О физической реализуемости теории быстрых управлений

А. Н. Дарьин, Ю. Ю. Минаева

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

25 сентября 2009 · APSCT'2009 · Екатеринбург

Введение

Импульсные управления:

- мгновенные управляющие воздействия («удары»)
- разрывные траектории, скачки, перестройка координат и т.п.

Механические системы:

- δ-функция $\Rightarrow$ скачок скорости
- производная δ-функции $\Rightarrow$ скачок координаты
- высшие производные δ-функции $\Rightarrow$ перестройка всех координат

Введение

Физически реализуемая аппроксимация
мгновенных управлений

$$\Downarrow$$

Быстрые управления

Введение

Как строить быстрые управления?

- ограничение на время
- ограничение на интенсивность

Задача импульсного управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$t \in [t_0, t_1]$ — *фиксированный* интервал времени

Problem (1)

$$\textit{Минимизировать } J(U(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0))$$

по $U(\cdot) \in BV[t_0, t_1]$, *где* $x(t)$ *отвечает управляющему воздействию*

$$u(t) = \frac{dU}{dt}$$

и начинается из $x(t_0 - 0) = x_0$.

Задача импульсного управления

Классический результат
(Н. Н. Красовский [1957], L. W. Neustadt [1964]):

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \delta(t - \tau_i)$$

Важный частный случай: $\varphi(x) = \mathscr{I}(x \mid \{x_1\})$
— перевести из x_0 в x_1 на $[t_0, t_1]$.

$$\mathscr{I}(x \mid A) = \begin{cases} 0, & x \in A; \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases}$$

Definition

Функция цены — минимум $J(U(\cdot))$ при *фиксированной* начальной позиции $x(t_0 - 0) = x_0$:

$$V(t_0, x_0) = V(t_0, x_0; t_1, \varphi(\cdot)).$$

Как найти функцию цены?

- Проинтегрировать уравнение ГЯБ.
- Явное представление (выпуклый анализ).

Динамическое программирование

Функция цены $V(t, x; t_1, \varphi(\cdot))$ удовлетворяет принципу оптимальности

$$V(t_0, x_0; t_1, \varphi(\cdot)) = V(t_0, x_0; \tau, V(\tau, \cdot; t_1, \varphi(\cdot))), \quad \tau \in [t_0, t_1]$$

Вариационное неравенство типа Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\min\{H_1(t, x, V_t, V_x),\ H_2(t, x, V_t, V_x)\} = 0,$$

$$V(t_1, x) = V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)).$$

$$H_1 = V_t + \langle V_x, A(t)x\rangle, \quad H_2 = \min_{u \in S_1} \langle V_x, B(t)u\rangle + 1 = -\left\| B^T(t) V_x \right\| + 1.$$

Явное представление для V

Обозначим

- $\partial X(t,\tau) = A(t)X(t,\tau)$, $X(\tau,\tau) = I$.
- $\|p\|_{[t_0,t_1]} = \left\|B^T(\cdot)X^T(t_1,\cdot)p\right\|_{C[t_0,t_1]}$,

Функция цены

$$V(t_0,x_0) = \inf_{x_1\in\mathbb{R}^n}\left\{\varphi(x_1) + \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\frac{\langle p, x_1 - X(t_1,t_0)x_0\rangle}{\|p\|_{[t_0,t_1]}}\right\}.$$

Сопряжённая функция

$$V^*(t_0,p) = \varphi^*(X^T(t_0,t_1)p) + \mathscr{I}\left(X^T(t_0,t_1)p \,\middle|\, \mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t_0,t_1]}}\right)$$

Явное представление: $t_1 - t_0 = 0$

При $t_1 = t_0$ есть только один момент времени для управления.

Этот момент может быть эффективно использован.

