

О ВЫЧИСЛЕНИИ БЫСТРЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Дарьин А.Н.¹, Минаева Ю.Ю.²

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
e-mail:¹⁾ daryin@cs.msu.su, ²⁾ yminaeva@gmail.com

В работах [1,2] доказано, что вполне управляемая линейная система $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ размерности n может быть переведена из произвольного одного состояния в любое другое на фиксированном промежутке времени с помощью импульсного управления $u(t) = \sum_{i=1}^k h_i \delta(t - \tau_i)$, где число импульсов $k \leq n$. В статье [3] предложено использовать управления, включающие помимо дельта-функций их производные высших порядков, что позволяет расширить возможности управления. В частности, при $m \geq n-1$ вполне управляемая линейная система может быть переведена из одного состояния в другое за нулевое время управлением

$$u(t) = \sum_{j=1}^m h_j \delta^{(j)}(t - \tau_j). \quad (1)$$

Импульсное управление не может быть реализовано на практике. Ограниченные функции, приближающие (1), называются быстрыми управлениями, поскольку они позволяют переводить систему в заданное состояние за произвольно малое время. В работе рассматриваются различные способы построений физически реализуемых аппроксимаций импульсных управлений при помощи разрывных и гладких функций.

Пусть $\Delta_h^n(t)$ – аппроксимация $\delta^{(n)}(t)$ на фиксированном отрезке времени $[-h, h]$ с минимальным модулем $|\Delta_h^n(t)| \leq \mu$, $\mu \rightarrow \inf$. Задача записывается в виде проблемы моментов. Показано, что $\Delta_h^n(t) = \frac{1}{4}(-1)^n n! \left(\frac{2}{h}\right)^{n+1} signU_n(ht)$, где $U_n(t)$ – многочлен Чебышева 2 рода степени n .

Пусть $\Delta_{h,k}^n(t)$ – k раз дифференцируемая аппроксимация $\delta^{(n)}(t)$ на отрезке $[-h, h]$, у которой k -ая производная ограничена по модулю. Задача поиска гладкой аппроксимации также приводится к проблеме моментов, и показано, что $\Delta_{h,k}^n(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{-h}^t g_k^n(\tau)(t-\tau)^{k-1} d\tau$, где $g_k^n(t) = \frac{1}{4}(-1)^{n+k} (n+k)! \left(\frac{2}{h}\right)^{n+k+1} signU_{n+k}(ht)$.

Найденные аппроксимации могут быть использованы при моделировании и физической реализации импульсных управлений.

Литература

1. Красовский Н.Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ. 1957. Т. 21. № 5. С. 670-677.
2. Neustadt L.W. Optimization, a moment problem and nonlinear programming. SIAM Journal on Control. 1964. V. 2. N. 1. P. 33-53.
3. Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями. Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360-1370.
4. Kurzhanski A.B., Daryin A.N. Dynamic programming for impulse controls. Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. N. 2. P. 213-227.