

УДК 517.977.54

А. Н. Дарьин, А. Ю. Малакаева

## Численные методы синтеза импульсных управлений для линейных систем<sup>1</sup>

Москва, факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Описываются численные алгоритмы синтеза импульсных управлений для линейной системы, основанные на аппроксимации многогранниками множеств достижимости и полярных множеств. Показывается связь последних с функцией цены в методе динамического программирования. Приводятся результаты численного моделирования.

### 1 Введение

Задачи минимизации вариации управления на траекториях линейной управляемой системы [1, 2, 3] возникают при управлении в пространстве мгновенными коррекциями движения, в системах с коммуникационными ограничениями, в гибридных системах. Соответствующие оптимальные управления имеют импульсный характер, то есть являются обобщёнными функциями.

Решения задач импульсного управления искались в основном в классе программных управлений [4, 5, 6]. Применение методов динамического программирования [7, 8] позволяет представить оптимальное значение вариации в виде решения квазивариационного неравенства типа Гамильтона–Якоби–Беллмана (Г–Я–Б) [9] и исходя из этого указать множество состояний, в которых совершается скачок, и величины этих скачков, то есть найти синтез импульсных управлений. Такой подход также позволяет решать задачи, допускающие управления в виде производных обобщённых функций (см. [2]).

В данной работе описываются численные алгоритмы построения синтеза импульсных управлений для линейной системы, основанные на аппроксимации многогранниками множеств достижимости и полярных множеств. Показывается связь последних с функцией цены. В завершение приводятся результаты численного моделирования.

### 2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу импульсного управления

$$J(U(\cdot)) = \text{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$dx(t) = A(t)x(t) dt + B(t) dU(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1 + 0) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор,  $U(\cdot) \in BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$  — обобщенное управление,  $\text{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot)$  — полная вариация управления на отрезке  $[t_0, t_1]$ ,  $BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$  — пространство функций ограниченной вариации со значениями в  $\mathbb{R}^m$ . Матричные функции

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00332), программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-5344.2006.1) и научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № РНП 2.1.1.1714).

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  непрерывны. Будем считать, что функция  $x(t)$ , являющаяся решением (2), непрерывна слева при всех  $t$ .

Конечный момент времени  $t_1$  зафиксирован. Задача с ненулевым правым концом ( $x(t_1 + 0) = x_1$ ) может быть сведена к (1)–(2) заменой переменных.

**Задача 1.** Найти синтез управлений в задаче (1)–(2), то есть указать множество  $\mathbb{J} \subseteq [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$  состояний  $(t, x)$ , в которых управление должно иметь импульс, и значение этого импульса в зависимости от состояния  $v(t, x) : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ .

Потребуем, чтобы синтез управлений не допускал последовательных скачков в один момент времени : если  $(t, x) \in \mathbb{J}$ , то для точки  $x' = x + Bv(t, x)$  верно  $(t, x') \notin \mathbb{J}$ .

После изложения численных алгоритмов для задачи 1 будет указано, каким образом они могут быть применены к минимизации функционала типа Майера–Больца и к задаче с производными обобщённых функций (задачи 2 и 3 далее, соответственно).

**Задача 2.** Найти синтез управлений (множество  $\mathbb{J}$  и функцию  $v$ ) для задачи минимизации функционала

$$J(U(\cdot)) = \text{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \rightarrow \inf,$$

где заданная терминальная функция  $\varphi(x)$  — собственная, замкнутая, выпуклая [10].

Подробная постановка задачи для системы с производными обобщённых функций приводится в [2]. Считаем, что матричные функции  $A(t)$ ,  $B(t)$  являются  $k$  раз непрерывно дифференцируемыми на интервале  $(\alpha, \beta) \supset [t_0, t_1]$ .

