Задачи высоких размерностей в моделях динамики и управления. Параллельные вычисления и средства их реализации. Часть 2

А. Б. Куржанский, А. Н. Дарьин

МГУ имени М. В. Ломоносова
Ф-т вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

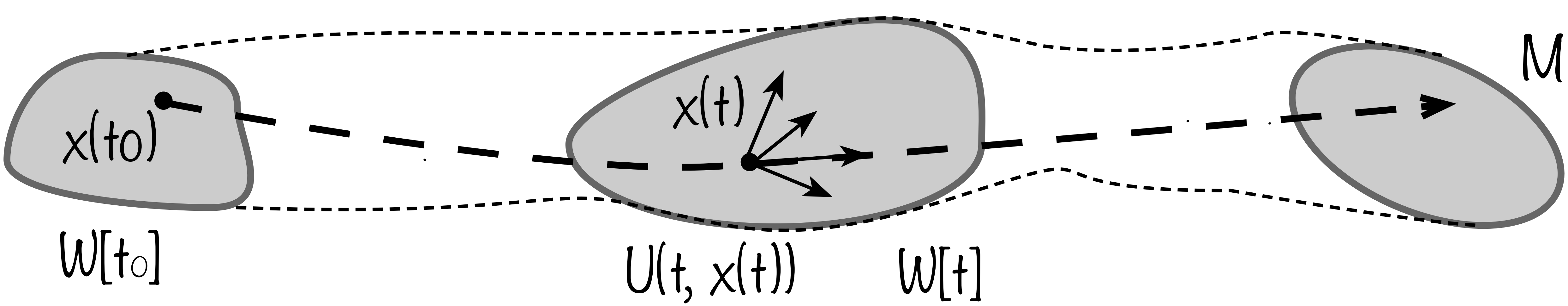
Москва, 25 июня 2013 года

Введение

- Найти **множество разрешимости** линейной системы
  - Большая размерность (сотни переменных)
  - Неопределённость
- Подход: **эллипсоидальное исчисление**
  - Необходимы модификации для больших размерностей
- Новое: **“перемешивание” аппроксимаций**
  - Устойчивое вычисление для больших систем
  - Параллельные вычисления

Задача

- Система: $\dot{x} = A(t)x + u + v, \quad t \in [t_0, t_1]$
- Ограничения: $u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t)$
- Цель: $x(t_1) \in \mathcal{M}$
- Синтез: $\mathcal{U}(t, x)$
- **Множество разрешимости:** $\mathcal{W}[t]$

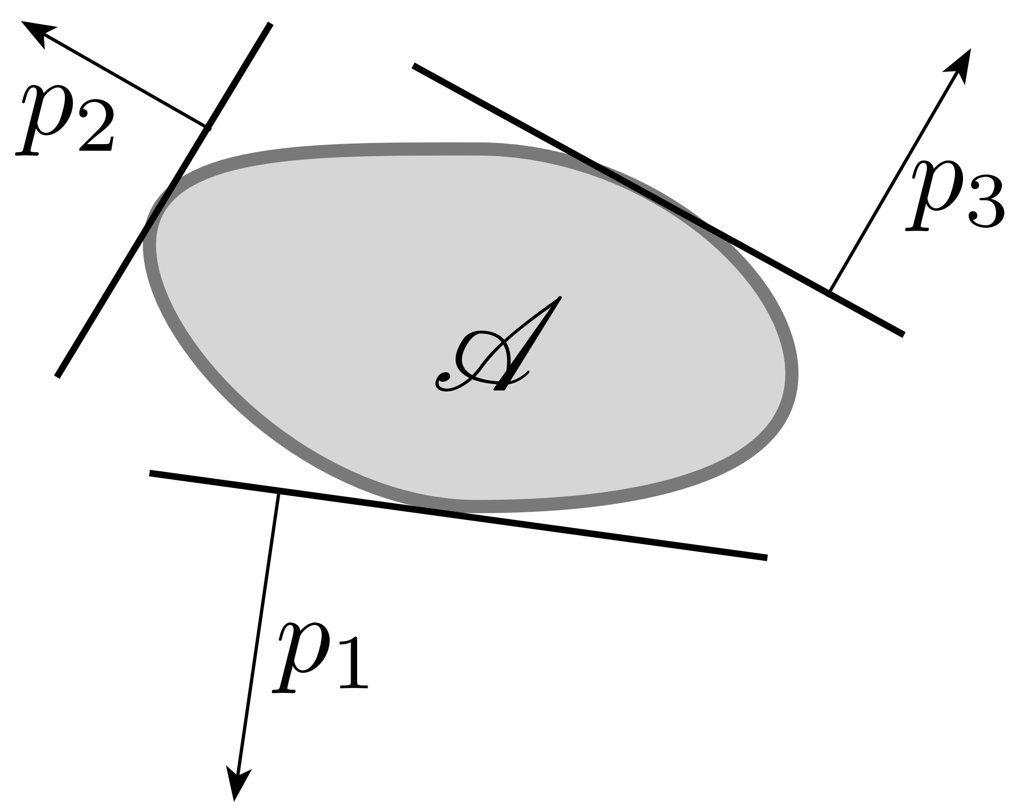


Элементы выпуклого анализа

Опорная функция

$$\rho(p \mid \mathscr{A}) = \sup_{x \in \mathscr{A}} \langle x, p \rangle$$

$$x \in \mathscr{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, p \rangle \leqslant \rho(p \mid \mathscr{A}) \quad \forall p$$

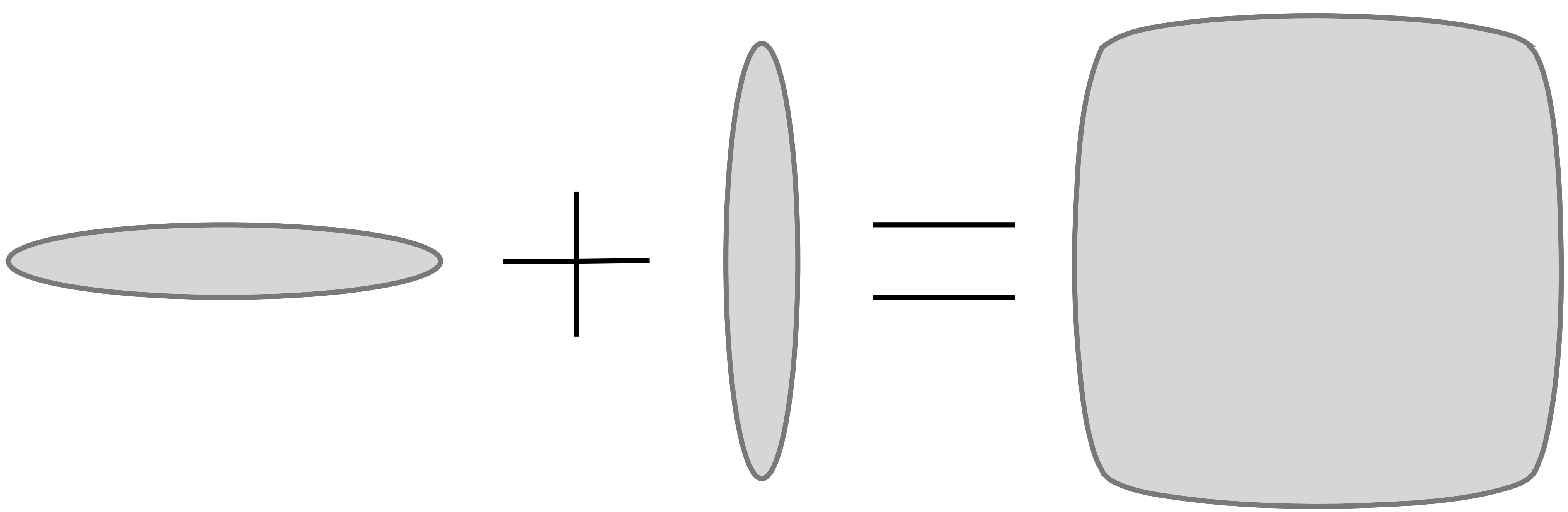


Элементы выпуклого анализа

Геометрическая сумма

$$A + B = \{x = a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$\rho(p \mid A + B) = \rho(p \mid A) + \rho(p \mid B)$$

