$u'_x = v'_y = 2y - 3,\ u'_y = -v'_x = 2x + 1.$$

Тогда получаем

$$u = \int u'_x dx = 2xy - 3x + C(y).$$

С другой стороны, находим

$$u'_y = 2x + C'(y) = 2x + 1.$$

Отсюда имеем $C'(y) = 1$, или $C(y) = y + C_*$. Подставляя, находим $u = 2xy - 3x + y + C_*$. Следовательно, получаем

$$w = f(z) = (2xy - 3x + y + C_*) + i\left(y^2 - x^2 - 3y - x\right) = -iz^2 - (3+i)z + C_*.$$

Учитывая начальное условие, находим $C_* = -1$. Значит, требуемая функция имеет вид $w = f(z) = -iz^2 - (3+i)z - 1$.

Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2013)

ВАРИАНТ 3

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi^3}{8}} \frac{\sin\left(7\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx\ .$$

2. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе из его собственных векторов.

3. Определить область существования функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^3 - x^3}{n^4 + x^4}$$

и исследовать ее на этой области на непрерывность.

4. Выяснить, сколько на отрезке $[0, T]$, $T > 0$ существует решений краевой задачи

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0,\ x \in (0, T), \\ y(0) = 0,\ y'(T) - 2y(T) = 0. \end{cases}$$

Указать все эти решения.

5. Используя условия Коши-Римана, найти аналитическую функцию $w = f(z)$ такую, что:

$$\mathrm{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + 2y - x,\ z = x + iy;\ f(-1) = 3i\ .$$

6. В базисе $B = \{x \oplus y\}$ из одного элемента сложения по модулю два построить схему из функциональных элементов сложности 4 с входами x_1, x_2, x_3, x_4 и выходами y_1, y_2, y_3, y_4, реализующую линейное преобразование над полем вычетов по модулю два $y = Ax$, где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top$, и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Написать программу, принимающую на стандартный вход строку, длина которой не более 1000000 символов. Входная строка может быть описана следующим набором металингвистических формул:

<входная строка>::= <выражение>.

<выражение>::= <переменная> | <переменная><знак><выражение>

<переменная>::= z | y | x | w | v | u | t | s | r | q | p | o | n | m | l | k | j | i | h | g | f | e | d | c | b | a

<знак>::= + | -

Программа должна, воспринимая записанное во входной строке арифметическое выражение, назначить значения всем переменным от a до z, независимо от того, входят они во введенную строку или нет. Значения должны быть назначены так, чтобы результат вычисления введенного выражения был максимальным. Значение каждой переменной должно быть целым числом из диапазона $[0, 25]$, причём ни у каких двух переменных значения не должны совпадать. На вывод программа должна подать значения всех переменных от z до a (в обратном алфавитном порядке имен переменных) и результат вычисления выражения. Для решения следует подобрать оптимальный алгоритм, время работы которого линейно зависит от длины входа, а размер используемой памяти невелик и не зависит от длины входа.

Пример работы программы. Ввод: $a + a + b - c$. Вывод (далее указан один из возможных выводов программы): 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 0 24 25 74

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 3

1. **Решение:** Выполняя замену переменной $t = \sqrt[3]{x}$ и затем интегрируя по частям, имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi^3}{8}} \frac{\sin(7\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(7t)dt = -\frac{3}{49}.$$

2. **Решение:** Находя собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$ линейного оператора, видим, что требуемая матрица является диагональной, на главной диагонали которой расположены найденные собственные значения.

3. **Решение:** При каждом фиксированном $x \in \mathrm{R}^1$ справедливо равенство

$$\frac{(-1)^n n^3 - x^3}{n^4 + x^4} = \frac{(-1)^n n^3}{n^4 + x^4} - \frac{x^3}{n^4 + x^4}.$$

Первый ряд сходится по признаку Лейбница, а второй – по признаку сравнения. Поэтому, областью существования функции $f(x)$ является R^1. Для исследования функции $f(x)$ на R^1 на непрерывность достаточно изучить на множествах $|x| \leq A$ при $\forall A > 0$ указанные ряды на равномерную сходимость. Первый ряд сходится равномерно по признаку Дирихле-Абеля, а второй – по признаку Вейерштрасса. Следовательно, функция $f(x)$ является непрерывной на множествах $|x| \leq A$ при $\forall A > 0$, а, значит, и на R^1.

