Инвариантные множества семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями

В.М. Кунцевич
Институт космических исследований НАН и НКА Украины

Содержание доклада

1. Введение
2. Уравнения эволюции семейств дискретных систем
3. Достаточные условия робастной устойчивости нелинейных дискретных систем
4. Определение инвариантных множеств
5. Заключение

1. Введение

Инвариантные множества семейств линейных и квазилинейных систем

$$\overset{\circ}{X} = AX + Z; \qquad Z \in \mathbf{Z} \qquad \text{(В.А. Булгаков, 1946)}$$

$$X_{n+1} = \overline{A} X_n + Z_n; \qquad Z_n \in \mathbf{Z} \qquad \text{(В.М. Кунцевич, Б.Н. Пшеничный, 1996)}$$

$$A \in \mathbf{A} \qquad \text{(Б.Т. Поляк, 2007)}$$

$$X_{n+1} = F(X_n, n) + Z_n = A(X_n, n) X_n + Z_n \qquad \text{(В.М. Кунцевич, Б.Т. Поляк, 2009)}$$

$$\mathbf{R}(\overset{*}{\mathbf{X}}) = 0.5 \max_{X, Y \in \overset{*}{\mathbf{X}}} \| X - Y \|$$

2. Уравнения эволюции систем

$$X_{n+1} = F(X_n, L_n) + Z_n; \qquad (1) \qquad\qquad Z_n \in \mathbf{Z} = \{Z : \|Z\|_{II} \le \Delta\} \qquad (2)$$

$$L_n \in \mathbf{L} \qquad (3); \qquad\qquad X_n \in \mathbf{X}_n = \underset{s=\overline{1;2^m}}{conv}\{X^s\} \qquad (4)$$

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = G(\mathbf{X}_n) + \mathbf{Z}, \qquad (5)$$

где

$$G(\mathbf{X}_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ L_n \in \mathbf{L}}} F(X_n, L_n) + \mathbf{Z} \qquad (6)$$

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n) + \mathbf{Z}, \qquad (7)$$

$$\overline{G}(\mathbf{X}_n) = \overline{g}_1(\mathbf{X}_n) \times \ldots \times \overline{g}_1(\mathbf{X}_n) \qquad (8)$$

$$F(X_n, L_n) = \left\| f_i[X_n, L_i(n) \right\|_{i=1}^{m} \tag{9}$$

$$\bar{g}_i(\mathbf{X}_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ L_i(n) \in \mathbf{L}_i}} f_i[X_n, L_i(n)] \tag{10}$$

$$L_i(n) \in \mathbf{L}_i \; \underset{p=\overline{1;P_i}}{conv} \left\{ L_i^p \right\} \tag{11}$$

$$\min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ L_i(n) \in \mathbf{L}_i}} (f_i[X_n, L_i(n)) = \underline{x}_{i,n+1};$$

$$\max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ L_i(n) \in \mathbf{L}_i}} (f_i[X_n, L_i(n)) = \bar{x}_{i,n+1}; \quad i = \overline{1;m} \tag{12}$$

$$\mathbf{x}_{i,n+1} = \bar{g}_i(\mathbf{X}_n) = \left\{ x_{i,n+1} : \underline{x}_{i,n+1} \le x_{i,n+1} \le \bar{x}_{i,n+1} \right\} \qquad i = \overline{1;m} \tag{13}$$

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \mathbf{x}_{1,n+1} \times \mathbf{x}_{2,n+1} \times \ldots \times \mathbf{x}_{m,n+1}. \tag{14}$$