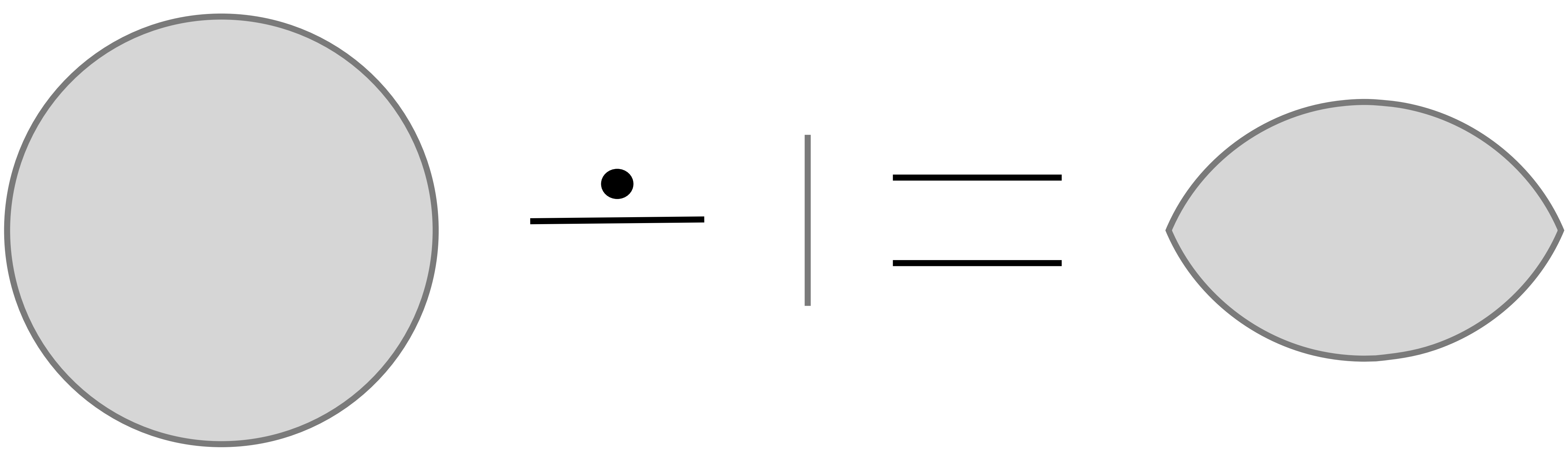


Элементы выпуклого анализа

Геометрическая разность

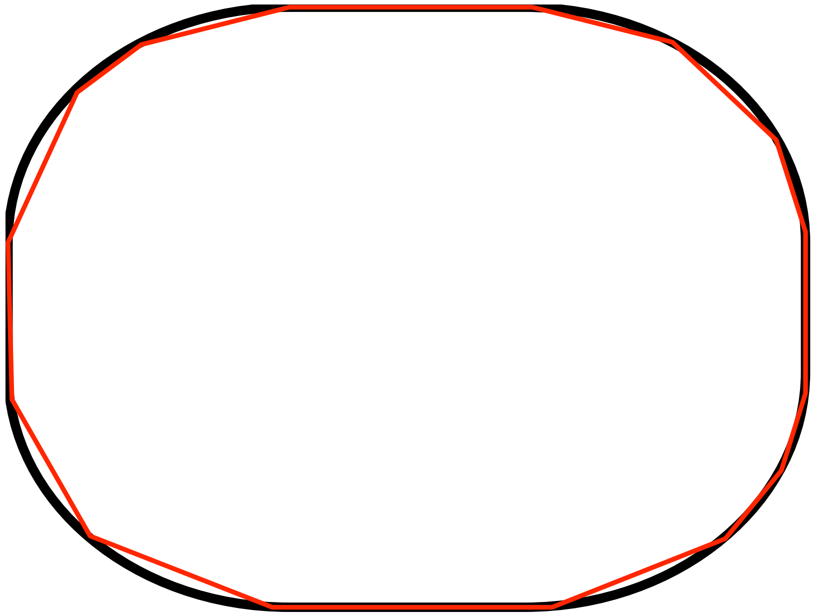
$$A \mathbin{\dot{-}} B = \{x \mid x + B = A\}$$

$$\rho(p \mid A \mathbin{\dot{-}} B) = \operatorname{conv}\{\rho(p \mid A) - \rho(p \mid B)\}$$

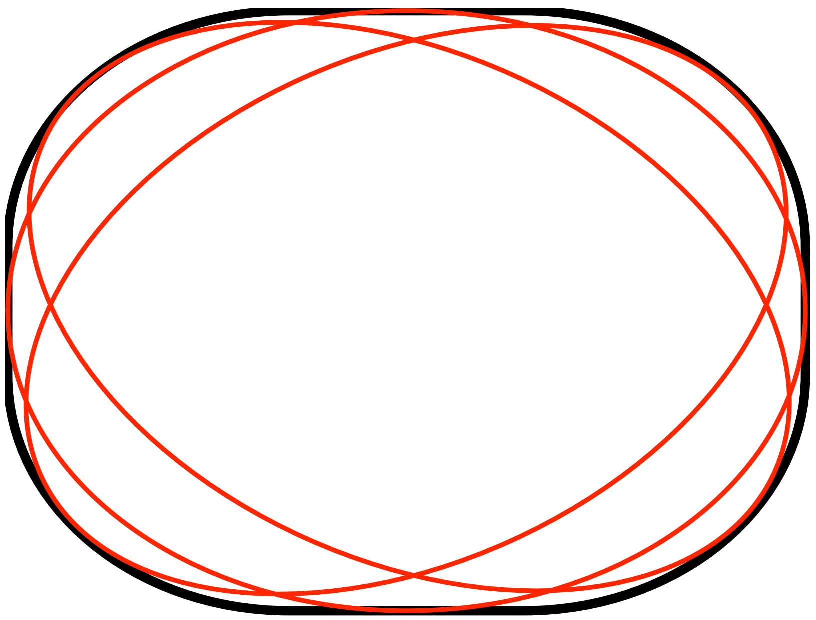


Сложность

- **Полиэдральная аппроксимация**
  - Данные, вычисления: $O(e^n)$
  - Неприменимо при $n > 10$