**Задача 3.** Найти синтез управления — множество состояний  $\mathbb{J}$ , в которых происходят скачки, и значения импульсов каждого порядка  $v_0(t, x)$ ,  $v_1(t, x)$ ,  $\dots$ ,  $v_k(t, x)$  в этих состояниях для задачи минимизации функционала

$$J(U(\cdot)) = N^* \left( \frac{dU}{dt} \right) \rightarrow \inf$$

при условии (2). Здесь  $N^*$  — сопряжённая норма к норме

$$N(\psi(t)) = \max_{t \in [t_0, t_1]} \left( \|\psi(t)\|^2 + \|\psi'(t)\|^2 + \dots + \|\psi^{(k)}(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

на пространстве  $D_{km}[t_0, t_1]$   $k$  раз дифференцируемых функций со значениями в  $\mathbb{R}^m$ . При этом если  $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{J}$ , то в окрестности момента  $\hat{t}$  управление имеет вид

$$dU(t) = \sum_{i=0}^k v_i(\hat{t}, \hat{x}) \delta^{(i)}(t - \hat{t}). \quad (3)$$

### 3 Метод динамического программирования

Напомним необходимые факты из [7, 8].

Функцией цены  $V(t_0, x_0)$  задачи 1 называется оптимальное значение вариации управления:

$$V(t_0, x_0) = \inf_{U(\cdot)} \{ J(U(\cdot)) \mid \text{при условии (2)} \}.$$

Она может быть представлена в виде [4]

$$V(t, x) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle p, X(t_1, t)x \rangle}{\|B^T(\cdot)X^T(t_1, \cdot)p\|_{C[t_0, t_1]}}, \quad (4)$$

где  $X(t, \tau)$  — фундаментальная матрица, то есть решение задачи Коши для матричного дифференциального уравнения  $\frac{\partial X(t, \tau)}{\partial t} = A(t)X(t, \tau)$ ,  $X(\tau, \tau) = I$ .

Функция цены  $V(t, x)$  является вязкостным решением квазивариационного неравенства типа Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} \min \{H_1(t, x, V_t, V_x), H_2(t, x, V_t, V_x)\} &= 0, \\ H_1(t, x) &= H_1(t, x, V_t, V_x) = V_t + \langle V_x, A(t)x \rangle, \\ H_2(t, x) &= H_2(t, x, V_t, V_x) = \min_{u \in S_1} \langle V_x, B(t)u \rangle + 1 = 1 - \|B^T(t)V_x\| \end{aligned} \quad (5)$$

с начальным условием

$$V(t_1, x) = \begin{cases} \|B^\oplus(t_1)x\|, & x \in \text{im } B; \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь  $S_1$  — единичная сфера, символ  $\oplus$  означает псевдообратную матрицу.

В соответствии с (5) в любой позиции  $(t^*, x^*)$  имеем одну из двух возможностей:

- либо  $H_1 = 0$ , и тогда можно выбрать  $dU(t^*) = 0$ ;
- либо  $H_1 > 0$ , тогда обязательно  $H_2 = 0$ , и управление должно совершить скачок в направлении  $-B^T(t^*)V_x$ , то есть управление в окрестности этой точки имеет вид  $dU(t) = -\alpha B^T(t^*)V_x \delta(t - t^*)$ . При этом величина скачка  $\alpha$  определяется из условий  $H_2(t^*, x^* - \beta B(t^*)B^T(t^*)V_x(t^*, x^*)) = 0$ ,  $\beta \in [0, \alpha]$ ;  $H_1(t^*, x^* - \alpha B(t^*)B^T(t^*)V_x(t^*, x^*)) = 0$ .

## 4 Численные алгоритмы

Функция цены (4) является положительно однородной по переменной  $x$ . Следовательно, её можно представить в виде калибровочной функции

$$V(t, x) = \min \{ \alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in \mathcal{X}_1[t] \}, \quad (6)$$

где  $\mathcal{X}_1[t]$  — непустой выпуклый компакт. Поскольку  $\mathcal{X}_1[t] = \{x \mid V(t, x) \leq 1\}$ , то  $\mathcal{X}_1[t]$  — множество достижимости системы (2) в обратном времени из точки  $x(t_1 + 0) = 0$  при условии  $\text{Var}_{[t, t_1]} U(\cdot) \leq 1$ :

$$\mathcal{X}_1[t] = \mathcal{X}_1(t; t_1, x_1) = \left\{ x(t; t_1 + 0, 0|U) \mid \text{Var}_{[t_0, t_1]} U(s) \leq 1 \right\},$$

здесь  $x = x(\cdot; t_1 + 0, x_1|U)$  — решение системы при управлении  $U$ , выпущенное из состояния  $(t_1 + 0, x_1)$ .

