УДК 517.977

А. Н. Дарьин, Ю. Ю. Минаева

Синтез импульсных и быстрых управлений при неопределенности[1]

Введение

Среди прикладных задач, мотивирующих современную математическую теорию процессов управления, более востребованными являются задачи синтеза, решением которых служат управления в форме обратной связи. Подобные задачи возникают и в системах с импульсными управлениями. При этом в последнее время возникли задачи, требующие решения на малых временных промежутках. Решение подобных задач достигается в системах, где в качестве управления рассматриваются распределения (обобщенные функции), допускающие высшие производные дельта-функций [1, 2].

Построению программных стратегий управления для систем с обыкновенными импульсными воздействиями посвящены основополагающие работы [3, 4], а с привлечением импульсов высоких порядков − работа [5], в которой указаны пути сведения решения к вспомогательным задачам с обыкновенными импульсами. Там же, в [5], показано, что для вполне управляемых систем двухточечная краевая задача

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00589-а), в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009--2013 годы» (контракт № 16.740.11.0426 от 26 ноября 2010 года).

управления может быть решена при помощи обобщённых управлений высших порядков за нулевое время. Указанные выше результаты получены для систем программного управления, не содержащих неопределённостей.

Решению задачи синтеза импульсных управлений в задачах без неопределенности посвящены работы [6] (для систем первого порядка) и [7] (где рассмотрен общий случай), а с неопределённостью – работа [8]

Поскольку импульсы являются идеальными элементами, их физическая реализация может достигаться путём применения аппроксимаций при помощи ограниченных функций. Такие аппроксимации идеальных импульсных управлений принято называть быстрыми управлениями [9, 10].

В данной работе для линейной системы с неизвестной, но ограниченной помехой рассматривается задача синтеза импульсных и быстрых управлений. С этой целью используется модификация метода динамического программирования, описанная в работе [11], распространенная здесь на случай импульсных управлений. Доказано, что соответствующая функция цены, позволяющая найти искомое управление, является решением вариационного неравенства типа Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ). В результате получена стратегия импульсного управления при неопределённости и указан способ построения быстрых управлений на основе реализовавшихся импульсных воздействий. При этом новизна результата заключена в охвате случая с неизвестной, но ограниченной помехой – «неопределённостью».

Задача с обобщенными управлениями при наличии помех

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t)\,. \qquad (1)$$

с обобщенным управлением $u \in \mathbb{R}^m$ и помехой $v(t) \in \mathbb{R}^q$. Матричные функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, являются k раз дифференцируемыми на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $C(t) \in \mathbb{R}^{n\times q}$ − непрерывна. Помеха $v(t)$ − кусочно-непрерывная функция, принимающая значения из заданного непустого выпуклого компакта $\mathcal{Q}(t)$.

Обобщенное управление u принадлежит пространству линейных функционалов $D^*_{k,m}[\alpha,\beta]$ над линейным нормированным пространством $D_{k,m}[\alpha,\beta]$ [2, 3]. Последнее состоит из k раз дифференцируемых функций $\varphi(t):[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ с носителем из отрезка (α,β), с заданной нормой $\mathcal{G}[\varphi]$. Норма $\mathcal{G}[\varphi]$ определяет сопряженную норму $\mathcal{G}^*[u]$ в пространстве $D^*_{k,m}[\alpha,\beta]$. Таким образом, управление является распределением порядка $k_u \le k$, а траектории системы (1) являются распределениями из $D^*_{k-1,n}[\alpha,\beta]$.