Функция цены

$$V(t_1, x_0) = \inf_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \left\{ \varphi(x_1) + \|x_1 - x_0\|^*_{[t_0, t_1]} \right\} \leqslant \varphi(x_0).$$

Сопряжённая функция

$$V^*(t_1, p) = \varphi^*(p) + \mathscr{I}(p \mid \{p \mid \|B^T(t_1)p\| \leqslant 1\})$$

Задача с обобщёнными управлениями

Problem (2)

$$\textit{Минимизировать } J(u) = \rho^*[u] + \phi(x(t_1+0))$$

по распределениям $u \in d_k[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \supseteq [t_0, t_1]$,
где $x(t)$ *— траектория при управлении* u
и начальной позиции $x(t_0 - 0) = x_0$.

Норма $\rho^*[u]$ — сопряжённая к норме ρ на $C^k[\alpha,\beta]$:

$$\rho[\psi] = \max_{t\in[\alpha,\beta]} \sqrt{\|\psi(t)\|^2 + \|\psi'(t)\|^2 + \cdots + \left\|\psi^{(k)}(t)\right\|^2}.$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(0)}\delta(t-\tau_i) + h_i^{(1)}\delta'(t-\tau_i) + \cdots + h_i^{(k)}\delta^{(k)}(t-\tau_i).$$

Сведение к «обычному» импульсному управлению

Как работать с высшими производными $\delta^{(j)}(t)$?
Свести к задаче с обычными δ-функциями,
но для более сложной системы.
Общий вид распределения $u \in D_k^*$:

$$\boxed{u = \frac{d\,U_0}{dt} + \frac{d^2 U_1}{dt^2} + \cdots + \frac{d^k U_k}{dt^k}} \quad U_j \in BV$$

Задача 2 сводится к частному случаю задачи 1 для системы

$$\dot{x} = A(t)x + \mathscr{B}(t)u, \quad \mathscr{B}(t) = \begin{pmatrix} L_0(t) & L_1(t) & \cdots & L_k(t) \end{pmatrix}$$

и управления $u = \dfrac{d\,U}{dt}$, $U(t) = \begin{pmatrix} U_0(t) \\ \vdots \\ U_k(t) \end{pmatrix}$,

при $L_0(t) = B(t)$, $L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - L'_{j-1}(t)$.

Сведение к «обычному» импульсному управлению

$$\mathscr{B}(t) = \begin{pmatrix} L_0(t) & L_1(t) & \cdots & L_k(t) \end{pmatrix}$$

Например:

- $A = 0$:

$$\mathscr{B}(t) = \begin{pmatrix} B(t) & -B'(t) & B''(t) & \cdots & (-1)^k B^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

- $A, B = \mathrm{const}$:

$$\mathscr{B}(t) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{pmatrix}$$

Быстрые управления

Если $\operatorname{rank}\mathscr{B} = n$, со систему можно перевести из x_0 в x_1 за нулевое время управлением

$$u(t) = h^{(0)}\delta(t - t_0) + h^{(1)}\delta'(t - t_0) + \cdots + h^{(k)}\delta^{(k)}(t - t_0).$$

т.е.

$$x_1 - x_0 = L_0(t_0)h^{(0)} + L_1(t_0)h^{(1)} + \cdots + L_k(t_0)h^{(k)}.$$

Аппроксимации мгновенных управлений — быстрые управления.

Управление за произвольно малое «быстрое» время («нановремя»).

Быстрые управления — 1 способ

Аппроксимация производных дельта функции:

$$\Delta_\sigma^0(t) = \frac{1}{\sigma}\mathbf{1}_{[0,\sigma]}(t), \quad \Delta_\sigma^j(t) = \frac{1}{\sigma}(\Delta_\sigma^{j-1}(t) - \Delta_\sigma^{j-1}(t-\sigma))$$

