

Численный алгоритм синтеза импульсных управлений при неопределенности *

© 2013 г. А. Н. Дарьин, Ю. Ю. Минаева
Москва, МГУ

Поступила в редакцию 16.07.12 г., после доработки поступила 15.10.12 г.

Описывается численный алгоритм синтеза управлений в задаче импульсного управления линейной системой при наличии неизвестной ограниченной помехи, основанный на представлении функции цены методами выпуклого анализа через сопряженную функцию и последующей аппроксимации сопряженной функции кусочно-аффинными выпуклыми функциями.

Введение. Задачи поиска оптимальных управлений в виде синтеза являются актуальными проблемами современной теории управления. Если в качестве критерия оптимальности рассматривать полную вариацию управляющего воздействия, то решение достигается на так называемых импульсных управлениях, которые являются обобщенными функциями [1, 2]. Иными словами, в качестве управлений допускается использование комбинаций дельта-функций.

Задачи поиска программного управления в системах с импульсными управлениями довольно хорошо изучены [3, 4]. В основополагающей работе [5] получен результат, заключающийся в том, что вполне управляемая линейная система может быть переведена из одного состояния в любое другое не более чем за n ударов, использующих дельта-функции, где n — размерность системы. Если же управления могут допускать, помимо самой дельта-функции, ее производные до $(n - 1)$ -го порядка, то задача перевода системы из одного состояния в другое может быть решена за нулевое время [6].

Синтез управления в задачах импульсного управления может быть получен с помощью метода динамического программирования как без неопределенности [7, 8], так и при наличии помехи [9, 10], путем введения функции цены, которая удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана (Hamilton–Jacobi–Bellman). При этом для определения синтеза управления необходимо вычислить функцию цены, что можно сделать аналитически лишь для очень ограниченного класса задач. Вследствие этого используются различные методы численной аппроксимации функции цены и множества достижимости. Для задач с ограниченным управлением может быть использован метод эллипсоидального исчисления [11]. Для задач с импульсным управлением без помех был предложен численный алгоритм построения синтеза управления, основанный на аппроксимации множества достижимости многогранниками [12].

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-2239.2012.1) и РФФИ (грант № 12-01-31416-мол-а).

В настоящей работе для линейной системы с импульсным управлением и неизвестной ограниченной помехой рассматривается задача минимизации вариации управляющего воздействия. Целью статьи является разработка численного алгоритма поиска синтеза управления, основанного на определении верхних оценок минимаксной функции цены в задаче с коррекциями. Указан способ построения нижней оценки функции цены, позволяющий получить внутреннюю оценку множества достижимости и вычислять управление в форме синтеза. Сопряженные функции по Юнгу-Фенхелю [13] к минимаксной и максиминной функциям цены можно представить в виде суперпозиции двух операций, примененных к терминальному слагаемому функционала задачи: выпуклой оболочки разности выпуклых функций и прибавления индикаторной функции. Показано, что указанные операции могут быть эффективно вычислены в классе кусочно-аффинных выпуклых функций. Аппроксимация функции цены в исходной задаче строится как альтернированная последовательность таких операций, соответствующая некоторому разбиению отрезка времени. Указан способ вычисления синтеза управления по оценке функции цены.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейная управляемая система с импульсным управлением

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t) + C(t)v(t)dt, \quad x(t_0) = x^0. \quad (1.1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, управление $U(t) \in BV([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ — m -векторная функция ограниченной вариации, помеха $v(t) \in \mathbb{R}^q$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Под вариацией $U(\cdot)$ будем понимать

$$\text{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) = \sup_N \sup_{\{\tau_k\}} \sum_{k=1}^N \gamma^*(U(\tau_k) - U(\tau_{k-1})),$$

где внутренний супремум берется по всем разбиениям $\{\tau_k\}_{k=1}^N$ отрезка $[t_0, t_1]$. Здесь γ^* — сопряженная норма к норме γ , которую можно определить различными способами, например как

$$\gamma(U) = \sum_{1 \leq i \leq m} |U_i|$$

или как евклидову норму

$$\gamma(U) = \left(\sum_{1 \leq i \leq m} U_i^2 \right)^{1/2}.$$

Будем считать функции ограниченной вариации непрерывными слева. Помеху $v(\cdot)$ рассмотрим из класса функций L_∞ , т. е. измеримых, почти всюду ограниченных функций с дополнительным поточечным ограничением $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, где $\mathcal{Q}(t)$ — непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^q$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Мнозначное отображение $\mathcal{Q}(t)$ полунепрерывно сверху в метрике Хаусдорфа.

Запишем формулу Коши для системы (1.1):

$$x(t+0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t+0} X(t, \tau)B(\tau)dU(\tau) + \int_{t_0}^t X(t, \tau)C(\tau)v(\tau)d\tau. \quad (1.2)$$

Под решением системы (1.1) будем понимать функцию ограниченной вариации $x(t)$, почти всюду удовлетворяющую интегральному уравнению (1.2), в котором интеграл от помехи понимается в смысле интеграла Лебега, а интеграл по управлению — в смысле интеграла Лебега-Стилтьеса [14].

Рассмотрим задачу в классе управлений с обратной связью, т. е. управлений в виде синтеза. Синтез управления в системе (1.1) обозначим через $\mathcal{U}$. Определение синтеза для систем с импульсными управлениями дается в работах [10, 15].

З а д а ч а 1. Для системы (1.1) минимизировать функционал $J(\mathcal{U})$:

$$J(\mathcal{U}) = \max_{v(\cdot) \in \mathcal{Q}(\cdot)} \{ \text{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \} \rightarrow \min, \quad (1.3)$$

где $U(\cdot)$ — траектория управления, порождаемая синтезом $\mathcal{U}$ и помехой $v(\cdot)$. Здесь терминальное слагаемое $\varphi(\cdot)$ — собственная, выпуклая, замкнутая, ограниченная снизу функция.