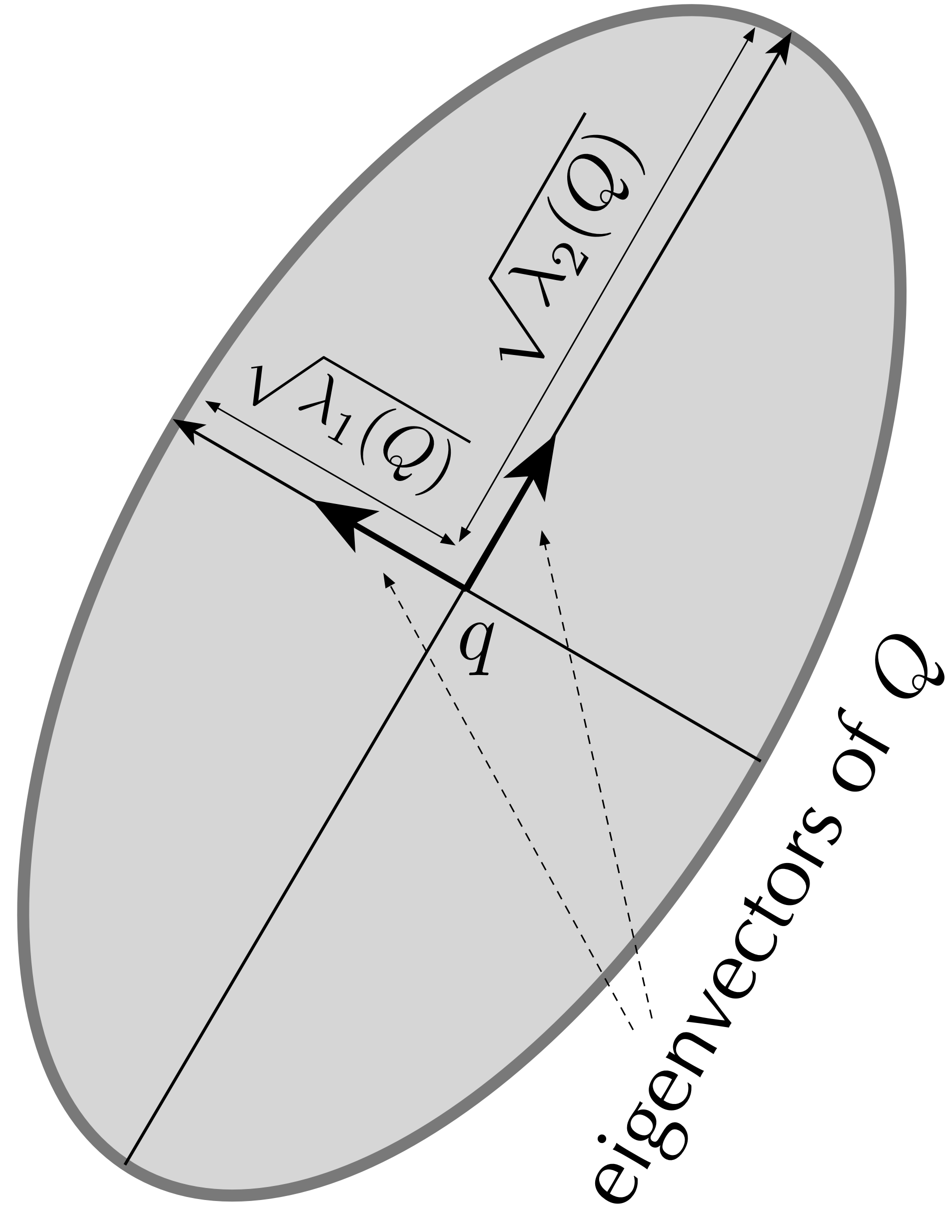


- **Эллипсоидальная аппроксимация**
  - Данные: $O(Kn^2)$
  - Вычисления: $O(Kn^3)$
  - Подходит для больших n



n - размерность, K - количество аппроксимаций

Эллипсоидальная аппроксимация



- Эллипсоид: $\mathcal{E}(q, Q)$

$$\rho(\ell \mid \mathcal{E}(q,Q)) = \langle \ell, q\rangle + \langle \ell, Q\ell\rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{E}(q,Q) = \{x \mid \langle x-q, Q^{-1}(x-q)\rangle \le 1\}$$

- Эллипсоидальные ограничения:

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(0, P(t)), \quad \mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(0, Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(0, M)$$

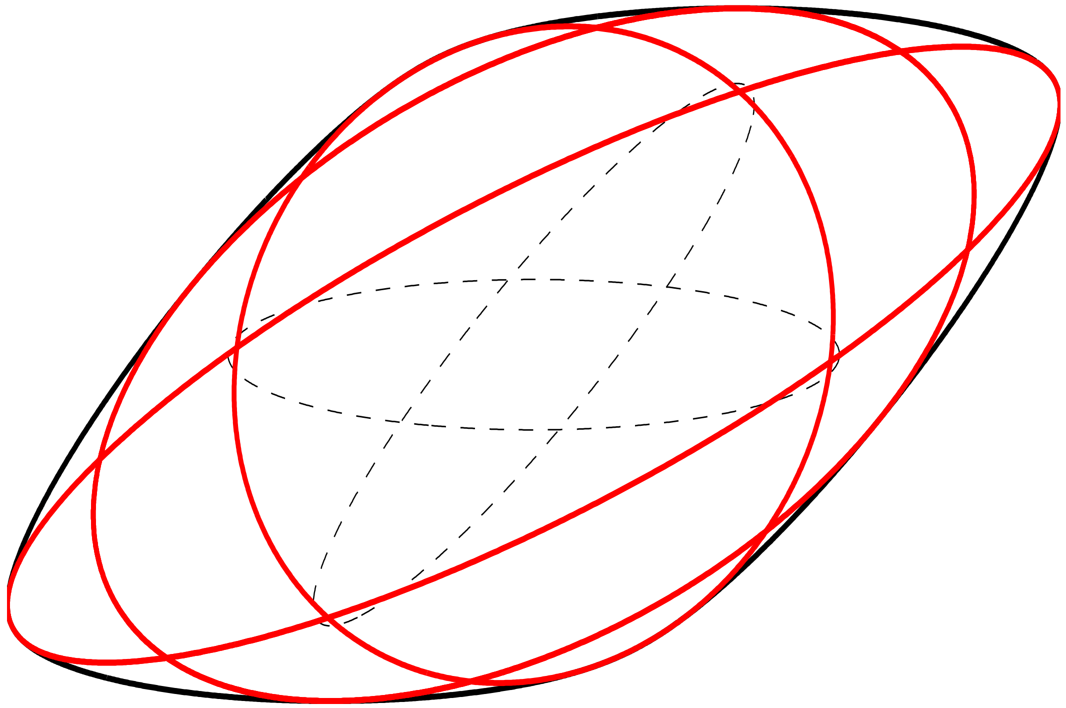
Аппроксимация суммы

$$\mathscr{E}(q,Q) \subseteq \mathscr{E}(q_1,Q_1) + \mathscr{E}(q_2,Q_2)$$

$$q = q_1 + q_2$$

$$Q = (Q_1^{\frac{1}{2}} + TQ_2^{\frac{1}{2}})^T (Q_1^{\frac{1}{2}} + TQ_2^{\frac{1}{2}})$$

$$TT^T = I, \quad TQ_2^{\frac{1}{2}} p \upuparrows Q_1^{\frac{1}{2}} p$$



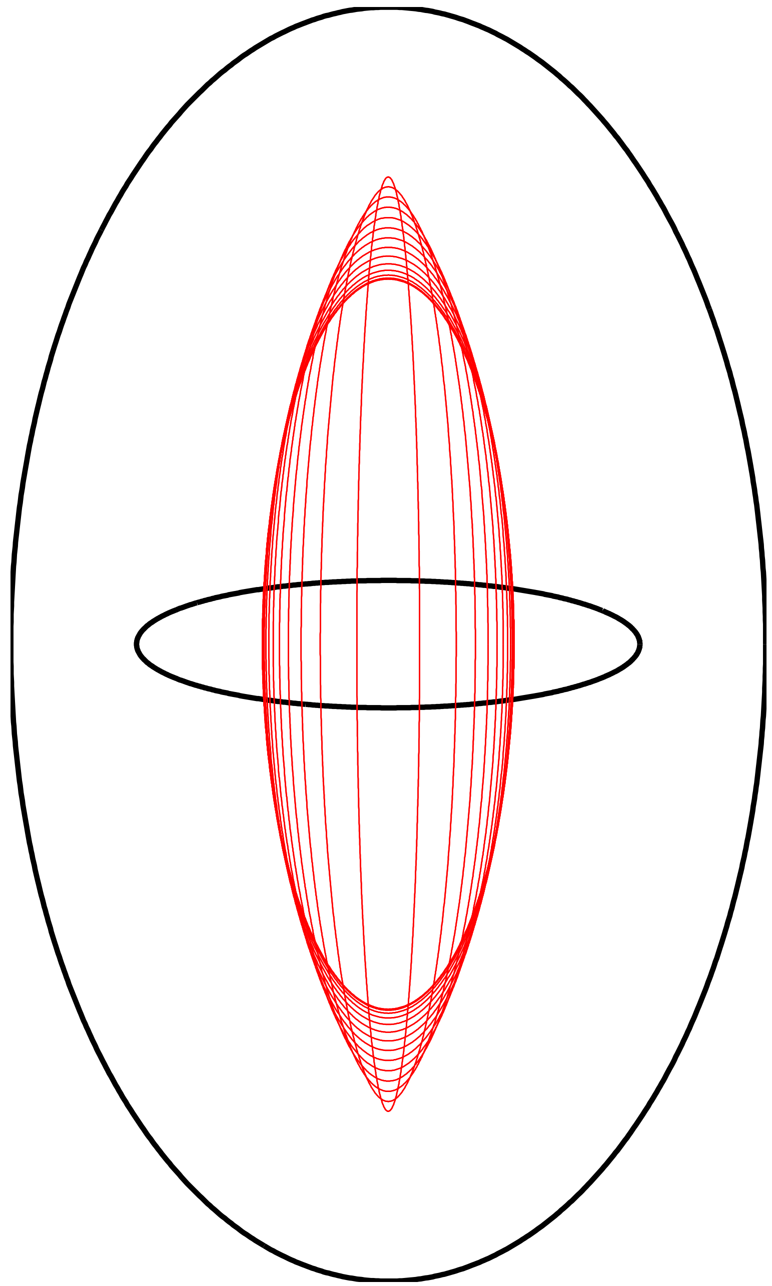
Аппроксимация разности

$$\mathscr{E}(q, Q) \subseteq \mathscr{E}(q_1, Q_1) \dot{-} \mathscr{E}(q_2, Q_2)$$

$$q = q_1 - q_2$$

$$Q = (1 - \lambda)Q_1 + (1 - \lambda^{-1})Q_2$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\langle p, Q_1 p\rangle}{\langle p, Q_2 p\rangle}}$$



