Синтез импульсных управлений при неопределённости: численный алгоритм

А. Н. Дарьин, Ю. Ю. Минаева

МГУ имени М. В. Ломоносова
Ф-т вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Киев, 3 октября 2012 года

Задача

- Система:

$$dx = A(t)xdt + B(t)dU + v(t)dt, \quad t \in [t_0, t_1]$$

- Ограничение на помеху: $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$

- Функционал:

$$J(\mathcal{U}) = \max_{v(\cdot)} \Big\{ \operatorname*{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \Big\} \to \min$$

- $U(\cdot)$ — реализовавшееся управление

Задача с нулевой динамикой

- Замена: $\hat{x}(t) = G(t_1, t)x(t)$

$$\partial G(t, \tau)/\partial t = A(t)G(t, \tau), \quad G(\tau, \tau) = I$$

- Система:

$$dx = B(t)dU + v(t)dt, \quad t \in [t_0, t_1]$$

- Функционал:

$$J(\mathcal{U}) = \max_{v(\cdot)} \Big\{ \operatorname*{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \Big\} \to \min$$

Программная функция цены

- Минимаксная:

$$V(t, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \min_{U(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \left\{ \operatorname*{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \;\middle|\; x(t) = x \right\}$$

- Максиминная:

$$V(t, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \max_{v(\cdot)} \min_{U(\cdot)} \left\{ \operatorname*{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \;\middle|\; x(t) = x \right\}$$

Сопряжённые функции

$$V^*(t,p) = \mathrm{conv}\,\{\varphi^*(p) \underline{- \rho(p \mid \mathcal{Q}[t,t_1])}\} \underline{+ \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}[t,t_1])}$$

$$W^*(t,p) = \mathrm{conv}\,\{\varphi^*(p) \underline{+ \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}[t,t_1])} \underline{- \rho(p \mid \mathcal{Q}[t,t_1])}\}$$

- Обозначения:

$$\mathcal{B}[t,t_1] = \left\{ p \;\middle|\; \max_{\tau \in [t,t_1]} \|B^T(\tau)p\| \le 1 \right\} \qquad \mathcal{Q}[t,t_1] = \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{I}(p \mid A) = \begin{cases} 0, & p \in A \\ +\infty, & p \notin A \end{cases}$$

Операторная запись

- Оператор *S*:

$$S\varphi^*(\cdot) = \mathrm{conv}\left\{\varphi^*(\cdot) \underline{- \rho(\cdot \mid \mathcal{Q}[t, t_1])}\right\}$$

- Оператор *T*:

$$T\varphi^*(\cdot) = \varphi^*(\cdot) \underline{+ \mathcal{I}(\cdot \mid \mathcal{B}[t, t_1])}$$

- Сопряжённые функции:

$$V^*(t, \cdot) = \underline{T}\,\underline{S}\varphi^*(\cdot), \quad W^*(t, \cdot) = \underline{S}\,\underline{T}\varphi^*(\cdot)$$