Сделаем замену в системе (1.1) так, чтобы после замены в полученной системе слагаемое с матрицей A стало нулевым:

$$\tilde{x}(t) = X(t_1, t)x(t), \quad (1.4)$$

где $X(t_1, t)$ — фундаментальная матрица системы (1.1). При подстановке в уравнение получаем систему для $\tilde{x}(t)$:

$$d\tilde{x}(t) = \tilde{B}(t)d\tilde{U}(t) + \tilde{C}(t)v(t)dt, \quad \tilde{x}(t_0) = X(t_1, t_0)x^0 = \tilde{x}^0,$$

где $\tilde{B}(t) = X(t_1, t)B(t)$, $\tilde{C}(t) = X(t_1, t)C(t)$. При этом функционал J остается прежним, поскольку $\tilde{x}(t_1+0) = x(t_1+0)$. Далее рассмотрим задачу с нулевой динамикой, а вместо $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{x}^0$ будем писать B , C , x_0 . Таким образом, решим следующую задачу.

З а д а ч а 2. Для системы

$$dx(t) = B(t)dU(t) + C(t)v(t)dt, \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.5)$$

минимизировать функционал $J(\mathcal{U})$ (1.3).

2. Аппроксимации минимаксной и максиминной функций цены. Для системы с нулевой динамикой (1.5) введем минимаксную и максиминную функции цены соответственно:

$$V(t, x) = \min_{U(\cdot)} \max_{v(\cdot)} [\text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \mid x(t) = x], \quad (2.1)$$

$$W(t, x) = \max_{v(\cdot)} \min_{U(\cdot)} [\text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \mid x(t) = x]. \quad (2.2)$$

Можно показать [9, 15], что минимаксная $V(t, x)$ и максиминная $W(t, x)$ функции цены выпуклы по x , и сопряженные к ним функции равны

$$V^*(t, p) = \text{conv} \{ \varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \} + \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]), \quad (2.3)$$

$$W^*(t, p) = \text{conv} \{ \varphi^*(p) + \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \}, \quad (2.4)$$

где опорная функция $\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$ строится ко множеству

$$\mathbb{Q}(t, t_1) = \int_t^{t_1} C(\tau) \mathcal{Q}(\tau) d\tau,$$

шар $\mathcal{B}_V[t, t_1]$ состоит из всех $p \in \mathbb{R}^n$, для которых $\max_{\tau \in [t, t_1]} \gamma(B^T(\tau)p) \leq 1$, а индикаторная функция $\mathcal{I}(p \mid \mathcal{A})$ определяется как

$$\mathcal{I}(p \mid \mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \in \mathcal{A}, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Под сопряженной функцией $f^*(p)$ к функции $f(x)$ понимается сопряжение по Юнгу–Фенхелю [13] $f^*(p) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - f(x) \}$. Операция $\text{conv } f(x)$ обозначает взятие выпуклой оболочки функции — наибольшую выпуклую функцию, не превосходящую $f(x)$ [16]. По свойству минимакса очевидно, что $W(t, x) \leq V(t, x)$. Для сопряженных функций выполняется обратное неравенство: $V^*(t, p) \leq W^*(t, p)$.

Опираясь на выражения (2.3) и (2.4), введем операторы S и T , действующие по правилам:

$$\begin{aligned} S\varphi^*(\cdot) &= \text{conv} \{ \varphi^*(\cdot) - \rho(\cdot \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \}, \\ T\psi^*(\cdot) &= \psi^*(\cdot) + \mathcal{I}(\cdot \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда сопряженные функции к V и W можно представить в виде

$$V^* = TS\varphi^*, \quad W^* = ST\psi^*. \quad (2.6)$$

З а м е ч а н и е 1. В правой части выражения (2.5) есть зависимость от t и t_1 . Для явного указания зависимости операторов от времени там, где это важно, будем использовать расширенную запись: $S^{[t, t_1]}\varphi^*(\cdot)$ и $T^{[t, t_1]}\psi^*(\cdot)$.

Найти аналитическое выражение для сопряженных функций V^* и W^* представляется возможным только для ограниченного класса задач. В следующих разделах построены верхние и нижние численные оценки этих функций.

2.1. К л а с с ф у н к ц и й $\mathcal{F}$. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^I$ — конечный набор из I точек $p_i \in \mathbb{R}^n$, причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, и $\{f_i\}_{i=1}^I$ — заданный набор вещественных чисел.

О п р е д е л е н и е. Функцией класса $\mathcal{F}$, отвечающей набору параметров $\{p_i, f_i\}_{i=1}^I$, называется наибольшая выпуклая функция $f(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \text{dom } f = \text{conv}\{p_i\}_{i=1}^I, \\ f(p_i) \leq f_i \quad i = \overline{1, I}. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 2. Каждая функция $f \in \mathcal{F}$ является кусочно-аффинной выпуклой функцией, которая задается однозначно набором параметров $\{p_i, f_i\}$. При этом одна и та же функция может быть определена, вообще говоря, различными наборами параметров.

Укажем одно важное свойство кусочно-аффинной выпуклой функции $f \in \mathcal{F}$. Возьмем число D , такое, что $\max\{f_i\} < D < \infty$. Тогда пересечение надграфика функции $f(p)$ с полупространством значений, не превосходящих D , т. е. $\text{epi}(f) \cap \{f(p) \leq D\}$, будет выпуклым многогранником в $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.2. О п е р а т о р S . Рассмотрим оператор S из (2.5):

$$S\varphi^*(p) = \text{conv}\{\varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1))\}.$$

Т е о р е м а 1. Пусть функция φ^* принадлежит классу $\mathcal{F}$ с параметрами $\{p_i, \varphi_i^*\}$.