В силу положительной однородности функцию цены также можно представить в виде опорной функции непустого выпуклого компакта  $\mathcal{Z}[t]$ :

$$V(t, x) = \rho(x \mid \mathcal{Z}[t]) = \sup_{p \in \mathcal{Z}[t]} \langle x, p \rangle.$$

Множество  $\mathcal{Z}[t]$  будем называть *полярным множеством*.

Описываемые численные методы основаны на аппроксимации множеств  $\mathcal{X}_1[t]$  и  $\mathcal{Z}[t]$  выпуклыми многогранниками.

#### 4.1 Множество достижимости

Множество достижимости  $\mathcal{X}_1[t]$  может быть представлено в виде выпуклой оболочки точек, достижимых одним импульсом единичной амплитуды [3]:

$$\mathcal{X}_1[t] = \text{conv} \bigcup_{\tau \in [t, t_1]} \bigcup_{\|u\|=1} \{X(t, \tau)B(\tau)u\}. \quad (7)$$

Внутреннюю аппроксимацию множества достижимости  $\mathcal{X}_1[t]$  выпуклым многогранником можно получить, заменив в (7):

- отрезок  $[t, t_1]$  на конечное множество точек  $t = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_K = t_1$ ;
- единичную сферу  $\{\|u\| = 1\}$  на конечное множество единичных векторов  $u_1, \dots, u_M$  (заметим, что в случае скалярного управления этого делать не нужно, поскольку единичная сфера в точности равна  $\{1, -1\}$ ).

Таким образом, получим множество

$$\hat{\mathcal{X}}_1[t] = \text{conv} \bigcup_{\tau \in \{\tau_0, \dots, \tau_K\}} \bigcup_{u \in \{u_1, \dots, u_M\}} \{X(t, \tau)B(\tau)u\} \subseteq \mathcal{X}_1[t].$$

Применив к нему алгоритм построения выпуклой оболочки [11], мы получим набор из  $N$  граней. Каждая грань описывается  $n$  вершинами — линейно независимыми векторами  $x_1^j, \dots, x_n^j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Опишем, каким образом можно вычислить верхнюю оценку для функции цены (6)

$$\hat{V}(t, x) = \min \left\{ \alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in \hat{\mathcal{X}}_1[t] \right\}. \quad (8)$$

Составим для каждой грани  $j$  выпуклой оболочки множества  $\hat{\mathcal{X}}_1[t]$  матрицу

$$M_j = \begin{pmatrix} x_1^j & \dots & x_n^j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Произвольный вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  может быть разложен по базису  $x_1^j, \dots, x_n^j$ , при этом коэффициенты разложения вычисляются с помощью матрицы  $M_j$ :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^j, \quad \lambda = M_j^{-1}x.$$

Найдём номер  $j$ , для которого  $x \in \text{cone} \{x_1^j, \dots, x_n^j\}$  — конусу. Последнее эквивалентно условию  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Рассмотрим точку  $y = \Lambda^{-1}x$ ,  $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \langle \mathbf{1}, \lambda \rangle$ ,  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ . Поскольку  $\sum_{i=1}^n (M_j^{-1}y)_i = 1$ , то точка  $y$  лежит на грани  $j$ . Следовательно,  $\hat{V}(t, y) = 1$ . Воспользовавшись положительной однородностью функции цены, получаем

$$\hat{V}(t, x) = \left\langle (M_j^{-1})^T \mathbf{1}, x \right\rangle, \quad M_j^{-1}x \geq 0.$$

Отсюда можно найти и градиент функции  $\hat{V}$  (в тех точках, где он существует):

$$\hat{V}_x(t, x) = (M_j^{-1})^T \mathbf{1}, \quad M_j^{-1}x \geq 0.$$

В позиции  $(t, x)$  управление может иметь импульс, если выполнено условие (см. [8]):

$$\|B^T(t)V_x\| \geq 1 \iff \|B^T(t)(M_j^{-1})^T\mathbf{1}\| \geq 1,$$

при этом направление импульса  $\hat{u} = -B^T(t)(M_j^{-1})^T\mathbf{1}$ .