Класс функций $\mathcal{F}$

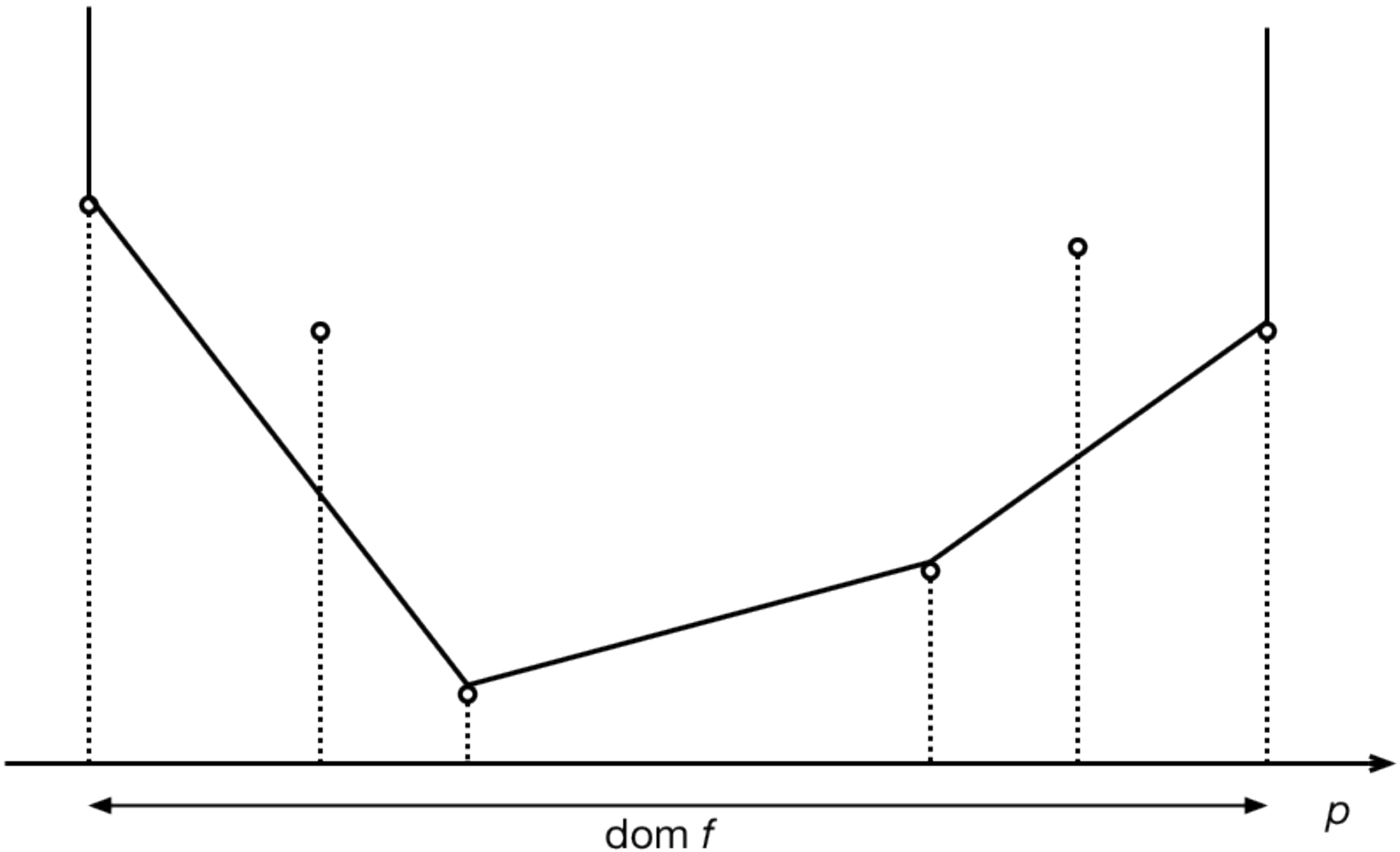
- Набор точек: $\{p_i\}_{i=1}^N, \quad p_i \neq p_j \ (i \neq j)$
- Набор значений: $\{f_i\}_{i=1}^N$

- Наибольшая выпуклая функция, т.ч.

$$\begin{cases} \operatorname{dom} f = \operatorname{conv}\{p_i\} \\ f(p_i) \leq f_i, \quad i = 1, \dots, N \end{cases}$$