Эллипсоидальная аппроксимация

$$\mathcal{W}^{-}[t] = \mathcal{E}(0, W(t))$$

- Уравнение внутренней аппроксимации

A. B. Kurzhanski, P. Varaiya // Optim. Meth. & Software, V. 17, N. 2, 2002.

A. A. Kurzhanski, P. Varaiya. Ellipsoidal Toolbox, 2005.

$$\dot{W} = AW + WA^T - W^{\frac{1}{2}}TP^{\frac{1}{2}} - P^{\frac{1}{2}}T^TW^{\frac{1}{2}} + \pi W + \pi^{-1}Q$$

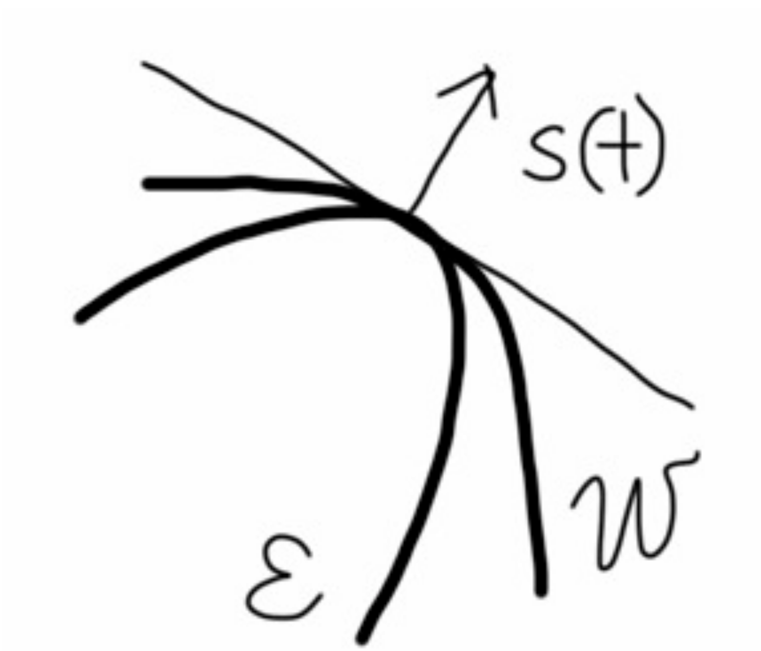
$$TT^T = I, \quad TP^{\frac{1}{2}}s \parallel W^{\frac{1}{2}}s \qquad \dot{s} = -A^Ts, \quad s(t_1) = \ell$$

$$\pi = \frac{\langle s, Qs\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle s, Ws\rangle^{\frac{1}{2}}} \qquad W(t_1) = M$$

Эллипсоидальная аппроксимация

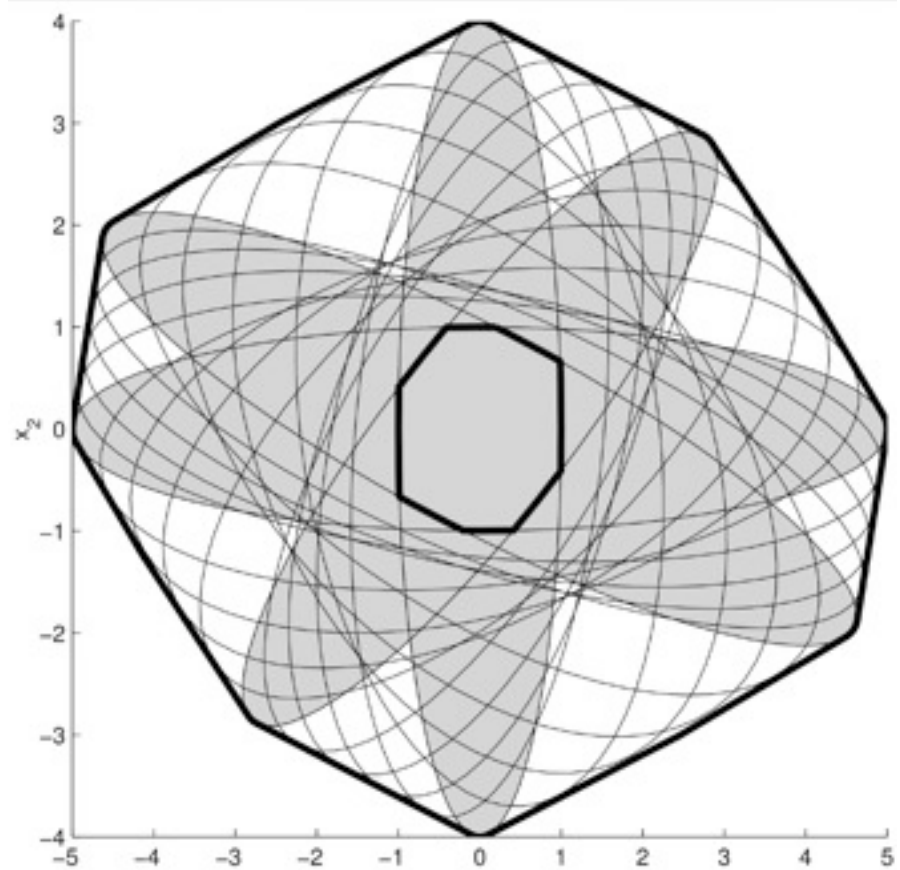
- **Тугость**:

$$\rho(s(t) \mid \mathcal{W}^{-}[t]) = \rho(s(t) \mid \mathcal{W}[t])$$



- **Набор** оценок

$$\ell = \ell_i, \quad i = 1, \ldots, k$$



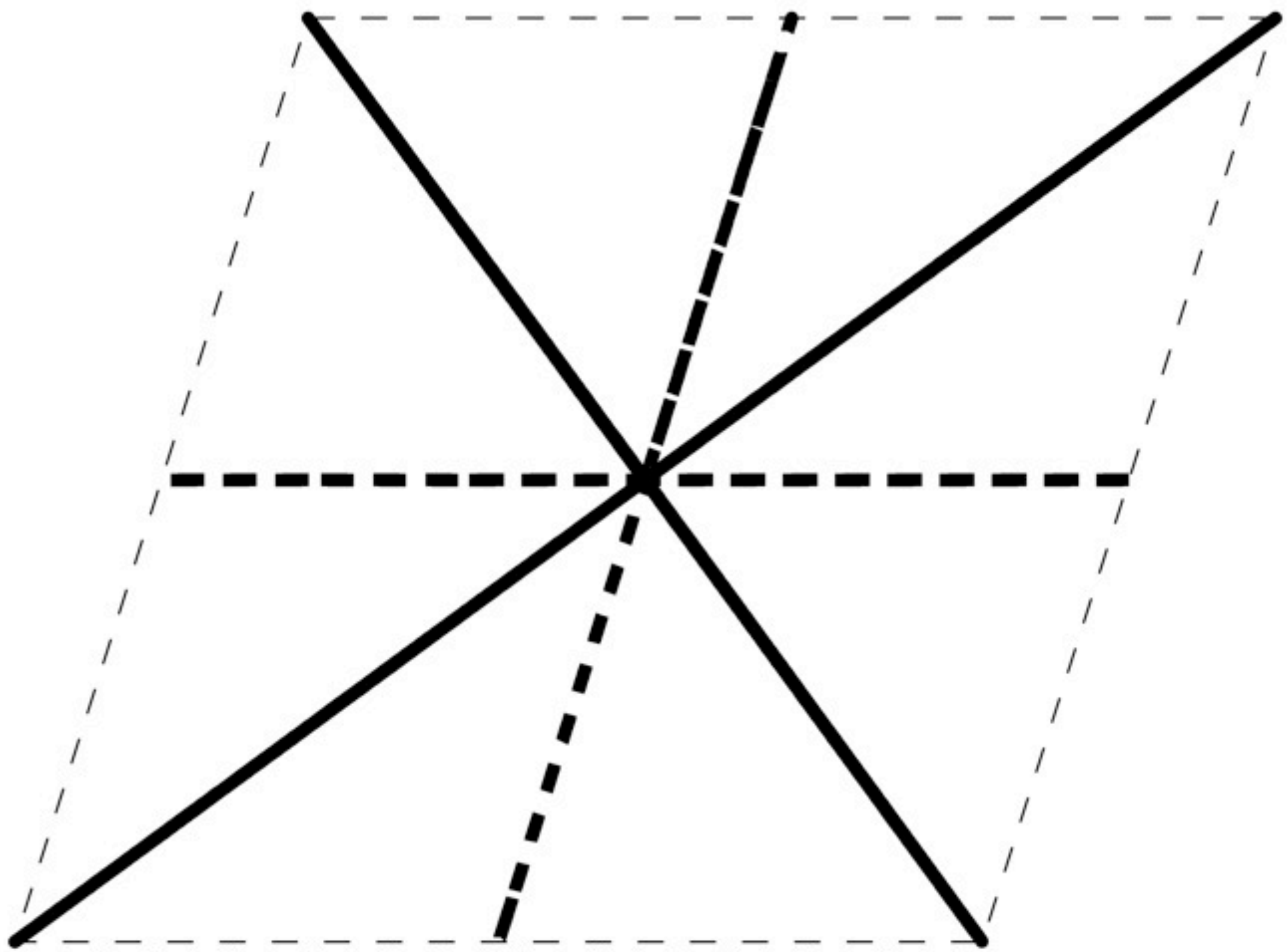
Точность

Параллелизм

Системы высоких размерностей

- Регуляризация аппроксимаций: комбинирование оценок
- Вычисление матрицы поворота: эффективно и с требуемыми свойствами
- Параллельные вычисления

Вырожденность аппроксимаций



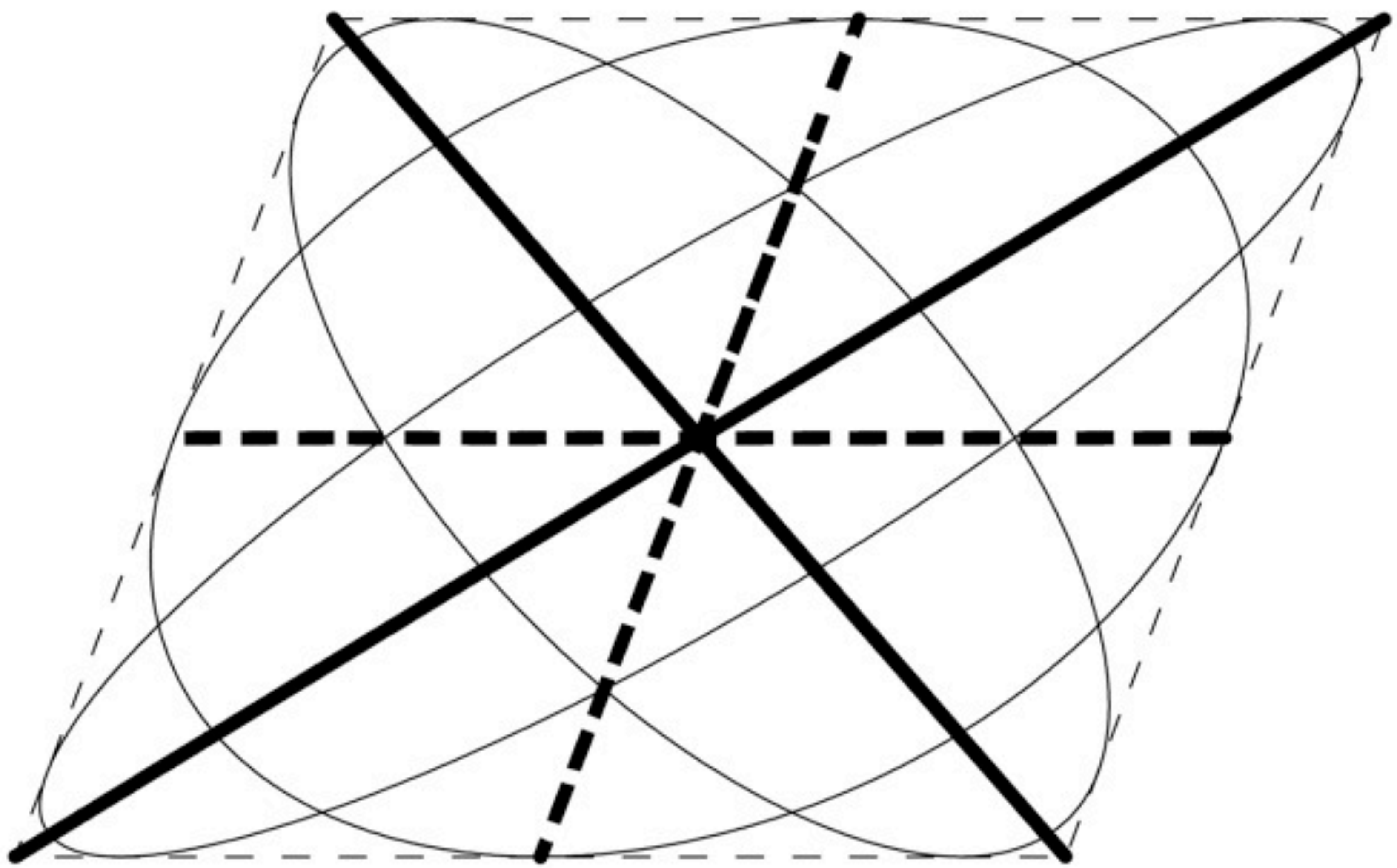
Идея решения проблемы

- Вырожденность - следствие тугости
  - **Ослабить требование тугости**
    (но не отказываться от него!)

- Имеем набор аппроксимаций
  - **Скомбинировать аппроксимации**

Регуляризация суммы эллипсоидов

$$Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha) Q_2$$



Регуляризация трубки разрешимости

$$W_i(t_1) = M, \quad i = 1, \dots, m$$

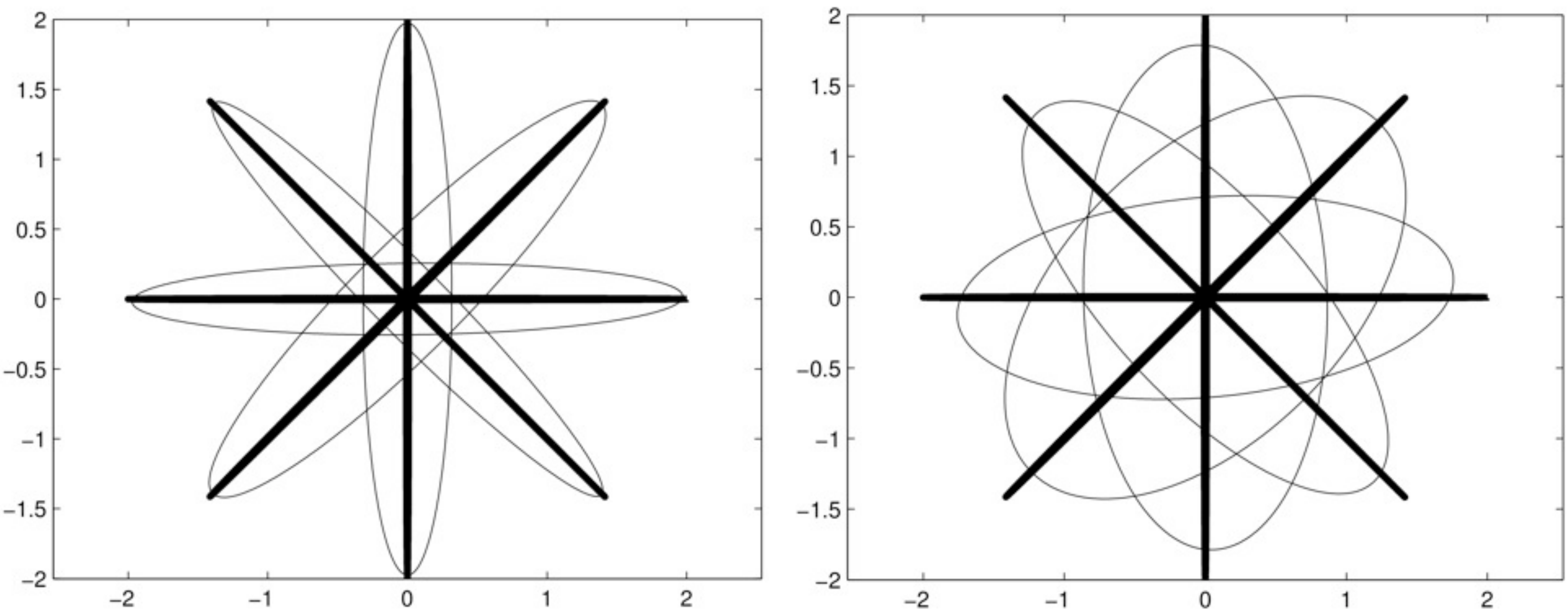
$$\dot{W}_i = AW_i + W_iA^T - W_i^{\frac{1}{2}} T_i P^{\frac{1}{2}} - P^{\frac{1}{2}} T_i^T W_i^{\frac{1}{2}} + \pi_i W_i + \pi_i^{-1} Q +$$
$$+ \gamma \left(\sum_{j=1}^m \beta_{i,j} W_j(t) - W_i(t) \right)$$