1. Тогда $S\varphi^* \in \mathcal{F}$ с параметрами $\{p_{ik}, \psi_{ik}^*\}$, где

$$\begin{cases} \{p_{ik}\} \subseteq \{p_i\}, \\ \psi_{ik}^* = \varphi_{ik}^* - \rho(p_{ik} \mid \mathbb{Q}(t, t_1)). \end{cases} \quad (2.7)$$

2. Кроме того, если две функции $\varphi_1^* \in \mathcal{F}$, $\varphi_2^* \in \mathcal{F}$ и $\varphi_1^*(p) \leq \varphi_2^*(p)$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$, тогда выполняется $S\varphi_1^*(p) \leq S\varphi_2^*(p)$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Обозначим $f_1(p) = \varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$. Заметим, что $\text{dom } f_1(p) = \text{dom } \varphi^*(p)$. Разобьем множество $\text{dom } f_1(p)$ на симплексы, на каждом из которых функция $\varphi^*(p)$ является аффинной. Это можно сделать, поскольку $\varphi^*(p) \in \mathcal{F}$. Тогда на каждом симплексе $f_1(p)$ — это разность аффинной функции $\varphi^*(p)$ и выпуклой функции $\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$.

Введем функцию $f_2(p)$, представляющую собой аффинную функцию, принимающую в вершинах рассматриваемых симплексов такие же значения, что и $f_1(p)$, т. е. $f_2(p_i) = \varphi^*(p_i) - \rho_i$, где $\rho_i = \rho(p_i \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$. Тогда $f_2(p) \leq f_1(p)$ для всех $p \in \text{dom } f_1$. Функция $f_2(p)$, вообще говоря, не выпукла. Возьмем $f_3(p) = \text{conv } f_2(p)$. По свойству выпуклой оболочки функций, f_3 — наибольшая выпуклая функция, не превосходящая f_2 . Из построения следует, что $f_3(p) = \text{conv } f_1(p) = S\varphi^*(p)$.

Рассмотрим построение выпуклой оболочки. Поскольку f_2 — кусочно-аффинная функция, существует D , такое, что $\max_i \{\varphi^*(p_i) - \rho_i\} < D < \infty$, и множество $\mathcal{D} =$

$\text{epi } f_2 \cap \{f_2(p) \leq D\}$ будет многогранником в $\mathbb{R}^{n+1}$. Воспользуемся тем, что надграфик выпуклой оболочки функции совпадает с выпуклой оболочкой надграфика функции:

$$\text{epi}(\text{conv } f_2) = \text{conv}(\text{epi } f_2).$$

Тогда построение $S\varphi^*(p)$, т. е. выпуклой оболочки разности функций, сводится к построению выпуклой оболочки множества $\mathcal{D}$, которое может быть выполнено при помощи алгоритма QuickHull [17]. После построения выпуклой оболочки множества $\mathcal{D}$ часть точек из множества $\{p_i\}$ может быть отброшена, новые точки не добавляются. Из получившегося выпуклого многогранника можно однозначно восстановить функцию $S\varphi^*(p) = \text{conv } f_2(p)$. По построению, $S\varphi^* \in \mathcal{F}$ с параметрами (2.7).

Второе утверждение теоремы следует из свойств выпуклой оболочки функций.

2.3. О п е р а т о р T . Рассмотрим оператор T из (2.5):

$$T\psi^*(p) = \psi^*(p) + \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]).$$

Т е о р е м а 2. Пусть функция ψ^* принадлежит классу $\mathcal{F}$ с параметрами $\{p_j, \psi_j^*\}$.

1. Тогда существуют операторы T_- , T_+ , такие, что $T_- \psi^*(p) \leq T\psi^*(p) \leq T_+ \psi^*(p)$ для всех p , функции $T_- \psi^*$, $T_+ \psi^* \in \mathcal{F}$ с параметрами $\{p_{\nu-}, \varphi_{\nu-}^*\}$ и $\{p_{\nu+}, \varphi_{\nu+}^*\}$, которые определяются из исходных параметров $\{p_j, \psi_j^*\}$ и вида оператора T , а именно,

$$\begin{cases} \{p_{\nu-}\} \subseteq \{p_j^{(1)}\} \cup \{p_{j-}^{(2)}\}, \\ \{p_{\nu+}\} \subseteq \{p_j^{(1)}\} \cup \{p_{j+}^{(2)}\}, \\ \{p_j^{(1)}\} = \{p_j \in \text{dom } \psi^*(p) \cap \mathcal{B}_V[t, t_1]\} \\ \{p_{j-}^{(2)}\} \in \Gamma_+, \\ \{p_{j+}^{(2)}\} \in \Gamma_-, \\ \varphi_{\nu-/+}^* = \psi_{\nu}^*, \text{ если } \nu \in \{j^{(1)}\}, \\ \varphi_{\nu-/+}^* = \psi^*(p_{\nu}), \text{ если } \nu \in \{j_-^{(2)}\} \text{ или } \nu \in \{j_+^{(2)}\}, \end{cases}$$

где поверхность Γ_- — это часть границы $\partial \mathcal{B}_V[t, t_1]$, проходящая по области $\text{dom } \psi^*(p)$, а Γ_+ — многогранная поверхность, состоящая из касательных гиперплоскостей к Γ_- .

2. Кроме того, если две функции $\psi_1^* \in \mathcal{F}$, $\psi_2^* \in \mathcal{F}$ и $\psi_1^*(p) \leq \psi_2^*(p)$, для всех $p \in \mathbb{R}^n$ то $T_- \psi_1^*(p) \leq T_- \psi_2^*(p)$, $T_+ \psi_1^*(p) \leq T_+ \psi_2^*(p)$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Прибавление индикаторной функции может изменить область определения исходной функции:

$$\text{dom } T\psi^*(p) = \text{dom } \psi^*(p) \cap \mathcal{B}_V[t, t_1].$$

При прибавлении индикаторной функции часть точек $\{p_j\}$ может не попасть в $\mathcal{B}_V[t, t_1]$. Эти точки будут отброшены.

