

Синтез импульсных и быстрых управлений в линейных системах при наличии помех

А. Н. Дарьин¹, Ю. Ю. Минаева²

Аннотация – In this paper we consider the problem of synthesizing impulse and fast controls under unknown-but-bounded disturbances. Applying the dynamic programming technique we derive variational inequality of Hamilton – Jacobi – Bellman – Isaacs type. The resulting impulse controls are approximated by bounded fast controls.

Ключевые слова – Динамическое программирование, Импульсные управления, Быстрые управления.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная управляемая система

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t) + C(t)v(t)dt \quad (1)$$

на отрезке времени $[t_0, t_1]$, где $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^m$ – управление, $v \in \mathbb{R}^l$ – неизвестное ограниченное возмущение: $v(t) \in Q(t)$, $Q(t)$ – компакт. Требуется найти управление в виде синтеза, доставляющего минимум функционалу типа Майера–Больца:

$$J(U(\cdot)) = \text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \rightarrow \inf \quad (2)$$

Управление выбирается из класса функций ограниченной вариации $u(\cdot) \in BV[t_0, t_1]$.

В работе [1] получен основной результат для аналогичной задачи без помехи ($C(t) \equiv 0$) в классе программных управлений: линейная управляемая система может быть переведена из одного состояния в другое при помощи управления $u(t) = \sum_{i=1}^k u_i \delta(t - \tau_i)$, $\tau_i \in [t_0, t_1]$, где число импульсов $k \leq n$, а векторы u_i отвечают за интенсивность и направление удара в моменты времени τ_i . В статье [2] получен синтез импульсных управлений для линейной задачи управления без помех.

II. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящей работе при помощи модифицированного метода динамического программирования (согласно схеме, предложенной в [3]) для задачи (1)–(2) определена минимаксная функция цены

$$V^-(t_0, x_0) = \min_{U(\cdot)} \max_{v(\cdot)} [\text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \mid x(t_0) = x_0].$$

Вводится расширенное обозначение

$$V^-(t_0, x_0) = V^-(t_0, x_0; t_1, \varphi(\cdot))$$

и функция цены с коррекциями на разбиении $T = \{\tau_0, \dots, \tau_N\}$, $t_0 = \tau_N < \tau_{N-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$:

$$V_T^-(\tau_0, x) = V^-(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot))$$

$$V_T^-(\tau_{k+1}, x) = V^-(\tau_{k+1}, x; \tau_k, V_T^-(\tau_k, x))$$

$$\mathcal{V}^-(t, x) = \inf_T V_T^-(t, x)$$

Показано, что функция цены с коррекциями $\mathcal{V}^-(t, x)$ удовлетворяет принципу оптимальности в форме полугруппового свойства и является решением вариационного неравенства типа Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса. Предложен способ определения управления в виде синтеза.

В случае одномерного пространства состояний ($x \in \mathbb{R}^1$) существует явное представление для функции цены, и с помощью вариационного неравенства можно построить синтез управления в конкретных численных примерах. Для многомерного пространства, если не удастся найти явное выражение для функции цены, задачу можно решать приближенно, используя аппроксимации функции цены.

III. БЫСТРЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

Импульсные управления позволяют переводить систему в заданное состояние за нулевое время, но являются математическими абстракциями. В реальных процессах требуется использование ограниченных управлений (хотя такие управления могут быть достаточно большими по модулю). Для этого вводятся быстрые управления – ограниченные аппроксимации импульсных управлений. Быстрые управления позволяют переводить систему в заданное положение за произвольно малое время [4, 5]. В настоящей работе предложен способ построения синтеза управления при помощи быстрых управлений с минимальным модулем.

СПИСОК ССЫЛОК

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Москва, 119991, РОССИЯ, E-mail: daryin@cs.msu.ru

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Москва, 119991, РОССИЯ, E-mail: yminaeva@gmail.com

- [1] Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.
- [2] Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В. Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 11. С. 1491–1500.
- [3] Куржанский А. Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. № 224. С. 234–248.
- [4] Kurzhanski A. B., Daryin A. N. Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32, N 2. P. 213–227.
- [5] Дарьин А. Н., Минаева Ю. Ю. Аппроксимация импульсных управлений физически реализуемыми быстрыми управлениями // Прикладная математика и информатика. М.: МАКС Пресс. 2010. № 35. С. 36–45.