$$T_i T_i^T = I, \quad T_i P^{\frac{1}{2}} s_i \parallel W_i^{\frac{1}{2}} s_i \qquad \dot{s}_i = -A^T s_i, \quad s_i(t_1) = \ell_i$$

$$\pi_i = \frac{\langle s_i, Q s_i \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle s_i, W_i s_i \rangle^{\frac{1}{2}}} \qquad W_i(t_1) = M$$

$$\sum_{j=1}^m \beta_{ij} = 1 \qquad \gamma, \beta_{i,j} \geq 0$$

Регуляризация трубки разрешимости



Свойства “перемешанных” оценок

- $\mathcal{W}_i^-[t] \subseteq \mathcal{W}[t]$
- Эволюционное уравнение $\mathcal{W}^-[t] = \operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^m \mathcal{W}_i^-[t]$

$$\lim_{\sigma \to 0+} \sigma^{-1} h_+((I + \sigma A)\mathcal{W}^-[t-\sigma] + \sigma \mathcal{Q}, \quad \mathcal{W}^-[t] - \sigma \mathcal{P}) = 0$$

- Неравенство Г-Я-Б-А $V_-(t,x) = d(x, \mathcal{W}^-[t])$

$$\min_{u \in \mathcal{P}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \{V_t^- + \langle V_x^-, Ax + u + v \rangle\} \leq 0$$

Вычисление матрицы поворота

$Tv_1 \parallel v_2$ – ?

$$T = I + Q_1(S - I)Q_1^T$$

$$S = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

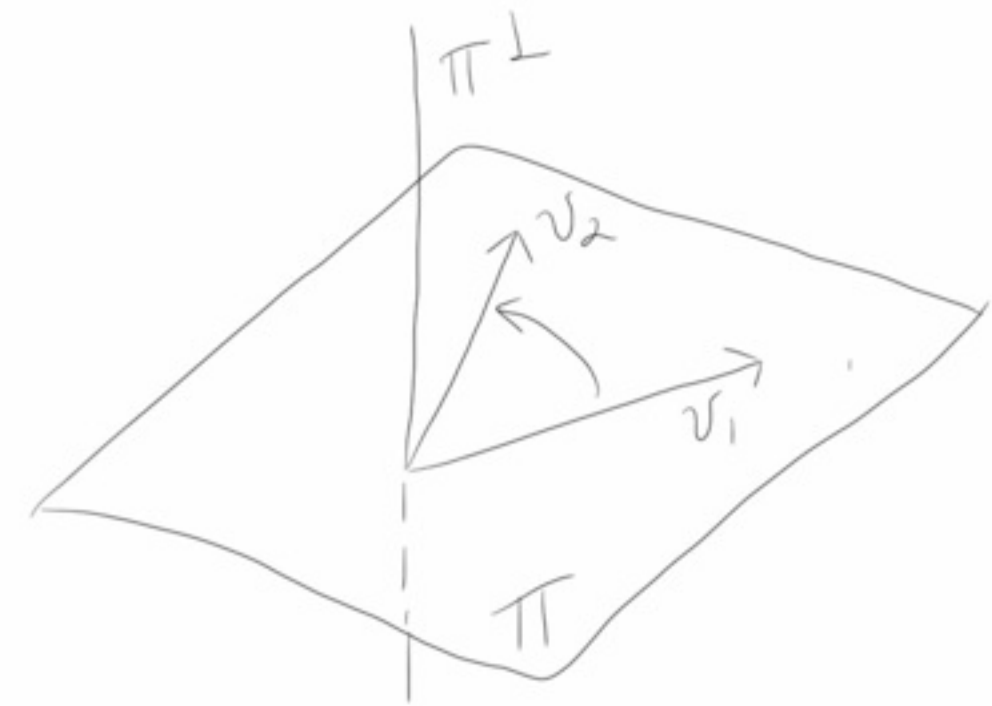
$c = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_2 \rangle, \; s = \sqrt{1 - c^2}$

$\hat{v}_i = v_i / \|v_i\|$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}$$

$q_1 = \hat{v}_1$

$$q_2 = \begin{cases} s^{-1}(\hat{v}_2 - c\hat{v}_1), & s \neq 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$



Вычисление матрицы поворота

- Гладкость по v_1, v_2
  - применимы методы высокого порядка

- Сложность $O(n^2)$ (включая умножение)

Реализация

- Fortran 2003 (Intel)
- MPI
- MKL
- NAG

Параллельные вычисления

- Набор аппроксимаций делится между процессами
- Внутри процесса перемешивание в рамках ОДУ
- Периодически перемешивание между процессами