Пусть $f^{(\alpha)}$ и $f^{(\beta)}$ − два распределения из пространства $D^*_{k,n}[\alpha,\beta]$, сосредоточенные в точках t_0 и t_1 соответственно. Тогда, при известной реализовавшейся помехе $v(t)$, допустимым управлением u будем называть распределение из $D^*_{k,m}[\alpha,\beta]$, с носителем на отрезке $[t_0,t_1] \subset [\alpha,\beta]$, при котором существует распределение $x \in D^*_{k,n}[\alpha,\beta]$, удовлетворяющее уравнению

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t) + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}. \qquad (2)$$

Задача 1. *Найти стратегию управления в виде синтеза* $\mathcal{U}_g$, *порождающую допустимое управление* $u \in D^*_{k,m}[\alpha,\beta]$, *доставляющее минимум функционалу*

$$J(\mathcal{U}_g) = \max_{v(\cdot)\in\mathcal{Q}(\cdot)} \left\{ \mathcal{G}^*[u] + \varphi(f^{(\beta)}) \right\} \to \min. \qquad (3)$$

Здесь $\varphi(\cdot)$ *− некоторая собственная выпуклая замкнутая ограниченная снизу функция.*

Чтобы определить синтез $\mathcal{U}_g$, следуя работе [10], сведем Задачу 1 к обычной (первого порядка) задаче импульсного управления, сформулированной ниже. Синтез $\mathcal{U}_g$ для системы с обобщенными управлениями определим ниже через синтез $\mathcal{U}_{imp}$ для соответствующей импульсной системы.

Рассмотрим систему

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \mathcal{B}(t)dU(t) + C(t)v(t)dt, \quad x(t_0) = x_0, \qquad (4)$$

в которой вектор-столбец управления $U(\cdot) = [U_0(\cdot),\ldots,U_k(\cdot)]$ состоит из функций ограниченной вариации $U_j(\cdot) \in BV([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)$. В качестве помехи по-прежнему рассматривается кусочно-непрерывная функция $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$. Матрица $\mathcal{B}(t) = [L_0(t),\ldots,L_k(t)] \in \mathbb{R}^{n\times m(k+1)}$, где матрицы $L_0(t),\ldots,L_k(t)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$L_0(t) = B(t), \quad L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - \frac{dL_{j-1}(t)}{dt}, \quad j = 1..k\,.$$

Задача 2. *Найти управление в виде синтеза* $\mathcal{U}_{imp}$*, порождающее допустимые траектории управления* $U(\cdot) \in BV([t_0,t_1],\mathbb{R}^{m(k+1)})$*, доставляющее минимум функционалу*

$$J(\mathcal{U}_{imp}) = \max\nolimits_{v(\cdot)\in\mathcal{Q}(\cdot)} \left\{ \mathrm{Var}\{U(\cdot)\,|\,[t_0,t_1]\} + \varphi(x(t_1+0)) \right\} \tag{5}$$

вдоль траекторий системы (4).

Таким образом, связь реализации управления $U(\cdot)$ Задачи 2 с реализацией управления u Задачи 1 задается соотношением

$$u = \sum_{j=0}^{k} \frac{d^{j+1}U_j}{dt^{j+1}}\,, \tag{6}$$

понимаемым в смысле равенства распределений.

Для того чтобы определить синтез управления $\mathcal{U}_{imp}$ для импульсной системы, перейдем, по аналогии с [10], к пространственно-временной системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = A(t(s))x(s)u^t(s) + \mathcal{B}(t(s))u^x(s) + C(t(s))v(t(s))u^t(s), \\ \dfrac{dt}{ds} = u^t(s) \end{cases} \tag{7}$$

с независимой переменной $s \in [0,S]$. На расширенное управление $u(s) = (u^x(s),u^t(s)) \in \mathbb{R}^{m(k+1)} \times \mathbb{R}$ наложено геометрическое ограничение $u(s) \in \mathcal{B}_1 \times [0,1]$. Исходной задаче импульсного управления тогда соответствует следующая задача для системы (7):

$$\begin{cases} J(u(\cdot)) = \int_0^S || u^x(s) || \, ds + \varphi(x(S)) \to \inf \\ t(0) = t_0, \quad t(S) = t_1. \end{cases} \tag{8}$$

Синтезом управления $\mathcal{U}_s(s,x)$ в задаче (7), (8) является многозначное отображение, измеримое по t, полунепрерывное сверху по s, со значениями во множестве выпуклых компактов $\mathrm{comp}\,\mathbb{R}^{m(k+1)+1}$, точный вид которого будет определен ниже.