Найдём амплитуду импульса  $\hat{\alpha}$ , т.ч. импульс в момент  $t$  равен  $u = \hat{\alpha}\hat{u}$ . Для этого потребуем, чтобы после скачка траектория системы пришла на границу грани  $j$ :

$$\hat{\alpha} = \max \left\{ \alpha \mid M_j^{-1}(x + \alpha B(t)\hat{u}) \geq 0 \right\}.$$

Значение  $\hat{\alpha}$  можно определить следующим образом. Пусть  $\lambda = M_j^{-1}x$ ,  $\mu = M_j^{-1}B(t)\hat{u}$ , тогда

$$\hat{\alpha} = \min_{i=1, \dots, n} \left\{ -\lambda_i \mu_i^{-1} \mid \mu_i < 0 \right\}.$$

*Замечание 1.* В целях решения задачи синтеза необходимо вычислить множество  $\hat{\mathcal{X}}_1$  для заданного набора моментов времени,  $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_M$ . При этом соответствующие выпуклые оболочки можно вычислять последовательно, воспользовавшись представлением

$$\hat{\mathcal{X}}_1[\tau_{i-1}] = \text{conv} \left\{ \left( X(\tau_{i-1}, \tau_i) \hat{\mathcal{X}}_1[\tau_i] \right) \cup \left( \bigcup_{u \in \{u_1, \dots, u_M\}} \{B(\tau_{i-1})u\} \right) \right\}.$$

## 4.2 Полярное множество

Полярное множество  $\mathcal{Z}[t]$  может быть представлено в виде (см. [8])

$$\mathcal{Z}[t] = \bigcap_{\tau \in [t, t_1]} \{p \mid \|B^T(\tau)X^T(t, \tau)p\| \leq 1\}.$$

Выберем  $K+1$  моментов времени  $t = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_K = t_1$  и  $M$  единичных векторов  $u_1, \dots, u_M \in \mathbb{R}^m$  (в случае  $m = 1$  выбираем  $M = 2$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = -1$ ), тогда

$$\mathcal{Z}[t] \subseteq \hat{\mathcal{Z}}[t] = \bigcap_{\tau \in \{\tau_0, \dots, \tau_K\}} \bigcap_{u \in \{u_1, \dots, u_M\}} \{p \mid \langle p, X(t, \tau)B(\tau)u \rangle \leq 1\}. \quad (9)$$

Множество  $\hat{\mathcal{Z}}[t]$  — внешняя оценка полярного множества  $\mathcal{Z}[t]$ , поэтому функция

$$\hat{V}(t, x) = \sup_{p \in \hat{\mathcal{Z}}[t]} \langle x, p \rangle. \quad (10)$$

является верхней оценкой для функции цены  $V(t, x)$ . Мы использовали то же обозначение ( $\hat{V}$ ), что и в предыдущем пункте, поскольку при одинаковом выборе точек  $\tau_j$  и  $u_j$  оценки (8) и (10) совпадают.

Поскольку множество  $\hat{\mathcal{Z}}[t]$  задаётся конечным набором линейных неравенств, то (10) представляет собой задачу линейного программирования.

Если значение  $\hat{V}(t, x)$  конечно, то

$$\hat{V}(t, x) = \langle x, p(t, x) \rangle, \quad p(t, x) \in \text{Arg max}_{p \in \hat{\mathcal{Z}}[t]} \langle x, p \rangle.$$

Если при этом существует единственный максимизатор  $p(t, x)$ , то функция  $\hat{V}$  дифференцируема в точке  $(t, x)$  и  $\hat{V}_x(t, x) = p(t, x)$  [12].

Управление может иметь импульс в позиции  $(t, x)$ , если выполнено условие

$$\|B^T(t)V_x\| \geq 1 \iff \|B^T(t)p(t, x)\| \geq 1,$$

направление импульса при этом  $\hat{u} = -B^T(t)p(t, x)$ . Амплитуду импульса  $\hat{\alpha}$  найдём как максимальное значение  $\alpha > 0$ , при котором  $p(t, x)$  всё ещё остаётся максимизатором в (10) после скачка, то есть

$$p(t, x) \in \operatorname{Arg} \max_{p \in \mathcal{P}[t]} \langle x + \alpha B(t)\hat{u}, p \rangle.$$

Значение  $\hat{\alpha}$  может быть найдено следующим способом. Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — активные линейно независимые ограничения в задаче (10), (9), то есть  $\langle \xi_i, p \rangle = 1, i = \overline{1, n}$ . Разложим вектор  $x$  по базису  $\{\xi_i\}$ :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i, \quad \lambda = \Xi^{-1}x, \quad \Xi = (\xi_1 \ \dots \ \xi_n).$$