- Обозначение: $f \sim \mathcal{F}(p_i, f_i)$

Класс функций $\mathcal{F}$



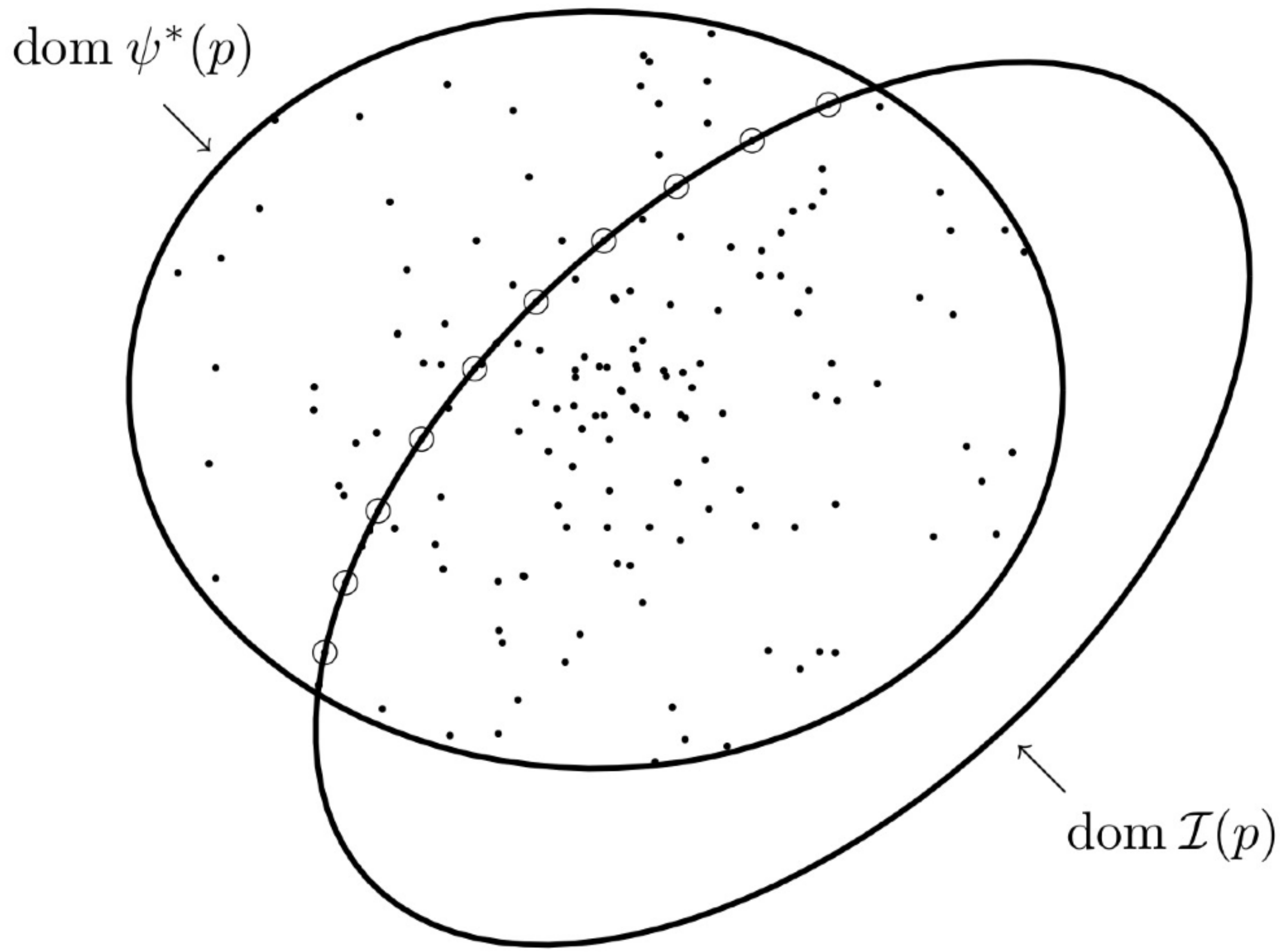
Оператор S

$$\psi^* = S\varphi^* = \operatorname{conv}\{\varphi^*(\cdot) - \rho(\cdot \mid \mathcal{Q}[t, t_1])\}$$

- Пусть $\varphi^* \sim \mathcal{F}(p_i, \varphi_i^*)$
- Тогда $\psi^* \sim \mathcal{F}(p_i, \psi_i^*), \quad \psi_i^* = \varphi^* - \rho(p_i \mid \mathcal{Q}[t, t_1]))$
- Можно отбросить точки, не входящие в $\operatorname{conv}\operatorname{epi}\psi^*$ (требуется вычисление выпуклой оболочки)

Оператор *T*

$$T\varphi^*(\cdot) = \varphi^*(\cdot) + \mathcal{I}(\cdot \mid \mathcal{B}[t, t_1])$$



Оператор *T* - оценки

- Точки добавляются на границе:

$$T_+\varphi^*(\cdot) \geq T\varphi^*(\cdot)$$

- Точки добавляются снаружи границы:

$$T_-\varphi^*(\cdot) \leq T\varphi^*(\cdot)$$

- Оценки для функции цены:

$$V_-^*(t,\cdot) = T_- S\varphi^*(\cdot) \leq V^*(t,\cdot)$$

$$W_+^*(t,\cdot) = ST_+\varphi^*(\cdot) \geq W^*(t,\cdot)$$

Функция цены с коррекциями

- Моменты коррекции:

$$t = \tau_K < \tau_{K-1} < \cdots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$$