4. **Решение:** Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. Поэтому, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$y(x) = e^{2x}\Big(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\Big),$$

где $C_{1,2}$ – произвольные постоянные. Удовлетворяя первому краевому условию, находим $y(x) = C_2 e^{2x}\sin(3x)$. Из второго краевого условия получаем $C_2 e^{2T}\cos(3T) = 0$. Из этого равенства заключаем:
• при $\cos(3T) \neq 0$, или $T \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \geq 0$ имеем единственное решение $y(x) = 0$;
• при $\cos(3T) = 0$, или $T = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \geq 0$ имеем бесконечно много решений $y(x) = Ce^{2x}\sin(3x)$, где C – произвольная постоянная.

5. **Решение:** Для функции $w = u + iv$ имеем $u = x^3 - 3xy^2 + 2y - x$. Из условий Коши-Римана находим:

$$u'_x = v'_y = 3x^2 - 3y^2 - 1,\ u'_y = -v'_x = -6xy + 2.$$

Тогда получаем

$$v = \int v'_x dx = 3x^2y - 2x + C(y).$$

С другой стороны, находим

$$v'_y = 3x^2 + C'(y) = 3x^2 - 3y^2 - 1.$$

Отсюда имеем $C'(y) = -3y^2 - 1$, или $C(y) = -y^3 - y + C_*$. Подставляя, находим $v = 3x^2y - y^3 - 2x - y + C_*$. Следовательно, получаем

$$w = f(z) = \left(x^3 - 3xy^2 + 2y - x\right) + i\left(3x^2y - y^3 - 2x - y + C_*\right) = z^3 - (1+2i)z + iC_*.$$

Учитывая начальное условие, находим $C_* = 1$. Значит, требуемая функция имеет вид $w = f(z) = z^3 - (1+2i)z + i$.

Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2013)

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi^2} \cos\left(9\sqrt{x}\right) dx\ .$$

2. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе из его собственных векторов.

3. Определить область существования функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^3 |x| - x^2}{n^4}$$

и исследовать ее на этой области на непрерывность.

4. Выяснить, сколько на отрезке $[0, T]$, $T > 0$ существует решений краевой задачи

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 17y(x) = 0,\ x \in (0, T), \\ y(0) = 0,\ y'(T) + y(T) = 0. \end{cases}$$

Указать все эти решения.

5. Используя условия Коши-Римана, найти аналитическую функцию $w = f(z)$ такую, что:

$$\mathrm{Im} f(z) = 3xy^2 - x^3 + 4x - y,\ z = x + iy;\ f(1) = 3i\ .$$

6. В базисе $B = \{x \oplus y\}$ из одного элемента сложения по модулю два построить схему из функциональных элементов сложности 4 с входами x_1, x_2, x_3, x_4 и выходами y_1, y_2, y_3, y_4, реализующую линейное преобразование над полем вычетов по модулю два $y = Ax$, где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top$, и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Написать программу, принимающую на стандартный вход строку, длина которой не более 1000000 символов. Входная строка может быть описана следующим набором металингвистических формул:

<входная строка>::= <выражение>.