При подстановке синтеза $\mathcal{U}_s(s,x)$ в систему получаем дифференциальное включение

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} A(t(s))x + C(t(s))v(t(s)) & \mathcal{B}(t(s)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ u^x \end{pmatrix} \middle| \, (u^t, u^x) \in \mathcal{U}_s(s,x) \right\}.$$

Теорема 1. *Решения дифференциального включения существуют и продолжаемы на область* $(s,x) \in [0,S] \times \mathbb{R}^{m(k+1)}$ [13].

Для найденного синтеза $\mathcal{U}_s$ выполним обратный переход от пространственно-временной системы к импульсной системе, и затем к системе с обобщенными управлениями. Полученное при этом правило управления $\mathcal{U}_g$ будем называть синтезом для исходной Задачи 1.

Синтез импульсных управлений при наличии помех

Будем решать Задачу 2 модифицированным методом динамического программирования. Согласно схеме, предложенной в [9], определим минимаксную функцию цены

$$V^-(t_0, x_0; t_1, \varphi(\cdot)) = \min_{U(\cdot)} \max_{v(\cdot)} [\mathrm{Var}\, U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \,|\, x(t_0) = x_0].$$

Здесь $x(t)$ − траектория (4), соответствующая фиксированному управлению $U(\cdot)$ и помехе $v(\cdot)$.

Пусть $\mathcal{T}$: $t_0 = \tau_N < \tau_{N-1} < \ldots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$ − разбиение отрезка $[t_0, t_1]$. Определим функцию цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}^{-}(t,x)$ при помощи следующих рекуррентных соотношений:

$$V_{\mathcal{T}}^{-}(\tau_0, x) = V^{-}(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)),$$
$$V_{\mathcal{T}}^{-}(\tau_{k+1}, x) = V^{-}(\tau_{k+1}, x; \tau_k, V_{\mathcal{T}}^{-}(\tau_k, \cdot)).$$

Обозначим $\mathcal{V}^{-}(t,x;t_1,\varphi(\cdot)) = \inf_{\mathcal{T}} V_{\mathcal{T}}^{-}(t,x)$.

Теорема 2. *Функция цены $\mathcal{V}^{-}(t,x;t_1,\varphi(\cdot))$ задачи (4), (5) удовлетворяет принципу оптимальности, который может быть записан в форме полугруппового свойства:*

$$\mathcal{V}^{-}(t,x;t_1,\varphi(\cdot)) = \mathcal{V}^{-}(t,x;\tau,\mathcal{V}^{-}(\tau,\cdot;t_1,\varphi(\cdot))), \quad \forall \tau \in [t_0, t_1].$$

Теорема 3. *Функция цены $\mathcal{V}^{-}(t,x)$ удовлетворяет вариационному неравенству типа ГЯБ:*

$$\min\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = 0,$$
$$\mathcal{H}_1(t,x,\mathcal{V}_t^{-},\mathcal{V}_x^{-}) = \mathcal{V}_t^{-} + \max_{v\in\mathcal{Q}} \left\langle \mathcal{V}_x^{-}, A(t)x + C(t)v(t) \right\rangle, \tag{9}$$
$$\mathcal{H}_2(t,x,\mathcal{V}_t^{-},\mathcal{V}_x^{-}) = \min_{\|h\|=1}\{\|h\| + \left\langle \mathcal{V}_x^{-}, \mathcal{B}(t)h \right\rangle\},$$

с краевым условием $\mathcal{V}^{-}(t_1,x) = \mathcal{V}^{-}(t_1,x;t_1,\varphi(\cdot))$.

Для доказательства теоремы рассмотрим задачу для пространственно-временной системы (7), (8). Для нее определим минимаксную функцию цены $\mathbf{V}^{-}(t,x)$ по аналогии с тем, как подобная функция цены была введена для Задачи 2.