- Верхняя и нижняя функции цены:

$$V^*_{\mathcal{T}}(t,\cdot) = \underset{[\tau_K,\tau_{K-1}]}{T_-S} \; \underset{[\tau_{K-1},\tau_{K-2}]}{T_-S} \; \ldots \; \underset{[\tau_2,\tau_1]}{T_-S} \; \underset{[\tau_1,\tau_0]}{T_-S} \; \varphi^*(\cdot)$$

$$W^*_{\mathcal{T}}(t,\cdot) = \underset{[\tau_K,\tau_{K-1}]}{ST_+} \; \underset{[\tau_{K-1},\tau_{K-2}]}{ST_+} \; \ldots \; \underset{[\tau_2,\tau_1]}{ST_+} \; \underset{[\tau_1,\tau_0]}{ST_+} \; \varphi^*(\cdot)$$

Синтез управлений - уравнение ДП

- Вариационное неравенства ГЯБА:

$$\min\{H_1, H_2\} = 0$$

$$H_1 = \mathcal{V}_t + \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \langle \mathcal{V}_x, A(t)x + v \rangle$$

$$H_2 = \min_{\|u\|=1} \{\|u\| + \langle \mathcal{V}_x, B(t)u \rangle\}$$

Синтез управлений - структура

- Если $H_1 = 0$:

$$dU = 0$$

- Если $H_2 = 0$:

$$dU(\tau) = -\alpha B^T(t)\mathcal{V}_x(t)\delta(\tau - t)$$

Синтез управлений - вычисление

- В качестве функции цены используется

$$\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(t,x) = \max_{p_i} \{\langle x, p_i\rangle - V^*_{\mathcal{T}}(t,p_i)\}$$

- Множество максимизаторов: $\mathcal{P}^*$
- Производная функции цены:

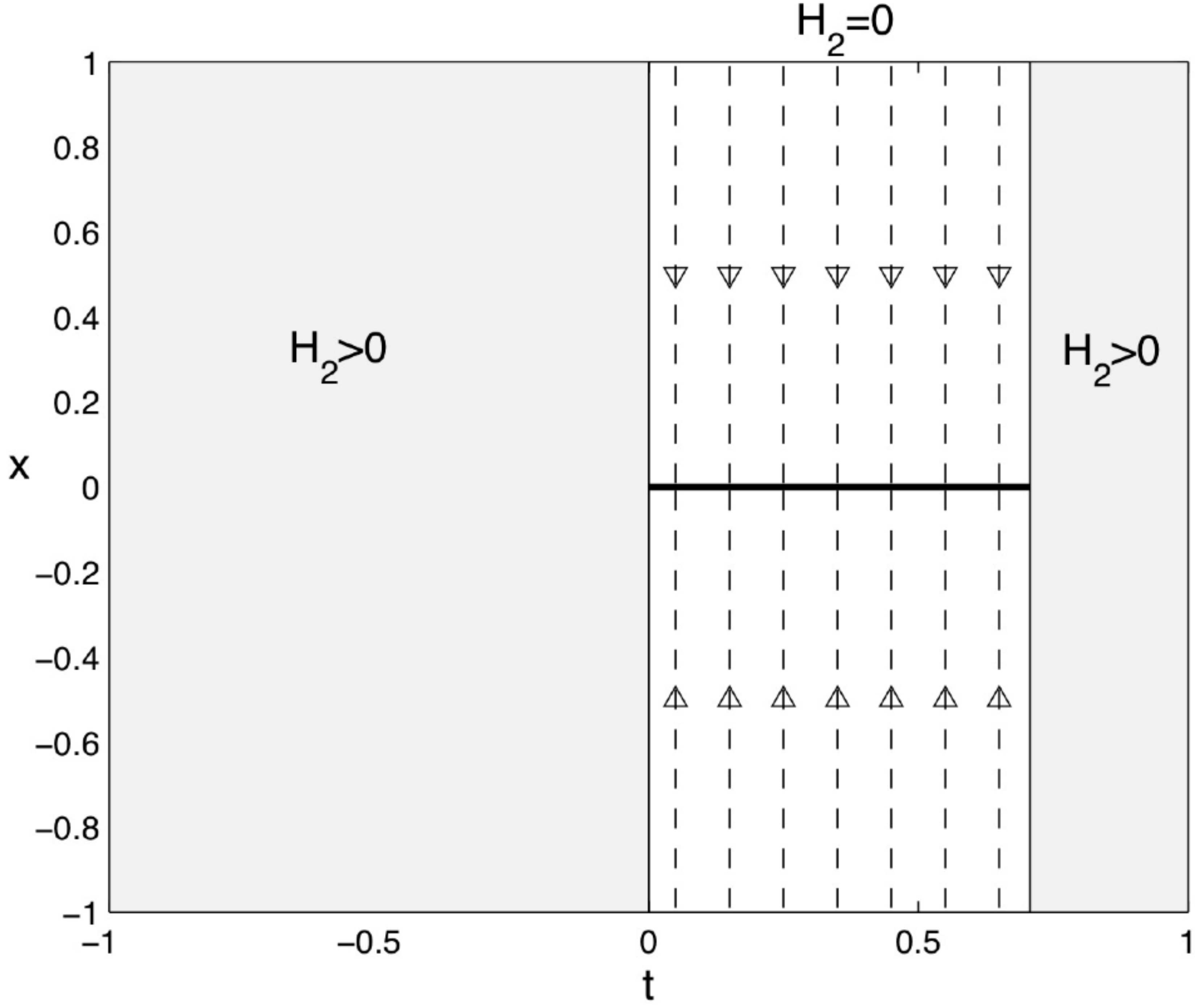
$$\langle V_x, \xi\rangle = \max_{p\in\mathcal{P}} \langle p, \xi\rangle$$