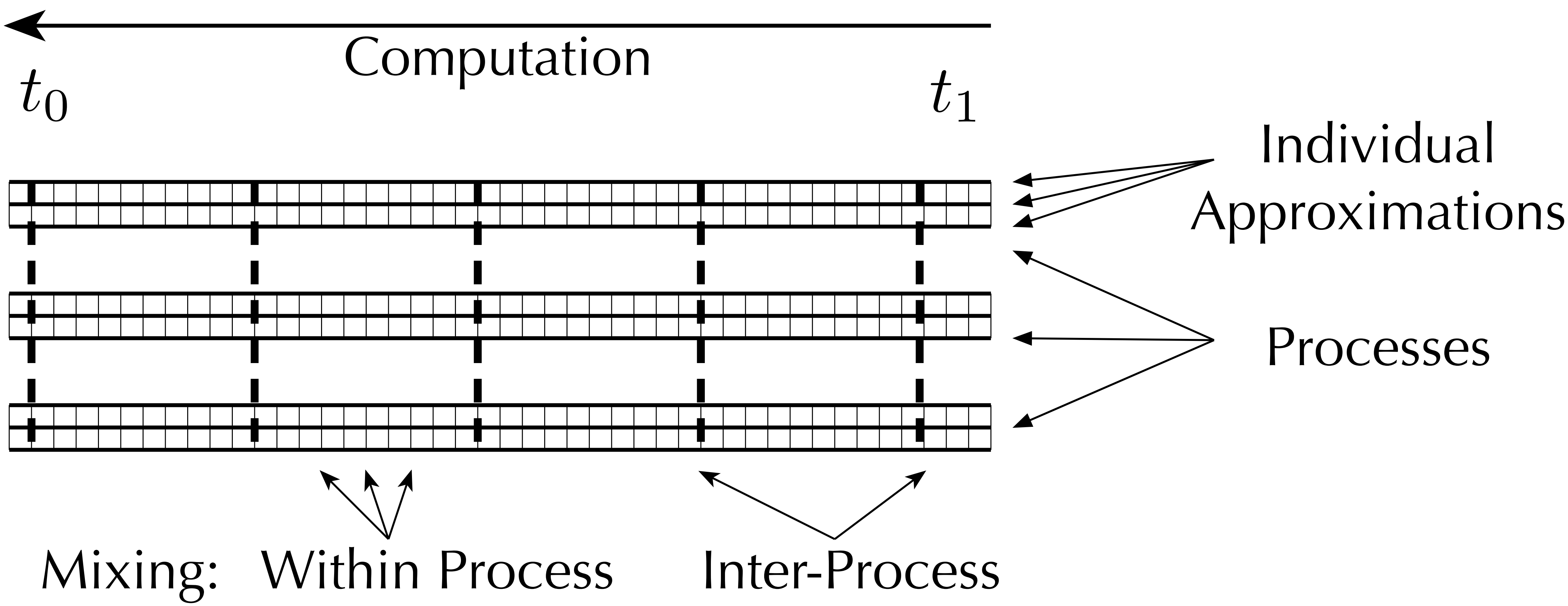
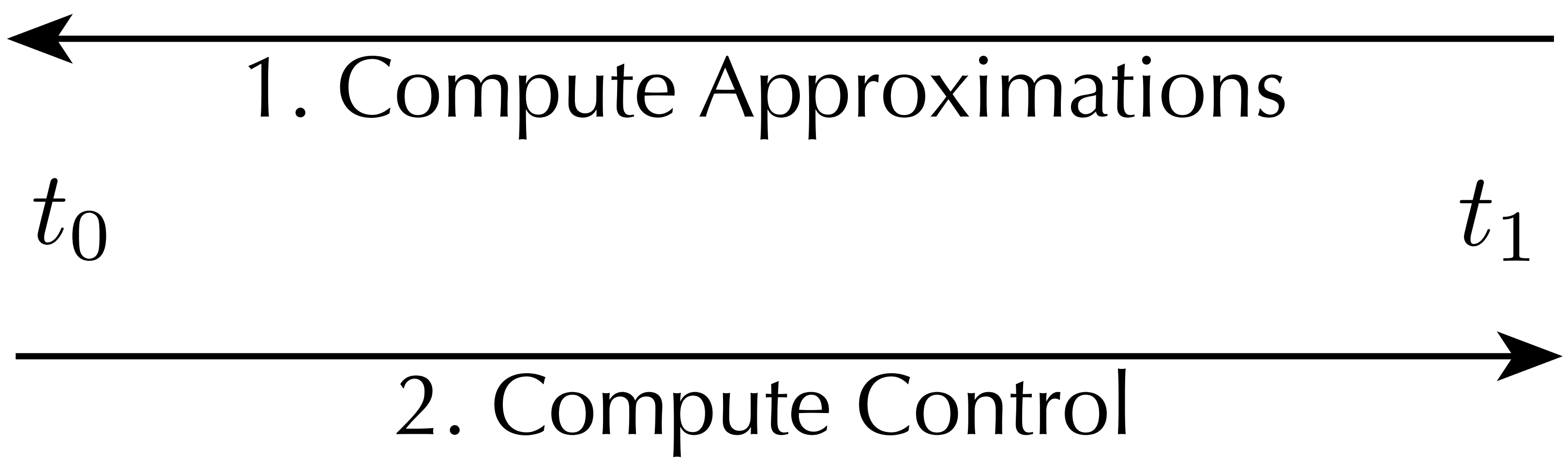


Схема работы программы



- Необходимо хранить все вычисленные аппроксимации

Вычисление управлений

- Оптимальное позиционное управление:

$$\mathscr{U}^*(t,x) = \begin{cases} -\dfrac{P(t)B^T(t)p}{\langle B^T(t)p, P(t)B^T(t)p\rangle^{\frac{1}{2}}}, & B^T(t)p \neq 0; \\ \mathscr{P}(t), & B^T(t)p = 0. \end{cases}$$

- Вектор *p* – максимизатор в

$$V^-(t,x) = \max_{\|p\|\leqslant 1} \min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \langle p, x\rangle - \langle p, W_i p\rangle^{\frac{1}{2}} \right\}$$

- Упрощённая задача:

$$\hat{V}^-(t,x) = \min_{i=1,\ldots,m} \max_{\|p\|\leqslant 1} \left\{ \langle p, x\rangle - \langle p, W_i p\rangle^{\frac{1}{2}} \right\}$$

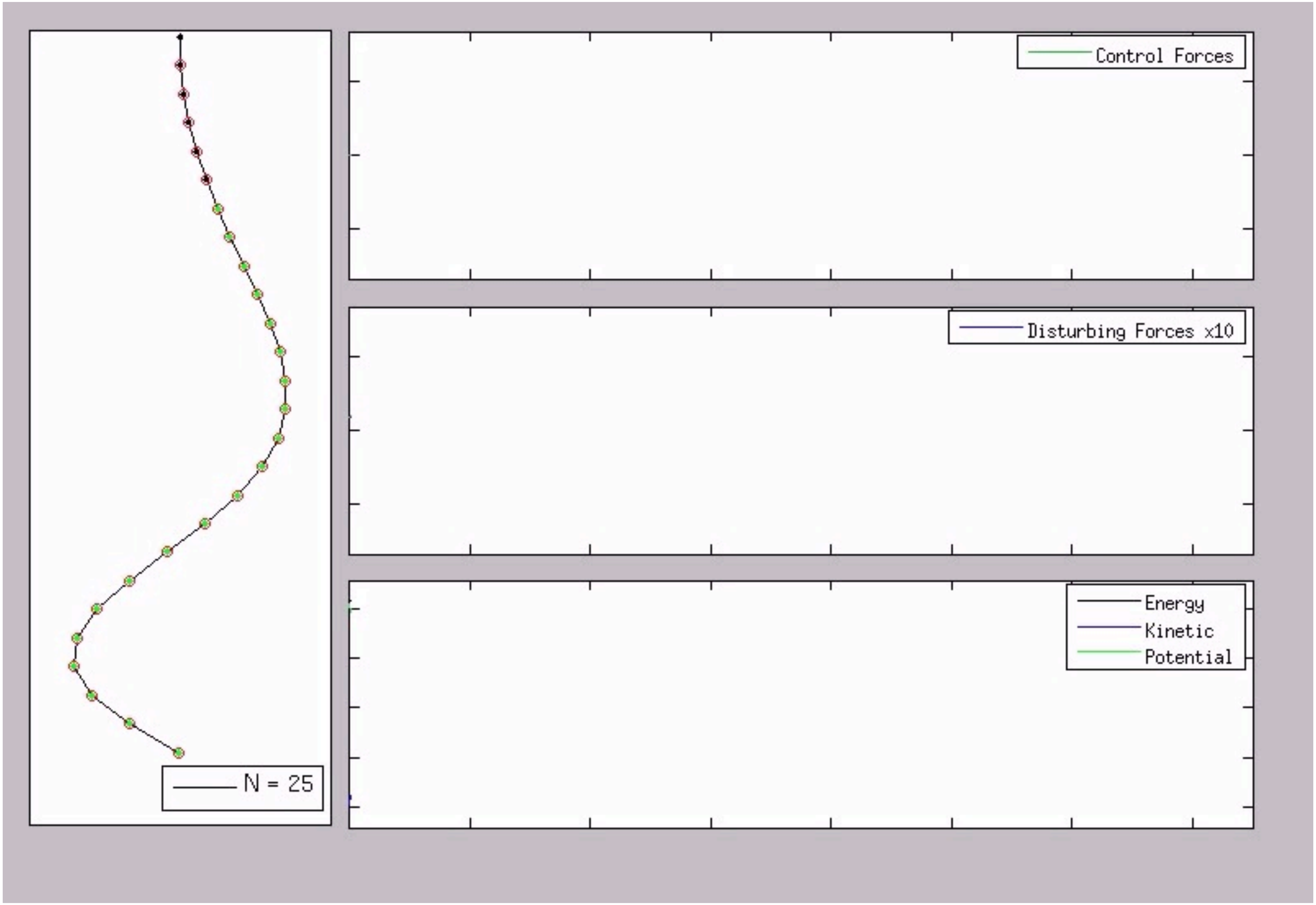
Результаты

- Для многозвенной колебательной системы размерности $\boldsymbol{n=2N}$, N - число звеньев

- $\boldsymbol{N=25}$ (n=50) с помехой без условия подобия
- $\boldsymbol{N=50}$ (n=100) для неоднородной системы
- $\boldsymbol{N=50}$ (n=100) для одностороннего управления
- $\boldsymbol{N=100}$ (n=200) для скалярного управления
- $\boldsymbol{N=250}$ (n=500) для управления размерности N