Теорема 4. *Минимаксная функция цены* $\mathbf{V}^{-}(t,x)$ *задачи (7), (8) является обобщённым решением следующего уравнения ГЯБ [8]:*

$$\min_{u^t\in[0,1]}\left(u^t H_1 + H_2\right) = 0,$$
$$H_1(s,x,\mathbf{V}_t^-,\mathbf{V}_x^-) = \mathbf{V}_t^- + \max_{v\in\mathcal{Q}}\left\langle \mathbf{V}_x^-, A(t(s))x + C(t(s))v(t(s))\right\rangle,$$
$$H_2(s,x,\mathbf{V}_t^-,\mathbf{V}_x^-) = \min_{u^x\in\mathcal{B}_1}\left(\left\langle \mathbf{V}_x^-, \mathcal{B}(t(s))u^x\right\rangle + \| u^x \|\right).$$

При этом в точках, где функция $\mathbf{V}^-$ не дифференцируема, сумму $\mathbf{V}_t^- u^t +$ $+\left\langle \mathbf{V}_x^-, (Ax+Cv)u^t\right\rangle + \left\langle \mathbf{V}_x^-, \mathcal{B}u^x\right\rangle$ следует понимать в смысле производной функции $\mathbf{V}^-(t,x)$ по направлению $\left(u^t, Axu^t + \mathcal{B}u^x + Cvu^t\right)$, которая существует в каждой точке в силу выпуклости $\mathbf{V}^-$ по x.

Теорема 5. *Синтез управления в задаче (7), (8) можно определить как множество минимизаторов:*

$$\mathcal{U}_s(s,x) = \bigcup\left\{(u^t,u^x)\middle| u^t H_1(s,x) + H_2(s,x) = 0\right\}.$$

Объединение здесь берется по всем производным по направлению функции $\mathbf{V}^-(t,x)$.

$$\mathcal{U}_s(s,x) = \begin{cases} u^t = 1, \quad u^x = 0, & \text{если } H_1 = 0 \text{ (при этом } H_2 > 0), \\ u^t = 0, \quad u^x = \frac{-B^T\mathbf{V}_x^-}{\|-B^T\mathbf{V}_x^-\|}, & \text{если } H_1 > 0 \text{ (при этом } H_2 = 0). \end{cases} \tag{10}$$

Из синтеза (10) получим правило управления для Задачи 2:

- если $\mathcal{H}_1 = 0$, то $dU = 0$,
- если $\mathcal{H}_2 = 0$, то управление U имеет скачок в направлении $-B^T\mathcal{V}_x^-$, величина которого определяется из условия: после применения управления $\mathcal{H}_1 = 0$.

Соответствующие обобщенные управления u для исходной Задачи 1 получаются в результате преобразования (6).

В случае одномерного пространства состояний $(x \in \mathbb{R}^1)$ существует явное представление для функции цены, и с помощью вариационного неравенства (9) возможно построить синтез управления в конкретных численных примерах.

Для многомерного пространства, если не удается найти явное выражение для функции цены, задачу можно решать приближенно, используя ее аппроксимации.

Быстрые управления

Как известно [5], импульсные и обобщенные управления позволяют переводить систему в заданное состояние за нулевое время, однако они являются математическими абстракциями, в реальных же процессах необходимо использовать конечные управления (хотя такие управления могут быть достаточно большими по норме). Ограниченные функции, приближающие импульсные управления, называют быстрыми, так как они позволяют переводить систему в заданное состояние за произвольно малое время.

Такие управления можно искать, например, в следующем виде:

$$u_{\Delta}(t) = \sum_{j=0}^{m} u_j \Delta_{h_j}^{j}(t-\tau), \qquad (11)$$

где $\Delta_{h_j}^{j}(t)$ аппроксимируют дельта-функцию и ее производные, а именно $\Delta_{h_j}^{j}(t)$ слабо сходится к $\delta^{(j)}(t)$.

Здесь возникает проблема выбора параметров управления (11) − коэффициентов h_j и u_j, а также вида функций $\Delta_{h_j}^{j}(t)$. Эти параметры должны выбираться, исходя из физических требований на реализацию управления.

Задача 3. *Найти* $\Delta_h^n(t)$ − *аппроксимацию* n*-ой производной дельта-функции* $\delta^{(n)}(t)$ *с минимальным модулем* $\left|\Delta_h^n\right|$ [12].