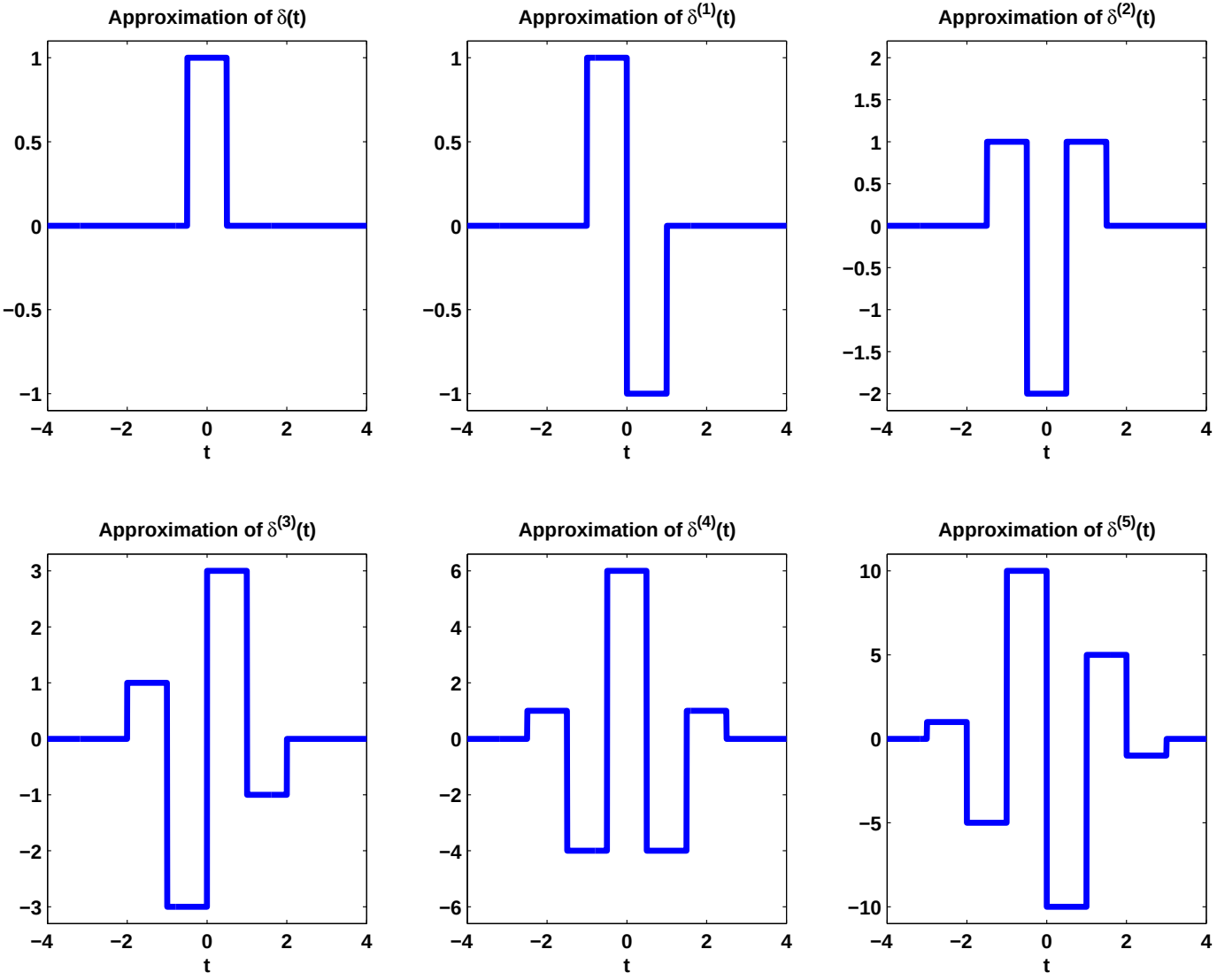
Мгновенное управление

$$u(t) = h^{(0)}\delta(t-t_0) + h^{(1)}\delta'(t-t_0) + \cdots + h^{(k)}\delta^{(k)}(t-t_0)$$

заменяется на **быстрое управление**

$$u_\sigma(t) = h^{(0)}\Delta_\sigma^0(t-t_0) + h^{(1)}\Delta_\sigma^1(t-t_0) + \cdots + h^{(k)}\Delta_\sigma^k(t-t_0)$$