Возьмем часть границы $\partial \mathcal{B}_V[t, t_1]$, проходящую по области $\text{dom } \psi^*(p)$ (рис. 1). Обозначим ее Γ_- . Рассмотрим некоторый набор точек, лежащих на Γ_- , и обозначим его

как $\{p_{j+}^{(2)}\}$. На рисунке они обозначены кружками вдоль границы. В этих точках проведем опорные гиперплоскости ко множеству $\mathcal{B}_V[t, t_1]$. Они будут проходить снаружи этого множества, поскольку множество $\mathcal{B}_V[t, t_1]$ выпукло. Аппроксимируем границу Γ_- касательной многогранной поверхностью Γ_+ , образуемой этими гиперплоскостями.

Поскольку множество $\mathcal{B}_V[t, t_1]$ выпукло, поверхность Γ_+ можно задать как выпуклую оболочку точек, лежащих на Γ_+ . Обозначим их как $\{p_{j-}^{(2)}\}$. Значения функции $\psi^*(p)$ в точках $\{p_{j-}^{(2)}\}$ и $\{p_{j+}^{(2)}\}$ можно вычислить как $\psi^*(p_{j-}^{(2)})$ и $\psi^*(p_{j+}^{(2)})$. Заметим, что по построению в точках $\{p_{j-}^{(2)}\}$: $T_- \psi^*(p_{j-}^{(2)}) \leq T \psi^*(p_{j-}^{(2)})$, а в точках $\{p_{j+}^{(2)}\}$: $T \psi^*(p_{j+}^{(2)}) \leq T_+ \psi^*(p_{j+}^{(2)})$.

Второе утверждение теоремы следует из построения операторов T_- , T_+ .

2.4. А п п р о к с и м а ц и и ф у н к ц и й ц е н ы $V(t, x)$ и $W(t, x)$. Сопряженные функции к минимаксной функции цены V^* и к максиминной функции цены W^* (2.6) не принадлежат классу $\mathcal{F}$. Тем не менее, можно найти оценки $\tilde{V}_-^*(t, p) \in \mathcal{F}$, $\tilde{W}_+^*(t, p) \in \mathcal{F}$, такие, что $\tilde{V}_-^*(t, p) \leq V^*(t, p)$ и $\tilde{W}_+^*(t, p) \geq W^*(t, p)$.

При рассмотрении свойств операторов S и T мы считали, что функция $\varphi^* \in \mathcal{F}$. В начальной постановке задачи это требование, вообще говоря, не выполняется. Однако для любой выпуклой функции φ^* , у которой $\text{dom } \varphi^*$ — выпуклый компакт, существуют $\varphi_-^*(p) \in \mathcal{F}$ и $\varphi_+^*(p) \in \mathcal{F}$, такие, что $\varphi_-^*(p) \leq \varphi^*(p) \leq \varphi_+^*(p)$.

Т е о р е м а 3. Пусть функции $\varphi_-^*(p) \in \mathcal{F}$ и $\varphi_+^*(p) \in \mathcal{F}$ — нижняя и верхняя оценки функции $\varphi^*(p)$. Тогда функции $\tilde{V}_-^*(t, p)$ и $\tilde{W}_+^*(t, p)$, определяемые формулами

$$\begin{cases} \tilde{V}_-^*(t, p) = T_- S \varphi_-^*(p), \\ \tilde{W}_+^*(t, p) = S T_+ \varphi_+^*(p), \end{cases} \quad (2.8)$$

являются нижней и верхней оценками V^* и W^* из (2.6), такими, что $V^*(t, p) \geq \tilde{V}_-^*(t, p)$ и $W^*(t, p) \leq \tilde{W}_+^*(t, p)$.

З а м е ч а н и е 3. В правой части (2.8) операторы S , T_- и T_+ зависят от t и t_1 , поэтому оценки $\tilde{V}_-^*(t, p)$ и $\tilde{W}_+^*(t, p)$ зависят от t и t_1 .

Т е о р е м а 4. Пусть функции $\varphi_-^*(p) \in \mathcal{F}$ и $\varphi_+^*(p) \in \mathcal{F}$ — нижняя и верхняя оценки функции $\varphi^*(p)$. Тогда функции $\tilde{V}_+(t, x)$ и $\tilde{W}_-(t, x)$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \tilde{V}_+(t, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - T_- S \varphi_-^*(p) \}, \\ \tilde{W}_-(t, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - S T_+ \varphi_+^*(p) \}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

являются верхней и нижней оценками для минимаксной и максиминной функций цены $V(t, x)$ из (2.1) и $W(t, x)$ из (2.2), такими, что $V(t, x) \leq \tilde{V}_+(t, x)$ и $W(t, x) \geq \tilde{W}_-(t, x)$.

3. Аппроксимации функции цены с коррекциями. Перейдем к задаче с коррекциями. Пусть $\mathcal{T} = \{\tau_k\}_{k=0}^N$ — разбиение отрезка $[t_0, t_1]$, такое, что $t_0 = \tau_N < \tau_{N-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$. В моменты времени τ_k происходит коррекция движения, т. е. становится известно текущее положение $x(\tau_k)$. Для минимаксной и максиминной функций цены будем использовать расширенные обозначения $V(t, x) = V(t, x; t_1, \varphi(\cdot))$, $W(t, x) = W(t, x; t_1, \varphi(\cdot))$, в которых явно указано, что в момент t_1 определено терминальное слагаемое φ .

Определим минимаксную функцию цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}(t, x)$ рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{T}}(\tau_0, x) &= V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)), \\ V_{\mathcal{T}}(t, x) &= V(t, x; \tau_{k-1}, V_{\mathcal{T}}(\tau_{k-1}, x)), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k-1}), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введем также максиминную функцию цены с коррекциями $W_{\mathcal{T}}(t, x)$:

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{T}}(\tau_0, x) &= W(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)), \\ W_{\mathcal{T}}(t, x) &= W(t, x; \tau_{k-1}, W_{\mathcal{T}}(\tau_{k-1}, x)), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k-1}), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Воспользуемся оценками (2.9) для определения оценок функций цены в задаче с коррекциями (3.1), (3.2). Рассмотрим минимаксную функцию цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}$.