Данную задачу запишем в виде проблемы моментов

$$\mu \to \inf,$$
$$\left|\Delta_h^n(t)\right| \le \mu, \quad t \in [-h, h]$$

с дополнительными ограничениями

$$\int_{-h}^{h} \Delta_h^n(t) t^k dt = 0,\ k = 0, \ldots, n-1,$$
$$\int_{-h}^{h} \Delta_h^n(t) t^n dt = (-1)^n n!$$

которые обеспечивают воздействие аппроксимаций $\Delta_h^n(t)$ на полиномы степени n, подобное тому, как и $\delta^{(n)}(t)$.

Теорема 6. *Решением* $\Delta_h^n(t)$ *Задачи 3 является функция*

$$\Delta_h^n(t) = \tfrac{1}{4}(-1)^n n! \left(\tfrac{2}{h}\right)^{(n+1)} \operatorname{sign} U_n(ht), \qquad (12)$$

где $U_n(t)$ − *многочлен Чебышева второго рода:* $U_n(t) = \cos(n \arccos t)$.

Также можно найти непрерывные и непрерывно дифференцируемые аппроксимации дельта-функции и ее производных с минимальным модулем соответствующей производной от аппроксимации [12].

Построение синтеза при помощи быстрых управлений

В Задаче 2 траектории системы (4) определяются по формуле

$$x(t) = X(t,t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{k} X(t,\tau)L_j(\tau)dU + \int_{t_0}^{t_1} X(t,\tau)C(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Матрицы $L_j(t)$ можно записать в виде свертки с дельта-функцией: $L_j(t) = \int_{\mathbb{R}} X(t,\tau)B(\tau)\delta^{(j)}(\tau - t)d\tau$. При переходе к быстрым управлениям (12): $M_j(t) = \int_{-h}^{h} X(t,\tau)B(\tau)\Delta_h^j(\tau - t)d\tau$.

По аналогии с работой [8] можно доказать следующие утверждения.

Теорема 7. *Если матрица* $A(t)$ *непрерывна, а* $B(t)$ − $(k+1)$ *раз непрерывно дифференцируема, то функции* $M_j(t)$ *сходятся к* $L_j(t)$ *равномерно на отрезке* $[t_0,t_1]$, $j = 1..k$.

Определим систему:

$$dx_h(t) = A(t)x_h(t)dt + \mathcal{M}_h(t)dU(t) + C(t)v(t)dt, \tag{13}$$

где $\mathcal{M}_h(t) = [M_0(t),\ldots,M_k(t)]$.

Теорема 8. *Траектории системы (4) сходятся к траекториям системы (13) при* $h \to 0$ *равномерно на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Сформулированные выше теоремы позволяют применить следующую схему нахождения синтеза в Задаче 2:

1. Зафиксировать $h > 0$ и перейти к рассмотрению системы (13).
2. Для системы (13) построить синтез управлений $\mathcal{U}^*$.
3. Определить реализовавшееся управление $U(\cdot)$ для системы (13) и вычислить управляющее воздействие u для исходной системы (1).

Список литературы

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959.
2. *Laurent Schwartz*. Théorie des distributions. Paris: Hermann, 1950.
3. *Красовский Н. Н.* // Прикладная Математика и Механика. 1957. Т. 21, № 5. С. 670−677.
4. *Neustadt L. W.* // SIAM Journal on Control. 1964. V. 2, N. 1. P. 33−53.
5. *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 8. С. 1360−1370.
6. *Bensoussan, A., Lions J.-L.* Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles. Paris: Dunod, 1982.
7. *Daryin A. N., Kurzhanski A. B.* // Proceedings of 17th IFAC World Congress, Seoul. 2008. P. 4869−4874.
8. *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* // Дифференциальные уравнения. 2011. № 7. В печати.
9. *Куржанский А. Б.* // Труды МИАН. 1999. № 224. С. 234–248.
10. *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В.* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 11. С. 1491−1500.

11. *Kurzhanski A. B., Daryin A. N.* // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32, N 2. P. 213−227.

12. *Дарьин А. Н., Минаева Ю. Ю.* // Прикладная математика и информатика. М.: МАКС Пресс. 2010. № 35. С. 36−45.

13. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.