Быстрые управления — 1



Быстрые управления — 1

Задача с быстрыми управлениями
сводится к задаче импульсного управления

$$\dot{x} = A(t)x + \mathscr{M}_\sigma(t)u, \quad \mathscr{M}_\sigma(t) = \begin{pmatrix} M_\sigma^{(0)}(t) & M_\sigma^{(1)}(t) & \cdots & M_\sigma^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

где

$$M_\sigma^{(j)}(t) = \int_t^{t+k\sigma} X(t+k\sigma,\tau)B(\tau)\Delta_\sigma^j(\tau - t)d\tau$$

При этом $\mathscr{M}_\sigma(t) \to \mathscr{B}(t)$ когда $\sigma \to 0$.

Быстрые управления — 2

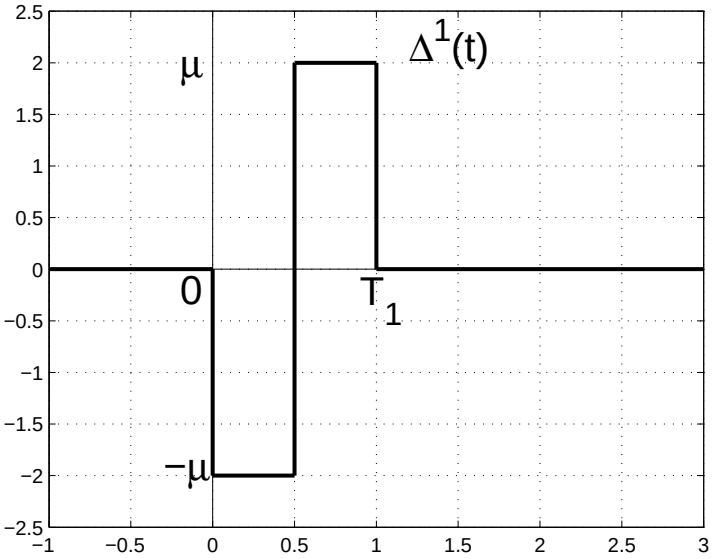
- Заранее заданное ограничение $|\Delta^k(t)| \leqslant \mu$ для каждой из производных

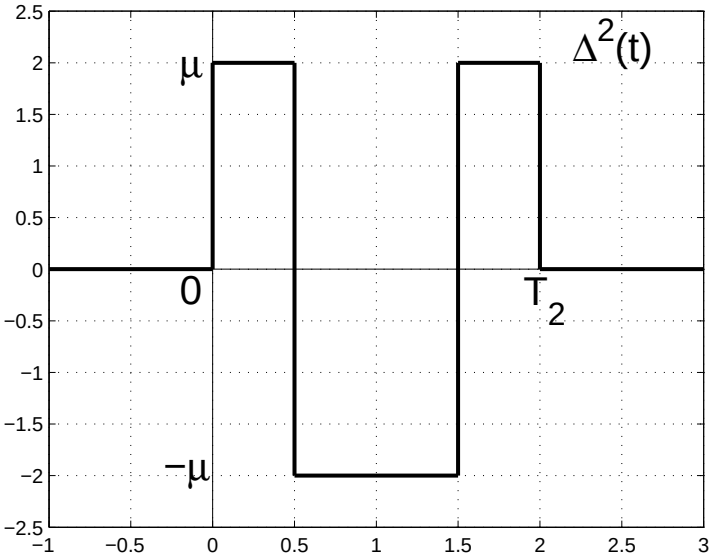
$$\Delta^0_\mu(t) = \mu \mathbf{1}_{[0,h_0]}(t), \quad h_0 = \mu^{-1}.$$