В точке $\tau_0 = t_1$

$$V_{\mathcal{T}}(\tau_0, x) = V(\tau_0, x; \tau_0, \varphi(\cdot)) \leq \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - T_-^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi_-^*(p) \}.$$

На полуинтервале $t \in [\tau_1, \tau_0)$

$$V_{\mathcal{T}}(t, x) = V(t, x; \tau_0, V_{\mathcal{T}}(\tau_0, x)) \leq \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - T_-^{[t, \tau_0]} S^{[t, \tau_0]} T_-^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi_-^*(p) \}.$$

На полуинтервалах $t \in [\tau_k, \tau_{k-1})$, $k = \overline{2, N}$,

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{T}}(t, x) &= V(t, x; \tau_{k-1}, V_{\mathcal{T}}(\tau_{k-1}, x)) \leq \\ &\leq \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - T_-^{[t, \tau_{k-1}]} S^{[t, \tau_{k-1}]} \dots T_-^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T_-^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi_-^*(p) \} = \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - \underbrace{T_- S \dots T_- S T_- S}_{k+1} \varphi_-^*(p) \}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где в последнем равенстве зависимость операторов от времени опущена для сокращения записи.

Аналогично можно построить аппроксимации для максиминной функции цены с коррекциями $W_{\mathcal{T}}$ при помощи операторов S и T_+ . Таким образом, верна следующая теорема.

Т е о р е м а 5. Пусть функции $\varphi_-^*(p) \in \mathcal{F}$ и $\varphi_+^*(p) \in \mathcal{F}$ — нижняя и верхняя оценки функции $\varphi^*(p)$. Тогда функции $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$ и $\tilde{W}_{\mathcal{T}_-}(t, x)$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(\tau_0, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - T_- S \varphi_-^*(p) \}, \\ \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - \underbrace{T_- S \dots T_- S T_- S}_{k+1} \varphi_-^*(p) \}, \quad t \in [\tau_k, \tau_{k-1}), \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\mathcal{T}_-}(\tau_0, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - ST_+ \varphi_+^*(p) \}, \\ \widetilde{W}_{\mathcal{T}_-}(t, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - \underbrace{ST_+ \dots ST_+}_{k+1} \varphi_+^*(p) \}, \quad t \in [\tau_k, \tau_{k-1}), \quad k = \overline{1, N},\end{aligned}$$

являются верхней и нижней оценками минимаксной и максиминной функций цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}$ и $W_{\mathcal{T}}$ из (3.1), (3.2), такими, что $V_{\mathcal{T}}(t, x) \leq \widetilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$ и $W_{\mathcal{T}}(t, x) \geq \widetilde{W}_{\mathcal{T}_-}(t, x)$. Здесь, так же, как и в (3.3), зависимость операторов от времени опущена для сокращения записи.

4. Алгоритм вычисления функции цены в задаче с коррекциями. Приведем алгоритм, по которому в задаче импульсного управления с неопределенностью можно построить аппроксимации функции цены с коррекциями. Алгоритм будет описан для верхней оценки минимаксной функции цены $\widetilde{V}_{\mathcal{T}_+}$. Верхняя оценка минимаксной функции цены может быть использована для построения управления в задаче (1.1), (1.3), оптимального в смысле функции цены $\widetilde{V}_{\mathcal{T}_+}$. Как будет показано ниже, для построения управления не обязательно знать функцию цены $\widetilde{V}_{\mathcal{T}_+}$, однако необходимо вычислить градиент функции цены $\frac{\partial \widetilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)}{\partial x}$, поэтому в приведенном алгоритме описано, в том числе, построение градиента аппроксимации функции цены.

1. Для рассматриваемой системы (1.1) с помощью замены (1.4) перейти к системе (1.5).
2. Взять разбиение отрезка $[t_0, t_1]$ точками $\{\tau_k\}$: $t_0 = \tau_N < \tau_{N-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$.
3. Вычислить сопряженную функцию к терминальному слагаемому $\varphi^*(p)$ на наборе точек $\{p_i\}_{i=1}^I$, где p_i — n -мерные векторы. В качестве набора $\{p_i\}_{i=1}^I$ можно брать равномерную сетку в $\mathcal{B}_V[t_1, t_1]$, либо генерировать случайное множество точек с равномерным распределением в той же области.

З а м е ч а н и е 4. Аппроксимации функции цены, полученные в результате применения данного алгоритма, вообще говоря, зависят от начального выбора точек $\{p_i\}_{i=1}^I$, используемых для приближения функции φ^* . Однако для задач, где в качестве терминального слагаемого используется функция расстояния до заданной точки или ее окрестности, $\varphi(x) = d(x, \mathcal{M})$, где $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \varepsilon\}$ при малом ε , сопряженная функция равна

$$\varphi^*(p) = \rho(p|\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^n |p_i| \varepsilon$$

при условии $\langle p, p \rangle \leq 1$ и $\varphi^*(p) = +\infty$ иначе. Таким образом, функция φ^* сама принадлежит классу $\mathcal{F}$, и задача ее приближения функциями из $\mathcal{F}$ не возникает.

4. Вычислить оценку сопряженной функции цены в конечной точке $\tau_0 = t_1$:

$$\widetilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(\tau_0, x) = T_-^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi_-^*(p).$$

Это будет нижняя оценка для сопряженной к минимаксной функции цены, по которой можно построить верхнюю оценку для самой минимаксной функции цены.

5. По схеме (3.4) вычислить $\tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(t, x)$ на полуинтервалах $t \in [\tau_k, \tau_{k-1})$, $k = \overline{1, N}$:

$$\tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(t, x) = T_-^{[t, \tau_{k-1}]} S^{[t, \tau_{k-1}]} \dots T_-^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T_-^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi_-^*(p).$$

Таким образом, производя последовательные вычисления в обратном времени от t_1 к t_0 , можно вычислить нижнюю оценку сопряженной функции цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(t, x)$.