а) линейные системы

$$X_{n+1} = A(n)X_n + Z_n, \tag{15}$$

$$A_i^T(n) \in \mathbf{A}_i = \underset{i=\overline{1;\,K_i}}{\mathrm{conv}}\{A_i^k\}, \quad i = \overline{1;m} \tag{16}$$

$$\min_{\substack{s=\overline{1;\,2^m} \\ k=\overline{1;\,K_i}}} \left\|(A_i^k)^T X^s\right\| = \underline{x}_{i,n+1} \tag{17}$$

$$\max_{\substack{s=\overline{1;\,2^m} \\ k=\overline{1;\,K_i}}} \left\|(A_i^k)^T X^s\right\| = \overline{x}_{i,n+1} \tag{18}$$

$$i = \overline{1;m}$$

невозмущенная линейная система

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n) \tag{19}$$

достаточные условия устойчивости системы (19)

$$\max_{A_i(n)\in\mathbf{A}_i} \left\|A_i(n)\right\| \le q < 1 \ ; i = \overline{1;m} \tag{20}$$

б) нелинейные системы

1. нелинейные функции скалярного аргумента

$$\underline{k}x^2 \le xf(x) \le \bar{k}x^2; \quad 0 \le \underline{k} < \bar{k}\,; \quad \underline{k}x\,sign(x) \le f(x) \le \bar{k}x\,sign(x) \qquad (19)$$

$$sign\, f(x) = sign(x) \qquad (20)$$

2. системы с нелинейными функциями векторного аргумента

$$\underline{k}\|X\| \le f(X) \le \bar{k}\|X\| \text{ при } X \in \mathbf{X}^+; -\underline{k}\|X\| \ge f(X) \ge -\bar{k}\|X\| \text{ при } X \in \mathbf{X}^- \qquad (21)$$

$$\mathbf{X}^+ \bigcup \mathbf{X}^- = \mathbf{R}^m; \qquad \overset{\circ}{\mathbf{X}}{}^+ = \overset{\circ}{\mathbf{X}} \bigcap \mathbf{X}^+; \qquad \overset{\circ}{\mathbf{X}}{}^- = \overset{\circ}{\mathbf{X}} \bigcap \mathbf{X}^- \qquad (22)$$

$$\min_{\substack{X \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}{}^+ \\ k_i \in \chi_i}} \{k_i\|x\|\} = \underline{x}_{i,n+1}; \quad \max_{\substack{X \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}{}^+ \\ k_i \in \chi_i}} \{k_i\|x\|\} = \underline{x}_{i,n+1}; \qquad i = \overline{1;m} \qquad (23)$$

$$\chi_i = \{k : \underline{k}_i \le k_i \le \bar{k}_i\}.$$

невозмущенная нелинейная система

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n); \qquad (23)$$

$$\mathbf{X}_n = \overset{\circ}{\mathbf{X}} \qquad (24)$$

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n) \in \mathbf{X}_n \qquad (25)$$

$$\mathbf{R}\left[\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n)\right] < \mathbf{R}(\mathbf{X}_n) \qquad (26)$$

3. Инвариантные множества

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n) + \mathbf{Z}\,. \tag{7}$$

Принняв $\mathbf{X}_n = \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overset{*}{\mathbf{X}}$, получим

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \overline{G}(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z}. \tag{27}$$

Для линейного преобразования $\overline{G}(\overset{*}{\mathbf{X}})$ справедливо равенство

$$\overline{G}(k\overset{*}{\mathbf{X}}) = k\overline{G}(\overset{*}{\mathbf{X}})\,. \tag{28}$$

Задавшись начальным приближением $\overset{*}{\mathbf{X}}_0$ в виде единичного m-мерного куба, находим множество $\overline{G}(\overset{*}{\mathbf{X}}_0)$ и в силу (27) определяем $\mathbf{Z}_0$ как дополнение к множеству $\overline{G}(\overset{*}{\mathbf{X}}_0)$ относительно множества $\overset{*}{\mathbf{X}}_0$

$$\mathbf{Z}_0 = \overset{*}{\mathbf{X}}_0 \setminus \overline{G'}(\overset{*}{\mathbf{X}}_0)\text{. (рис.1)} \tag{29}$$

Из (29) находим Δ_0 и, если $\Delta_0 \neq \Delta$, то принимаем $\overset{*}{\mathbf{X}}_1 = \Delta / \Delta_0 \overset{*}{\mathbf{X}}_0$ и тогда $\overset{*}{\mathbf{X}}_1$ есть искомое $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