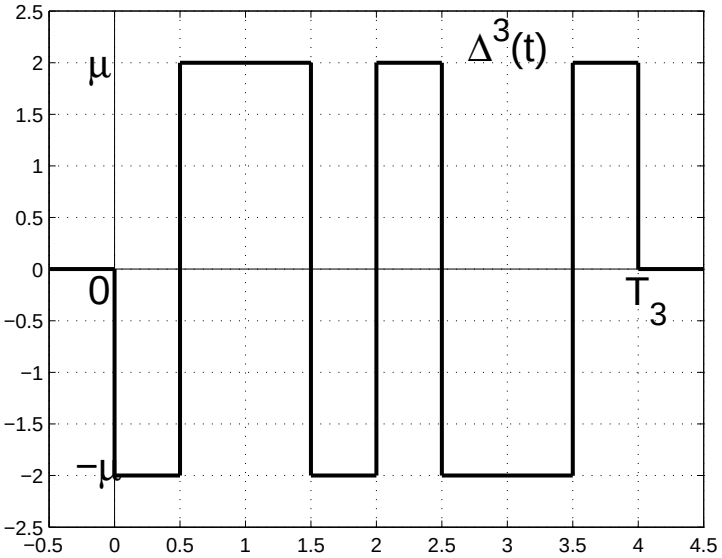
$$\Delta^k_\mu(t) = \Delta^{k-1}_\mu\left(\left(\tfrac{1}{2}t\right)^{\frac{k+1}{k}} - h_{k-1}\right) - \Delta^{(k-1)}_\mu\left(\left(\tfrac{1}{2}t\right)^{\frac{k+1}{k}}\right)$$

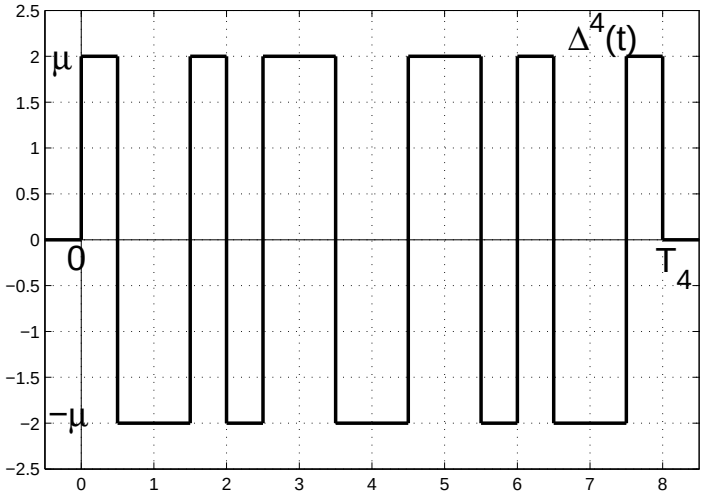
$$h_k = 2(h_{k-1})^{\frac{k}{k+1}}$$

Быстрые управления — 2









Быстрые управления — 3

- Заранее заданное ограничение $|\Delta^k(t)| \leqslant \mu$
- Минимально возможная длина аппроксимации h_k

$$\Updownarrow$$

- Заранее заданная длина аппроксимации h_k
- Минимально возможное ограничение $|\Delta^k(t)| \leqslant \mu$

Быстрые управления — 3

Проблема моментов:

$$\mu \to \inf,$$
$$|\Delta_h^n(t)| \leqslant \mu, \quad t \in [-h, h],$$

$$\int_{-h}^{h} \Delta_h^n(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$
$$\int_{-h}^{h} \Delta_h^n(t) t^n dt = (-1)^n n!$$