6. Найти градиент аппроксимации функции цены $\frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)}{\partial x}$. Из представления функции через сопряженную

$$\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x) = \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - \tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(t, x) \} \quad (4.1)$$

следует, что в том случае, когда максимизатор $\hat{p}$ в (4.1) единственный, градиент $\frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)}{\partial x} = \hat{p}$. Иначе если $\text{Arg max}_{p \in \mathbb{R}^n} (\langle p, x \rangle - \tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(t, x)) = \mathcal{P}$, то

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)}{\partial x}, \xi \right\rangle = \max_{p \in \mathcal{P}} \langle p, \xi \rangle.$$

Приведенный алгоритм позволяет получить верхнюю оценку минимаксной функции цены с коррекциями, а также градиент аппроксимации минимаксной функции цены. Поиск оценки максиминной функции цены с коррекциями можно проводить аналогичным образом на основании теорем, доказанных выше.

5. Синтез управления. Для задачи импульсного управления при неопределенности известно правило управления [9, 10], позволяющее построить управление в виде синтеза, доставляющее минимум функционалу из (1.3), равный $\mathcal{V}(t_0, x_0)$. Согласно этому правилу, строится гамильтониан $\mathcal{H}_2(t, x)$:

$$\mathcal{H}_2(t, x) = 1 - \left\| B^T \frac{\partial V_{\mathcal{T}}(t, x)}{\partial x} \right\|,$$

и управление в каждой точке (τ, x) можно вычислить следующим образом:

- если $\mathcal{H}_2(\tau, x) > 0$, то $dU = 0$,
- если $\mathcal{H}_2(\tau, x) = 0$, то управляющее воздействие U имеет скачок в направлении

$$\hat{u} = \frac{-B^T \frac{\partial V_{\mathcal{T}}(\tau, x)}{\partial x}}{\left\| -B^T \frac{\partial V_{\mathcal{T}}(\tau, x)}{\partial x} \right\|},$$

величина которого $\alpha \hat{u}$ определяется из условия: α — максимальное, при котором выполняется

$$1 + \left\langle \frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(\tau + 0, x + B\alpha \hat{u})}{\partial x}, B\hat{u} \right\rangle = 0.$$

При этом управление $u = \alpha \hat{u} \delta(t - \tau)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Если вместо $V_{\mathcal{T}}(t, x)$ использовать построенную аппроксимацию $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$, то полученный при

этом синтез управления является оптимальным и гарантирует достижение значения функционала, равное $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t_0, x_0)$.

Для построения синтеза управления в исходной системе перейдем к системе с матрицей $A = 0$, затем вычислим $\frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)}{\partial x}$ по алгоритму, описанному в предыдущем пункте, и применим указанное правило управления, заменяя везде $V_{\mathcal{T}}(t, x)$ на $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$. Таким образом можно получить управление и траекторию $x(t)$ для системы с матрицей $A = 0$ и затем, выполнив замену переменных, получить траекторию исходной системы.

П р и м е р. Рассмотрим задачу управления при неопределенности:

$$dx(t) = (1 - t^2)dU + v(t)dt, \quad t \in [-1, 1],$$

с функционалом

$$J(\mathcal{U}) = \max_{|v(\cdot)| \leq 1} \{ \text{Var}_{[-1, 1]} U(\cdot) + 2|x(t_1 + 0)| \} \rightarrow \min.$$

Задано ограничение на помеху $|v(t)| \leq 1$. Особенностью данного примера является то, что вид функционала позволяет в одномерном случае получить аналитическое представление функции цены.

В работе [9] показано, что для данного примера функция цены $V(t, x) = \beta(t)|x| + k(t)$, где

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [-1, 0], \\ \frac{1}{1 - t^2} & \text{при } t \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \\ 2 & \text{при } t \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]. \end{cases}$$

На рис. 2 схематически показано правило управления для данной задачи. Гамильтониан $\mathcal{H}_2(t, x)$ отличен от нуля в закрашенных серым цветом областях при $t \in [-1, 0]$ и при $t \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$, а также на интервале $t \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ при $x = 0$. Если точка (t, x) находится в одной из этих областей, то управлять не надо. Если же точка (t, x) находится в области $t \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ при $x \neq 0$, то $\mathcal{H}_2(t, x) = 0$ и требуется применить импульсное управление, переводящее x в ноль. В этой области пунктирными линиями со стрелками показано направление движения в результате такого удара.

На рис. 3 показана аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$, полученная в результате применения к данной задаче описанного выше алгоритма вычисления функции цены. При помощи $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$ построены траектория $x(t)$ системы и управление $U(t)$ при реализации помехи $v(t) = \sin(20t)$ и начальном положении $x(t_0) = 1$. Результаты построения приведены на рис. 4 и 5 соответственно. Из рисунков видно, что численная траектория управления соответствует правилу управления, полученному аналитически для данной задачи: управление нулевое, пока $t < 0$, при $t = 0$ происходит удар, приводящий траекторию в ноль, после чего управление удерживает траекторию вблизи нуля на протяжении некоторого времени, а потом управление снова не применяется.

Список литературы

1. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Пространства основных и обобщённых функций. Обобщённые функции. Т. 2. М.: Физматгиз, 1958.
2. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
3. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования // ПММ. 1959. Т. 23. № 4. С. 625–639.
4. Neustadt L. W. Optimization, a Moment Problem and Nonlinear Programming // SIAM J. Control. 1964. V. 2. № 1. P. 33–53.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
6. Куржанский А. Б., Осипов Ю. С. К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360–1370.
7. Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В. Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 11. С. 1491–1500.
8. Daryin A. N., Kurzhanski A. B. Impulse Control Inputs and the Theory of Fast Controls // Proc. 17th IFAC World Congr. IFAC, Seoul, 2008. P. 4869–4874.
9. Daryin A. N., Kurzhanski A. B., Minaeva Yu. Yu. On the Theory of Fast Controls under Disturbances // Proc. 18th IFAC World Congr. IFAC, Milano, 2011. P. 3486–3491.
10. Дарьин А. Н., Минаева Ю. Ю. Синтез импульсных и быстрых управлений при неопределённости // ДАН. 2011. Т. 441. № 5. С. 601–605.
11. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Pt I. External Approximations. Pt II. Internal Approximations. Box-valued Constraints // Optimization Methods and Software. 2002. V. 17. № 2. P. 177–237.
12. Дарьин А. Н., Малакаева А. Ю. Численные методы синтеза импульсных управлений для линейных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 2. С. 50–56.
13. Rockafellar R. T. Convex Analysis. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970.
14. Русс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
15. Kurzhanski A. B., Daryin A. N. Dynamic Programming for Impulse Controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. № 2. P. 213–227.
16. Rockafellar R. T., Wets R. J. Variational Analysis. Berlin: Springer, 2005.