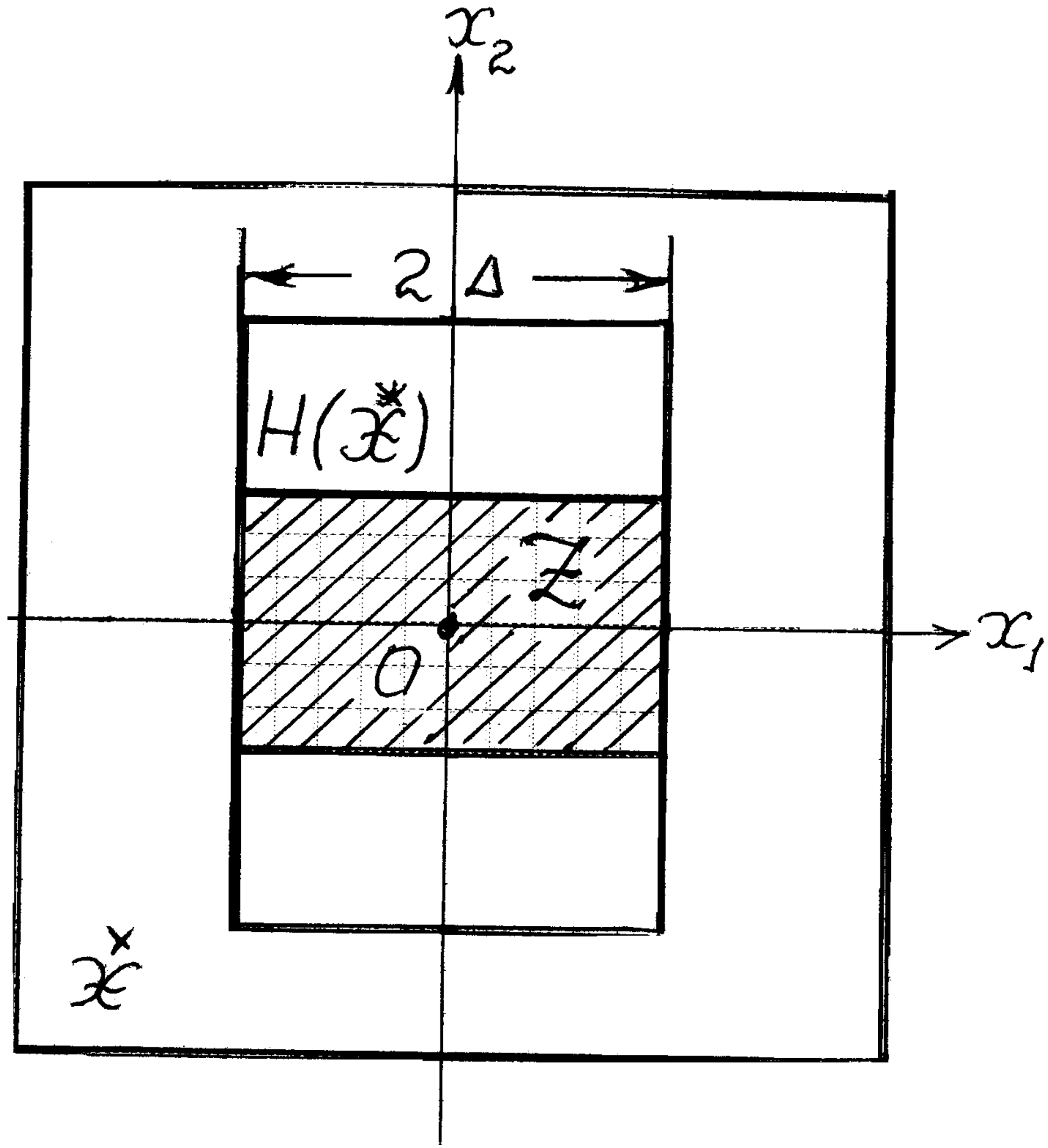

Рис. 1

Спасибо за внимание!