<выражение>::= <переменная> | <переменная><знак><выражение>

<переменная>::= Z | Y | X | W | V | U | T | S | R | Q | P | O | N | M | L | K | J | I | H | G | F | E | D | C | B | A

<знак>::= + | -

Программа должна, воспринимая записанное во входной строке арифметическое выражение, назначить значения всем переменным от A до Z, независимо от того, входят они во введенную строку или нет. Значения должны быть назначены так, чтобы результат вычисления введенного выражения был минимальным. Значение каждой переменной должно быть целым числом из диапазона $[1, 26]$, причём ни у каких двух переменных значения не должны совпадать. На вывод программа должна подать значения всех переменных от Z до A (в обратном алфавитном порядке имен переменных) и результат вычисления выражения. Для решения следует подобрать оптимальный алгоритм, время работы которого линейно зависит от длины входа, а размер используемой памяти невелик и не зависит от длины входа.

Пример работы программы. Ввод: $A+A+B-C$. Вывод (далее указан один из возможных выводов программы): 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 2 1 −22

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 4

1. **Решение:** Выполняя замену переменной $t = \sqrt{x}$ и затем интегрируя по частям, имеем:

$$\int\limits_0^{\pi^2} \cos\left(9\sqrt{x}\right)dx = 2\int\limits_0^{\pi} t\cos\left(9t\right)dt = -\frac{4}{81}.$$

2. **Решение:** Находя собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 7$ линейного оператора, видим, что требуемая матрица является диагональной, на главной диагонали которой расположены найденные собственные значения.

3. **Решение:** При каждом фиксированном $x \in \mathrm{R}^1$ справедливо равенство

$$\frac{(-1)^n n^3|x| - x^2}{n^4} = \frac{(-1)^n|x|}{n} - \frac{x^2}{n^4}.$$

Первый ряд сходится по признаку Лейбница, а второй – по признаку сравнения. Поэтому, областью существования функции $f(x)$ является R^1. Для исследования функции $f(x)$ на R^1 на непрерывность достаточно изучить на множествах $|x| \le A$ при $\forall A > 0$ указанные ряды на равномерную сходимость. Первый ряд сходится равномерно по признаку Дирихле-Абеля, а второй – по признаку Вейерштрасса. Следовательно, функция $f(x)$ является непрерывной на множествах $|x| \le A$ при $\forall A > 0$, а, значит, и на R^1.

4. **Решение:** Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm 4i$. Поэтому, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$y(x) = e^{-x}\Big(C_1\cos\left(4x\right) + C_2\sin\left(4x\right)\Big),$$

где $C_{1,2}$ – произвольные постоянные. Удовлетворяя первому краевому условию, находим $y(x) = C_2e^{-x}\sin\left(4x\right)$. Из второго краевого условия получаем $C_2e^{-T}\cos\left(4T\right) = 0$. Из этого равенства заключаем:

- при $\cos\left(4T\right) \ne 0$, или $T \ne \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \ge 0$ имеем единственное решение $y(x) = 0$;
- при $\cos\left(4T\right) = 0$, или $T = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \ge 0$ имеем бесконечно много решений $y(x) = Ce^{-x}\sin\left(4x\right)$, где C – произвольная постоянная.

5. **Решение:** Для функции $w = u + iv$ имеем $v = 3xy^2 - x^3 + 4x - y$. Из условий Коши-Римана находим:

$$u'_x = v'_y = 6xy - 1,\ u'_y = -v'_x = 3x^2 - 3y^2 - 4.$$

Тогда получаем

$$u = \int u'_x dx = 3x^2y - x + C(y).$$

С другой стороны, находим

$$u'_y = 3x^2 + C'(y) = 3x^2 - 3y^2 - 4.$$

Отсюда имеем $C'(y) = -3y^2 - 4$, или $C(y) = -y^3 - 4y + C_*$. Подставляя, находим $u = 3x^2y - y^3 - x - 4y + C_*$. Следовательно, получаем

$$w = f(z) = \left(3x^2y - y^3 - x - 4y + C_*\right) + i\left(3xy^2 - x^3 + 4x - y\right) = -iz^3 - (1 - 4i)z + C_*.$$

Учитывая начальное условие, находим $C_* = 1$. Значит, требуемая функция имеет вид $w = f(z) = -iz^3 - (1 - 4i)z + 1$.