17. *Barber C. B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H.T.* The Quickhull Algorithm for Convex Hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1996. V. 22. № 4. P. 469–483.

Подписи к рисункам к статье Дарьина А. Н., Минаевой Ю. Ю.

Рис. 1. Прибавление индикаторной функции

Рис. 2. Правило управления, полученное аналитически

Рис. 3. Аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$

Рис. 4. Траектория $x(t)$

Рис. 5. Управление $U(t)$

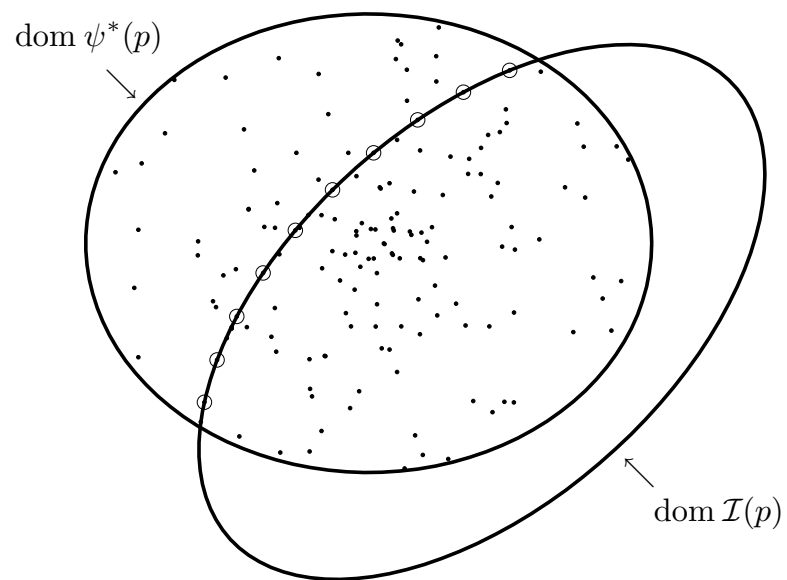


Рис. 1. Дарьин

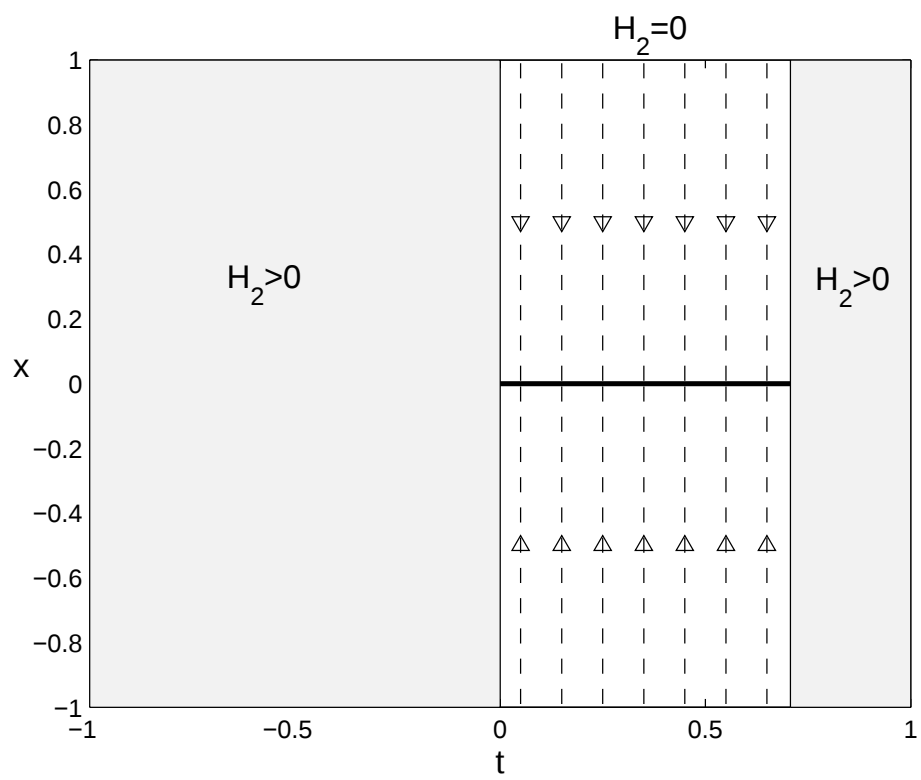


Рис. 2. Дарьин

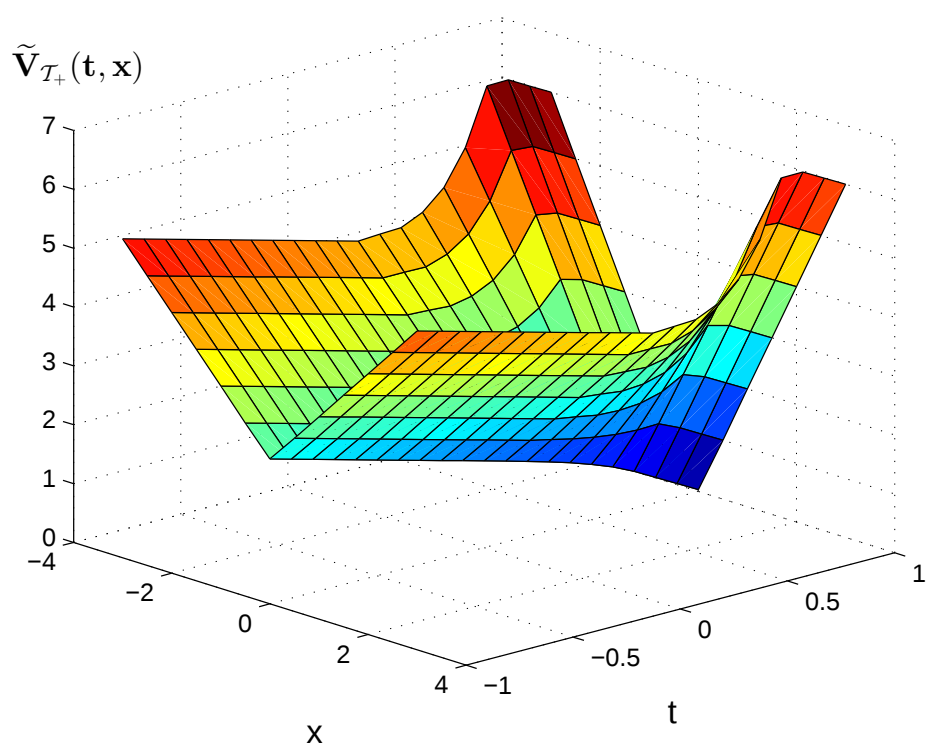


Рис. 3. Дарьин

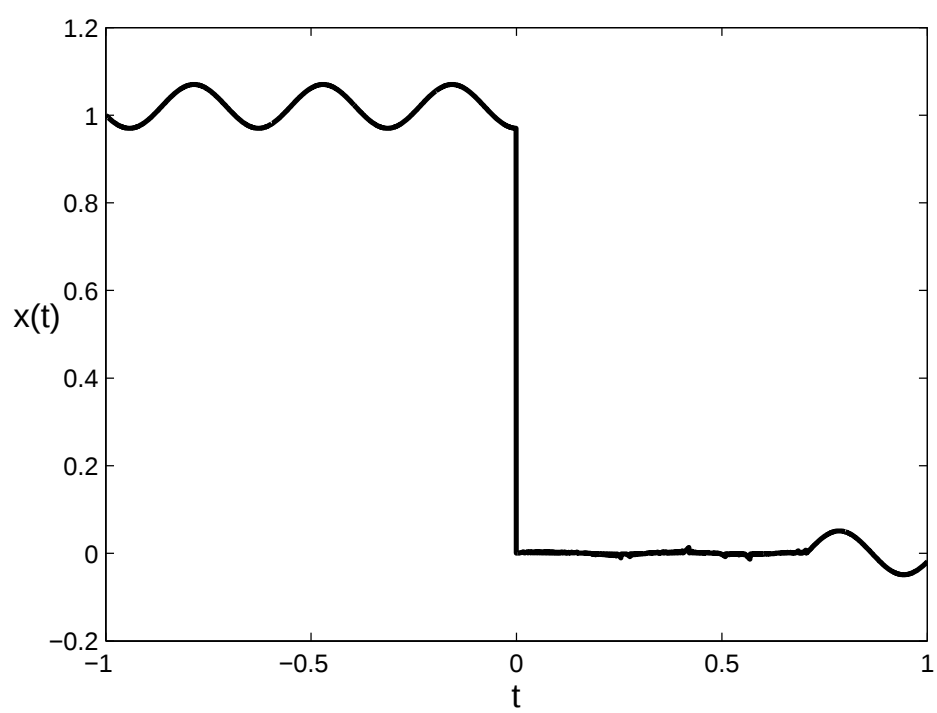


Рис. 4. Дарьин

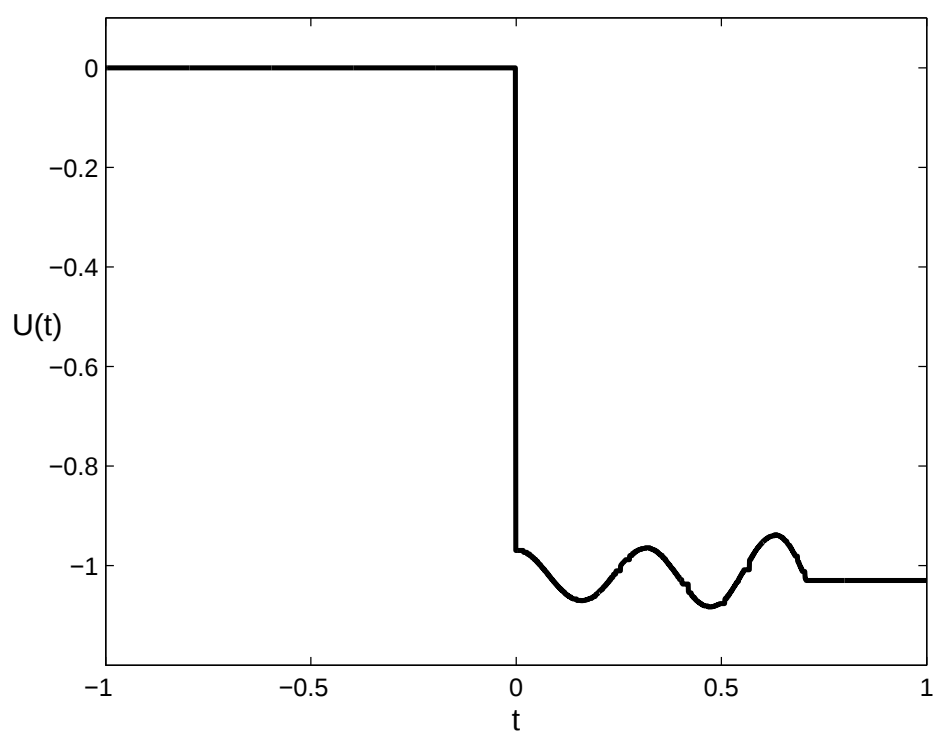


Рис. 5. Дарьин