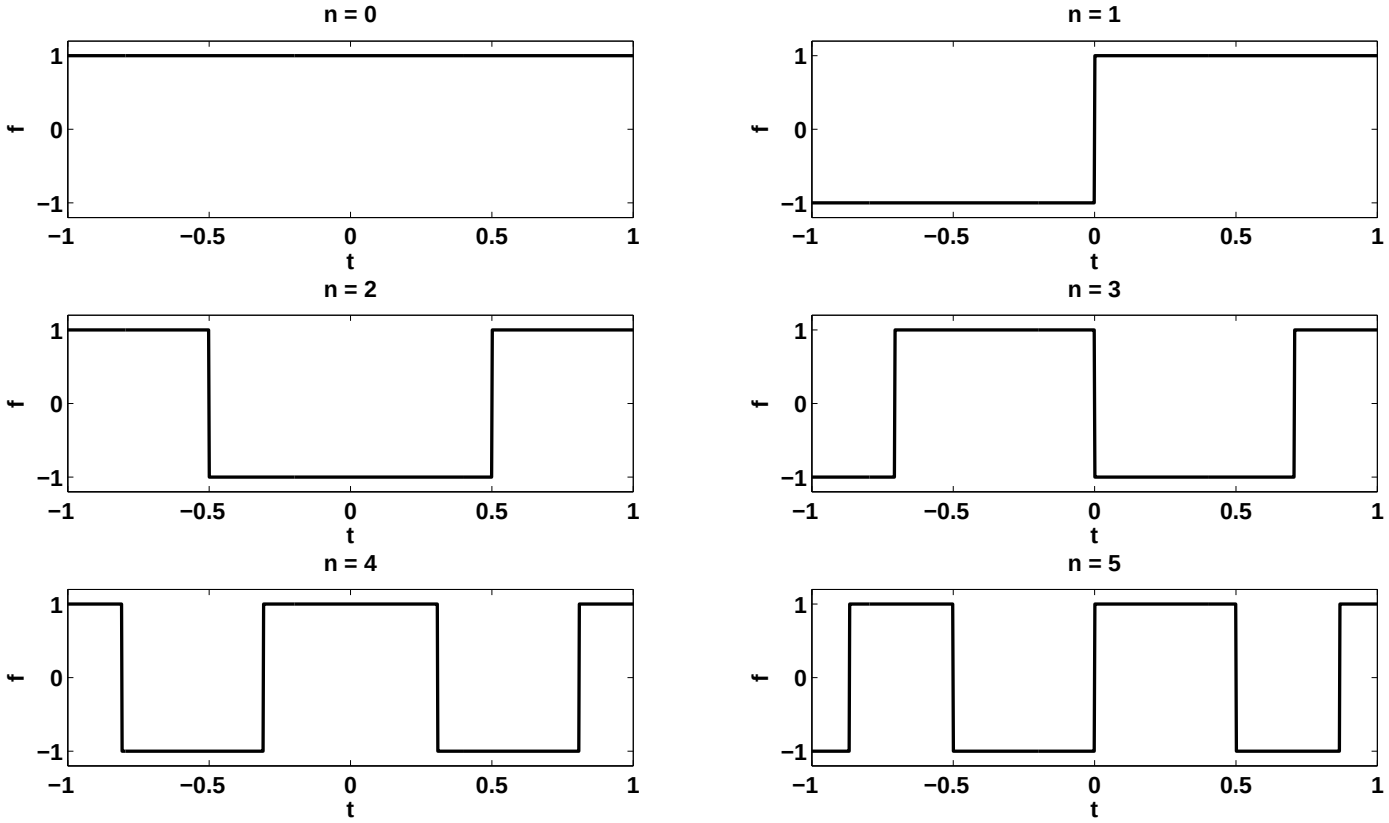
Быстрые управления — 3

Решение:

$$\Delta_h^n(t) = \frac{1}{8}(-1)^n n! \left(\frac{2}{h}\right)^{(n+1)} \operatorname{sign} U_n(ht).$$

$U_n(t)$ — многочлен Чебышёва второго рода.