Пример

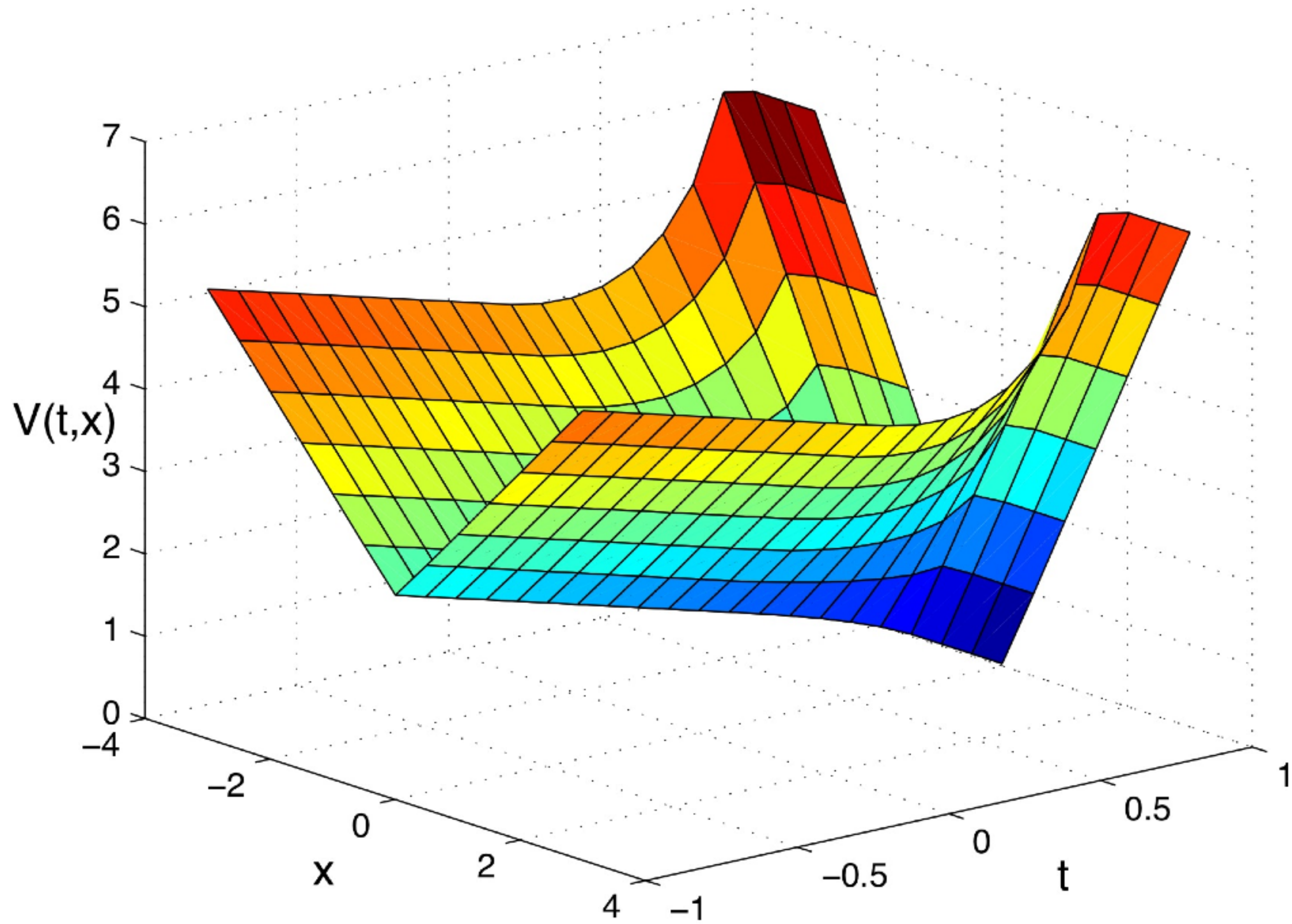
- Система: $dx(t) = (1 - t^2)dU + v(t)dt \quad t \in [-1, 1]$
- Ограничение: $|v(t)| \leq 1$
- Функционал:

$$J(U(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[-1,1]} U(\cdot) + 2|x(t_1 + 0)|$$

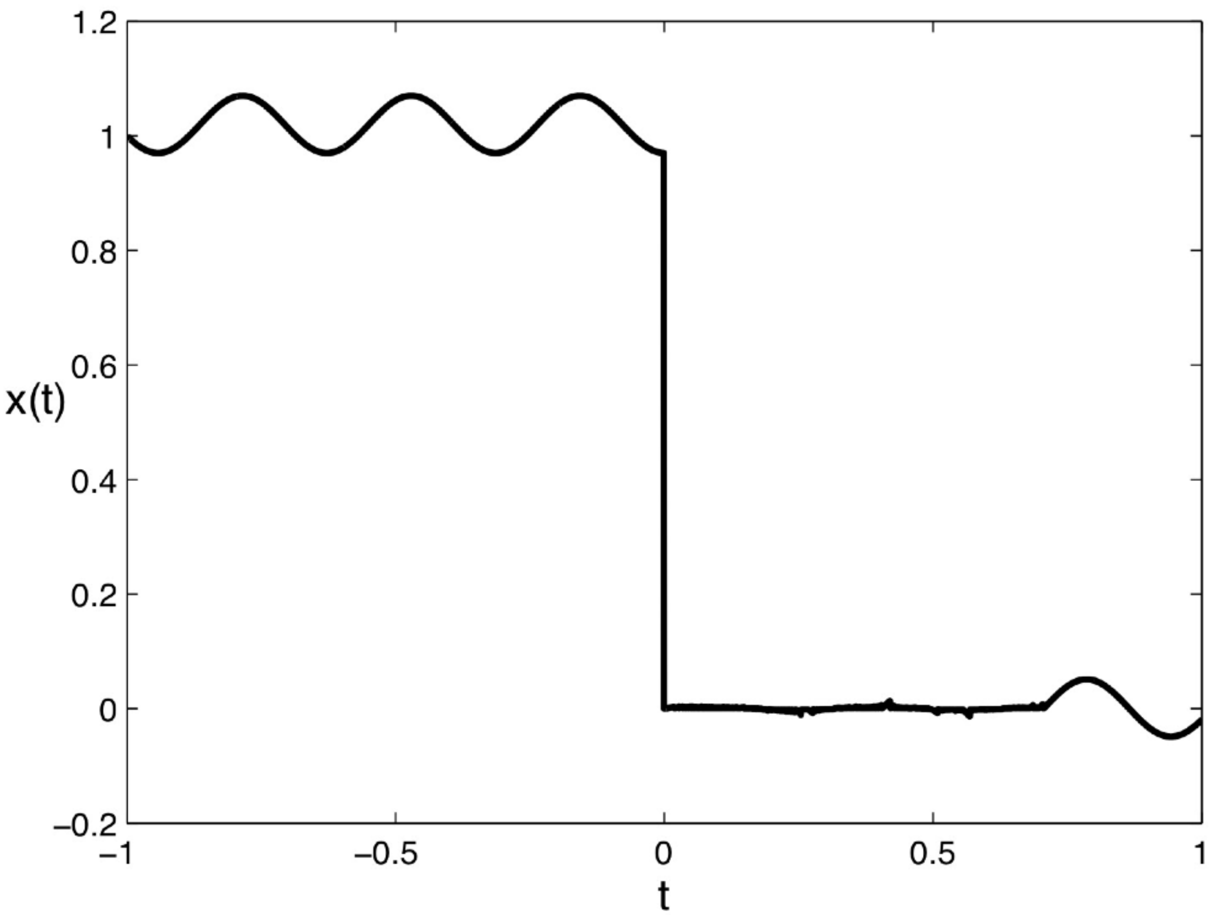
Пример - точное решение



