О СИНТЕЗЕ ЦЕЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ В КЛАССЕ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ[1]

А. Б. Куржанский, А. Н. Дарьин
(Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия)

Рассматривается задача управления системой, описываемой линейными уравнениями в распределениях (обобщённых функциях) при выпуклых фазовых ограничениях на решения. Необходимо найти синтезирующие стратегии управления, приводящие систему на заданное выпуклое терминальное множество, подчиняясь при этом указанным фазовым ограничениям. Рассмотрены уравнения в распределениях высших порядков, допускающие воздействия в виде высших производных δ -функций. Задача решается в рамках метода динамического программирования. Отдельно разобран случай одномерной системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение в распределениях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}. \qquad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}^r$ – вектор управления, $A(t)$ и $B(t)$ – матрицы соответствующих размерностей, элементы которых k раз дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$. Управления $u(t)$ ищутся в классе распределений порядка сингулярности $k+1$ – линейных непрерывных функционалов над линейным нормированным пространством $D_k^{(r)}[\alpha,\beta]$ k раз дифференцируемых функций со значениями в $\mathbb{R}^r$ с носителями из промежутка $[\alpha,\beta]$. «Начальное» и «конечное» распределения $f^{(\alpha)}$, $f^{(\beta)}$ сосредоточены соответст-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-01-00589-а, 09-01-90431-Укр_ф_а).

венно в точках t_α, t_β. Решение уравнения (1) – распределение $x(t)$ из $D_{k-1}^{(n)*}[\alpha,\beta]$, удовлетворяющие равенству (1).

Опишем фазовые ограничения. Пусть $f_+(t) = f(t)\chi(t)$, где $\chi(t)$ – функция Хевисайда; $\zeta^{(-1)}(t) = \delta(t)$; $\zeta^{(l)}(t) = t^l / l!$ при $l \geq 0$. Обозначим

$$z(t) = \left(x * \zeta_+^{(l)}\right)(t) = \int_{t_\alpha}^{t} \zeta^{(l)}(t-\tau)x(\tau)d\tau .$$

Далее предполагаем, что $l = k-1$, тогда $z(t)$ – обычная функция. Пусть $Q(t)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение с непустыми замкнутыми выпуклыми значениями в $\mathbb{R}^n$. Потребуем выполнения фазового ограничения

$$z(t) \in Q(t), \quad t \in [t_\alpha, t_\beta]. \tag{2}$$

Опишем краевые условия. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданная начальная точка; заданное терминальное множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ – непустой выпуклый компакт. Представим распределения $f^{(a)}$, $f^{(\beta)}$ в виде $f^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{k-1} x_\alpha^{(j)}\delta^{(j)}(t-t_\alpha)$, $f^{(\beta)} = \sum_{j=0}^{k-1} x_\beta^{(j)}\delta^{(j)}(t-t_\beta)$. Потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=0}^{k-1} L^{(j)}(t_\alpha)x_\alpha^{(j)} = x_0, \quad \sum_{j=0}^{k-1} L^{(j)}(t_\beta)x_\beta^{(j)} \in M. \tag{3}$$

Здесь $L^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матричные функции, определяемые соотношениями $L^{(0)}(t) = I$, $L^{(j)}(t) = -A(t)L^{(j-1)}(t) + dL^{(j-1)}(t) / dt$.

Определение. Распределение $u(t)$ будем называть допустимым управлением, если для него существуют распределения $f^{(a)}$, $f^{(\beta)}$, удовлетворяющие соотношениям (3), для которых существует решение уравнения (1), сосредоточенное на отрезке $[t_\alpha, t_\beta]$ и удовлетворяющее фазовому ограничению (2).

На множество допустимых управлений рассмотрим функционал, равный норме управления: $J(u) = \|u\|_{D_k^{(r)}[\alpha,\beta]}$.

Задача. Найти управление в форме обратной связи, порождающее допустимые управления, минимизирующие значение функционала $J(u)$.

Возможные способы формализации обратной связи для подобного типа задач описаны в статье [4].

2. СВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Следуя [3], сведём поставленную задачу к задаче импульсного управления с фазовыми ограничениями, то есть к системе порядка сингулярности $k = 1$. Эквивалентная задача записывается в виде

$$dx = A(t)x\,dt + \mathbf{B}(t)dU(t), \quad x(t_\alpha) = x_0, \tag{4}$$

где $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} L^{(0)}(t) & L^{(1)}(t) & \cdots & L^{(k)}(t) \end{bmatrix}$, $U(t)$ – функция ограниченной вариации со значениями в $\mathbb{R}^{(k+1)r}$. Фазовое ограничение принимает вид (мы считаем, что все функции ограниченной вариации непрерывны слева)

$$x(t+0) \in Q(t), \tag{5}$$

начальное и терминальное –

$$x(t_\alpha) = x_0, \quad x(t_\beta + 0) \in M, \tag{6}$$

функционал заменяется на полную вариацию управления:

$$J(U(\cdot)) = \mathrm{Var}\,U(\cdot). \tag{7}$$

3. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Определим функцию цены $V(t_\beta, x_0)$ как минимальное значение функционала (7) при ограничениях (4)–(6).