Быстрые управления — 3



Быстрые управления — 3

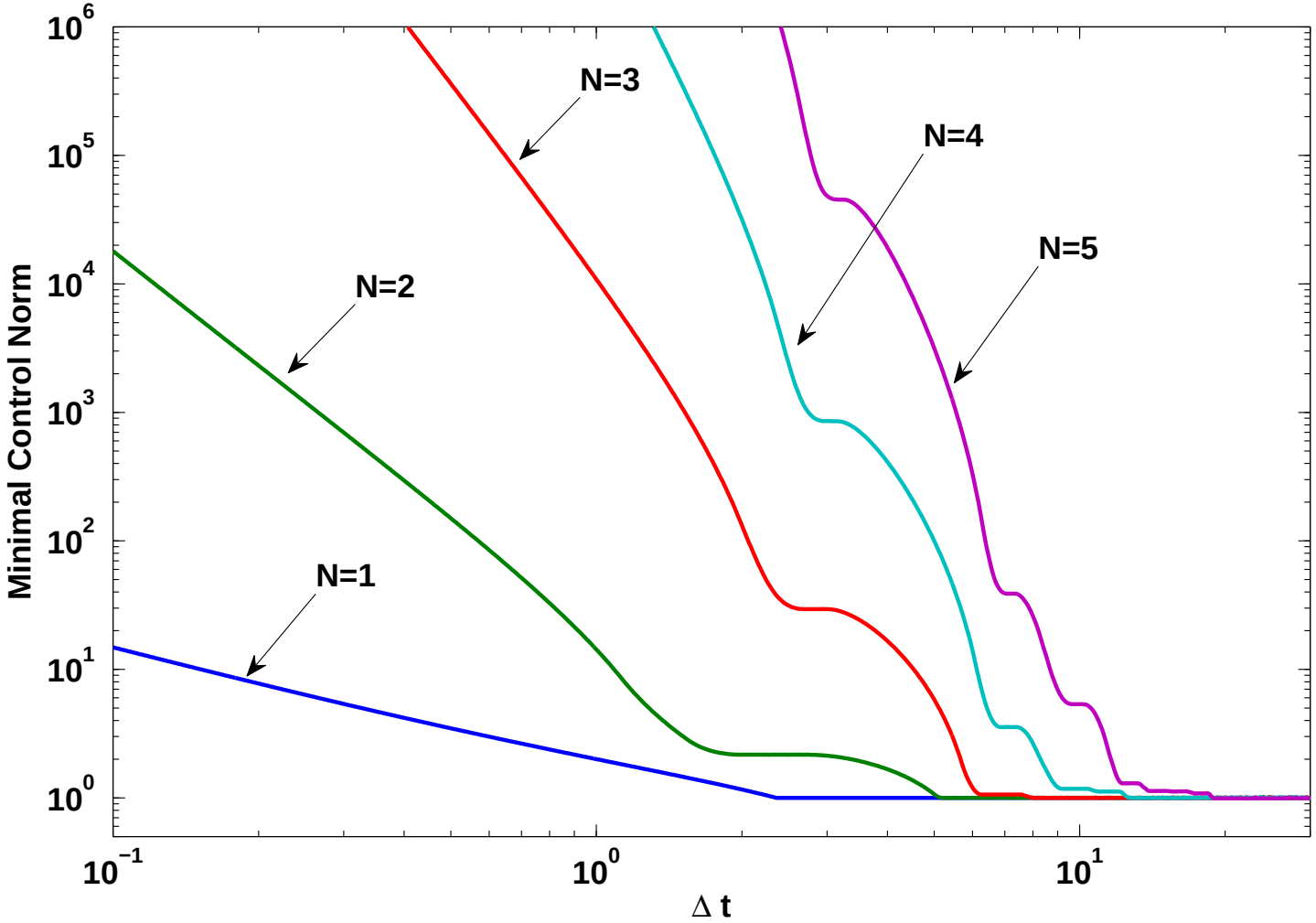
Точки переключения:

$$t_k = h\cos\frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Справедлива оценка

$$\left|\int_{-h}^{h} \Delta_h^n(t) t^k dt\right| \leqslant 2^{n-1}\frac{n!}{k+1}h^{k-n}, k = n+1, n+2, \ldots.$$

Порядок роста быстрых управлений



Литература

- **Красовский Н. Н.** Об одной задаче оптимального регулирования // ПММ. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.
- **Neustadt L. W.** Optimization, a moment problem and nonlinear programming // SIAM Journal on Control. 1964. V. 2. N. 1. P. 33–53.
- **Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.** К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360–1370.
- **Kurzhanski A. B., Daryin A. N.** Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. N. 2. P. 213–227.