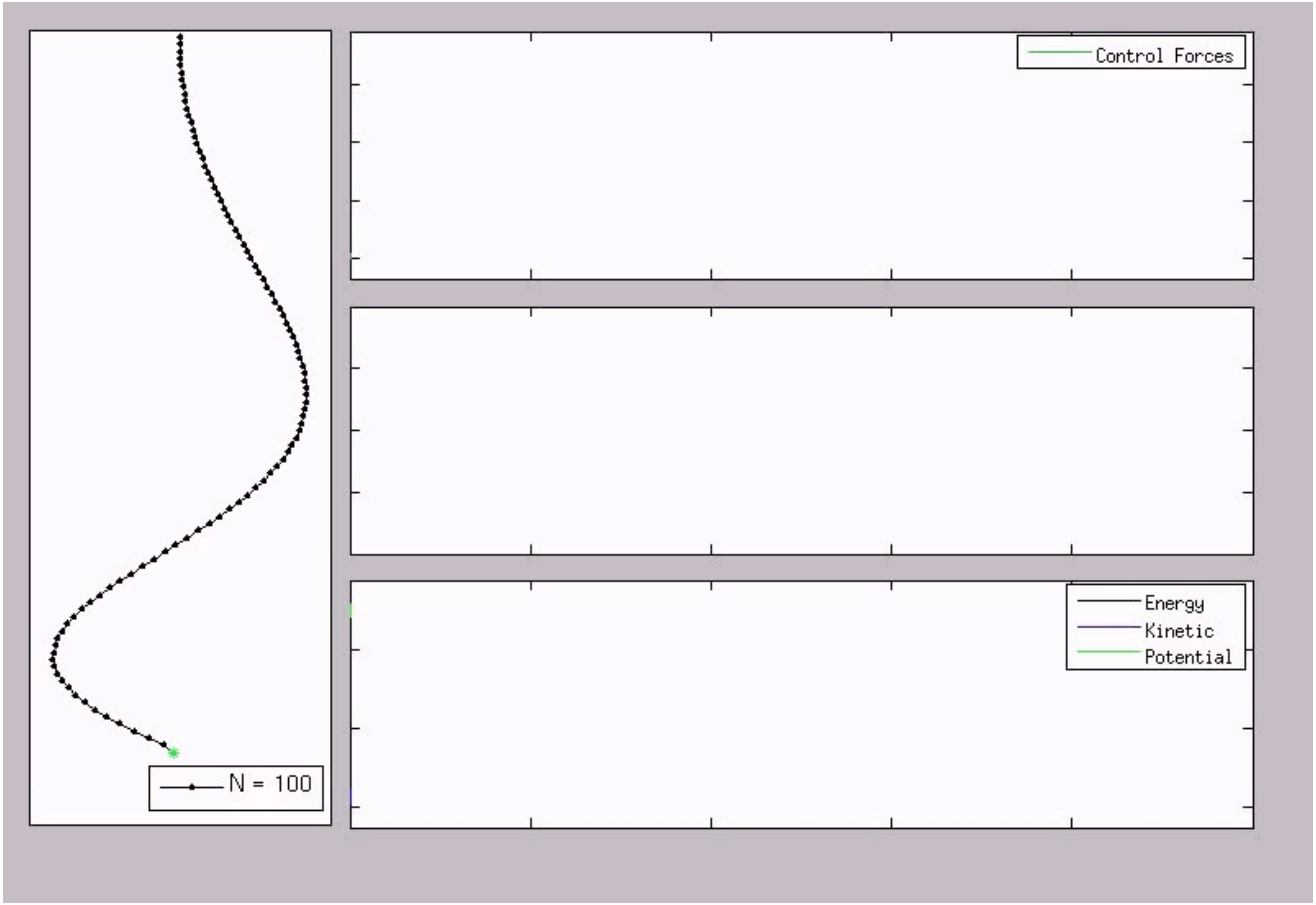
Примеры: N=25, многомерная помеха

Примеры: N=25, многомерная помеха



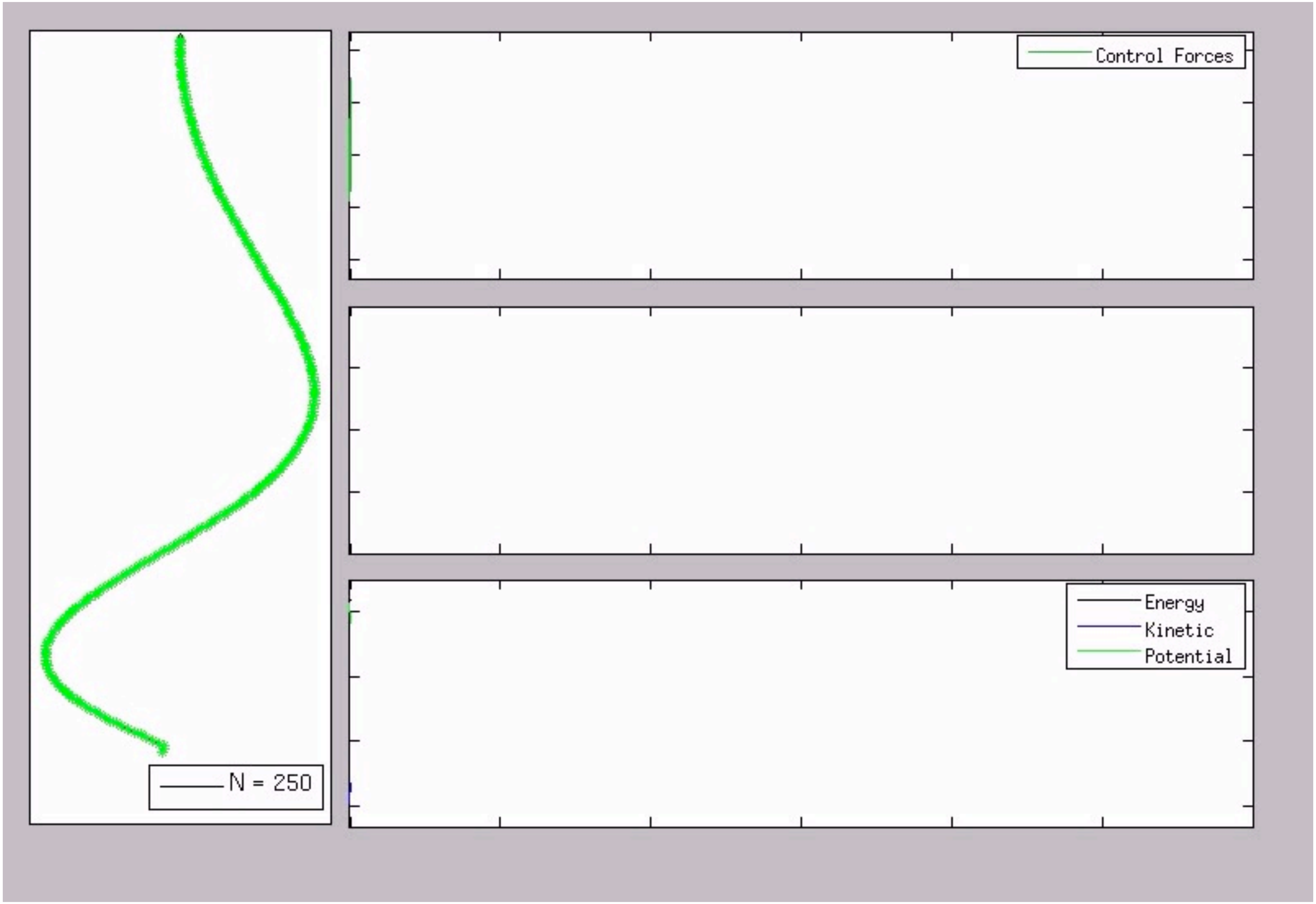
Примеры: N=100, скалярное управление

Примеры: N=100, скалярное управление



Примеры: N=250 (n=500)

Примеры: N=250 (n=500)



Публикации

- Доклады РАН. Т. 446, № 6, 2012.
- Журнал вычислительной математики и математической физики. № 1, 2013.
- IEEE Conference on Decision and Control (CDC) 2012.

Спасибо за внимание!