Для вывода уравнения динамического программирования воспользуемся расширенной пространственно-временной системой

$$\begin{cases} dx / ds = A(t(s))x(s) \cdot u^t(s) + \mathbf{B}(t(s))u^x(s), \\ dt / ds = u^t(s). \end{cases} \tag{8}$$

Переменная s параметризует траектории переменных x и t, $s \in [0, S]$, правый конец S не закреплён. На расширенное управление $u(s) = (u^x(s), u^t(s)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ наложено геометрическое ограничение $u(s) \in B_1 \times [0,1]$. Минимизируемый функционал принимает вид

$$J(u(\cdot)) = \int_0^S \left\| u^x(s) \right\| ds, \tag{9}$$

фазовое ограничение –

$$(t(s), x(s)) \in \operatorname{graph}_{[t_\alpha, t_\beta]} Q(\cdot) = \bigcup_{t \in [t_\alpha, t_\beta]} \{t\} \times Q(t), \tag{10}$$

добавляется дополнительное краевое условие $t(S) = t_\beta$.

Известно [6], что любое импульсное управление и соответствующая ему траектория системы (4) могут быть представлены как регулярное управление и непрерывная траектория расширенной системы (8), и что множество траекторий системы (4) всюду плотно во множестве траекторий (8).

Пусть $V(t,x) < \infty$. Определим множество допустимых векторов управления в состоянии (t,x):

$$U(t,x) = \left\{ (u^x, u^t) \middle| \left(u^t, A(t)x \cdot u^t + \mathbf{B}(t) u^x \right) \in T_{(t,x)} \operatorname{graph}_{[t, t_\beta]} Q(\cdot) \right\}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана запишется тогда в виде

$$\min_{(u^x, u^t) \in U(t,x)} H\left(t, x, V_t, V_x, u^t, u^x\right) = 0, \tag{11}$$

$$H = \left[V_t + \left\langle V_x, A(t)x \right\rangle \right] u^t + \left[\left\langle V_x, \mathbf{B}(t) u^x \right\rangle + \left\| u^x \right\| \right].$$

Во внутренних точках (t,x) эффективного множества функции цены $\left\{ (t,x) \middle| V(t,x) < \infty \right\}$ имеем $U(t,x) = B_1 \times [0,1]$ и уравнение (11) превращается в известное вариационное неравенство

$$\min\left\{ H_1(t, x, V_t, V_x), H_2(t, x, V_x) \right\} = 0,$$

$$H_1 = V_t + \left\langle V_x, A(t)x \right\rangle,$$

$$H_2 = \min_{u \in B_1} \left\{ \left\langle V_x, \mathbf{B}(t) u \right\rangle + \left\| u \right\| \right\} = 1 - \left\| \mathbf{B}^T(t) V_x \right\|.$$

Далее определим синтез управлений как множество минимизаторов в уравнении (11):

$$\mathbf{U}^*(t,x) = \bigcup_{(\tau,\xi) \in \partial_C V} \left\{ u \in U(t,x) \middle| H\left(t, x, \tau, \xi, u^t, u^x\right) = 0 \right\}. \tag{12}$$

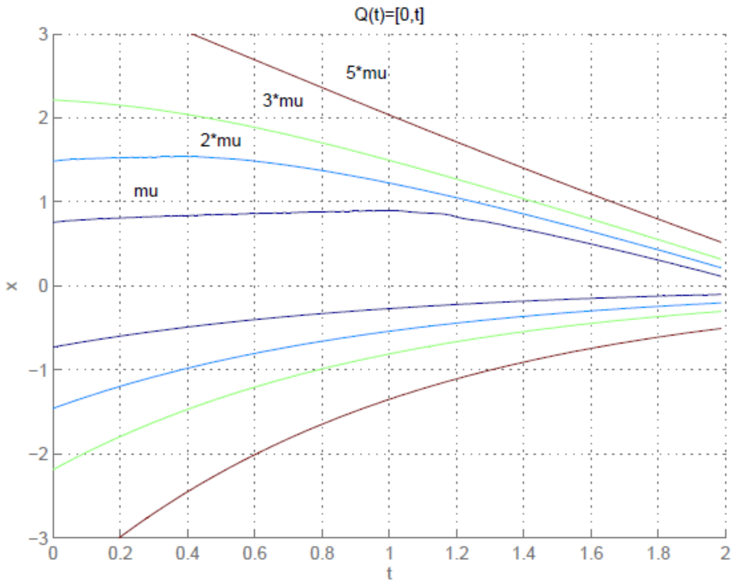
Здесь $\partial_C V$ – дифференциал Кларка функции цены по обеим переменным. После подстановки управления (12) система принимает вид дифференциального включения

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} A(t)x & \mathbf{B}(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \,\middle|\, u \in \mathbf{U}^*(t,x) \right\}.$$

4. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу с одномерным фазовым пространством. Если фазовое ограничение задано в конечном числе моментов времени, то можно показать, что сопряжённая по Фенхелю к функции цены $V(t,x)$ (по переменной x) является кусочно-линейной, что позволяет эффективно находить функцию цены численным образом.

На графике изображены линии уровня функции цены для задачи с параметрами $t \in [0,2]$, $b(t) = e^t$, $Q(t) = [0,t]$.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Красовский. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. А. Б. Куржанский. Оптимальные системы с импульсными управлениями // Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. С. 131-156.

3. А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов. К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360-1370.
4. A. B. Kuzhanski, A. N. Daryin. Dynamic Programming for Impulse Controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. N. 2. P. 213-227.
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщённые функции. Т. 1. Обобщённые функции и действия над ними. Т. 2. Пространства основных и обобщённых функций. М.: Физматгиз, 1957, 1958.
6. M. Motta, F. Rampazzo. Space-time trajectories of nonlinear systems driven by ordinary and impulsive controls // Differential and integral equations. 1995. V. 8. P. 269-288.