Пример - функция цены

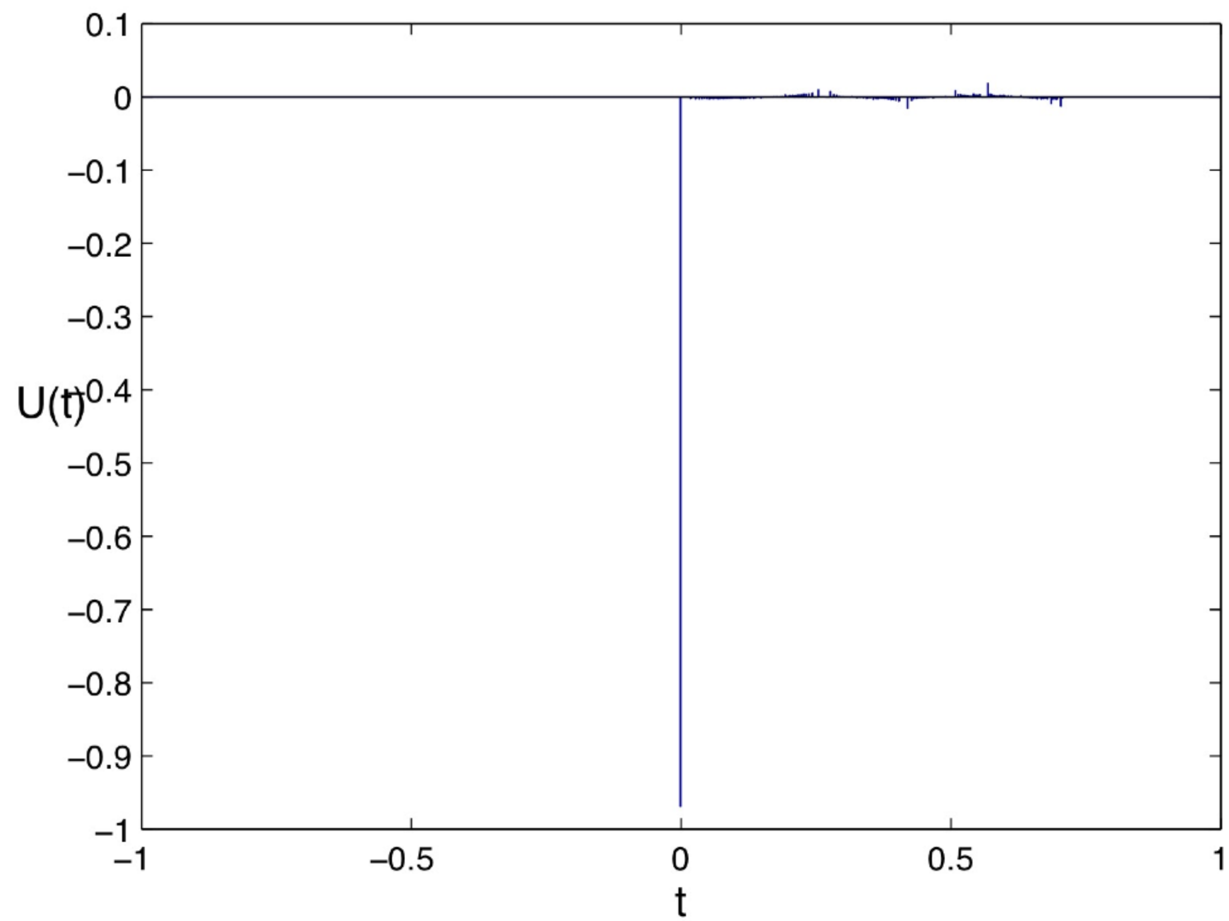


Пример - траектория и управление



траектория

управление



Спасибо за внимание!