Поскольку

$$\langle x, p \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \xi_i, p \rangle,$$

то необходимо  $\lambda_i \geq 0$ . Следовательно,

$$\hat{\alpha} = \max \{ \alpha \mid \Xi^{-1}(x + \alpha B(t)\hat{u}) \geq 0 \}.$$

Обозначим  $\mu = \Xi^{-1}B(t)\hat{u}$ , тогда

$$\hat{\alpha} = \min_{i=1, \dots, n} \{ -\lambda_i \mu_i^{-1} \mid \mu_i < 0 \}.$$

*Замечание 2.* В ходе моделирования процесса управления не требуется решать на каждом шаге задачу линейного программирования в (10). Пусть в момент  $\tau_k$  управление не имело импульса, и известен вектор  $p_k = p(\tau_k, x(\tau_k))$ . Пусть кроме того  $\langle p_k, B(\tau_k)B(\tau_k)u_i \rangle < 1, \forall i = \overline{1, M}$ , то есть не являются активными ограничения, ограничения, соответствующие текущему моменту  $\tau_k$ . Тогда

$$p(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1})) = X^T(\tau_k, \tau_{k+1})p(\tau_k, x(\tau_k)). \quad (11)$$

Если же сделанные предположения не выполняются, то правая часть (11) обычно является хорошим начальным приближением для поиска  $p(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1}))$ .

### 4.3 Оценка погрешности

**Теорема 1.** Пусть матричные функции  $X(t, \tau), B(t)$  липшицевы. Тогда при  $m = 1$

$$h(\hat{\mathcal{X}}_1[t], \mathcal{X}_1[t]) = O(K^{-1}),$$

а в случае  $m \geq 2$  при надлежащем выборе точек  $u_j$

$$h(\hat{\mathcal{X}}_1[t], \mathcal{X}_1[t]) = O\left(K^{-1} + M^{-\frac{2}{m-1}}\right).$$

Здесь  $h$  — метрика Хаусдорфа на пространстве компактных множеств.

*Доказательство.* В самом деле,

$$\begin{aligned} h(X(t, \tau)B(\tau)\mathcal{B}_1, X(t, \tau_j)B(\tau_j)\{u_j\}) &\leq \\ &\leq h(X(t, \tau)B(\tau)\mathcal{B}_1, X(t, \tau_s)B(\tau_s)\mathcal{B}_1) + h(X(t, \tau_s)B(\tau_s)\mathcal{B}_1, X(t, \tau_s)B(\tau_s)\{u_j\}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается как  $O(K^{-1})$  в силу липшицевости функций  $X$  и  $B$ . Если  $m = 1$ , то второе слагаемое равно нулю, в противном случае оно не превосходит

$$\|X(t, \cdot)\|_{C[t_0, t_1]} \cdot \|B(\cdot)\|_{C[t_0, t_1]} \cdot h(\mathcal{B}_1, \{u_j\}) = O\left(M^{-\frac{2}{m-1}}\right).$$

Последняя оценка доказана в статье [13], там же описан конструктивный способ оптимального выбора точек  $u_j$ .  $\square$

*Замечание 3.* Исходя из теоремы, выбирать количество точек для аппроксимации следует согласованно, а именно,  $M \sim K^{\frac{m-1}{2}}$ .

*Замечание 4.* Отметим, что число точек, необходимых для достижения данной точности аппроксимации ( $M$ ), зависит от размерности управления ( $m$ ), а не системы ( $n$ ).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,  $0 \in \text{int } \hat{\mathcal{X}}_1[t]$ . Тогда при  $m \geq 2$

$$V(t, x) \leq \hat{V}(t, x) \leq V(t, x) \left[ 1 + O\left(K^{-1} + M^{-\frac{2}{m-1}}\right) \right],$$

а при  $m = 1$  имеем  $V(t, x) \leq \hat{V}(t, x) \leq V(t, x) [1 + O(K^{-1})]$ .

*Доказательство.* Утверждение вытекает из теоремы 1 и следующей леммы.  $\square$

**Лемма 1.** Пусть  $A, B$  — непустые выпуклые компакты,  $h(A, B) = \varepsilon$  и  $\mathcal{B}_R(0) \subseteq A \subseteq B$ . Пусть  $\mu_A(x), \mu_B(x)$  — калибровочные функции множеств  $A$  и  $B$ . Тогда

$$1 \leq \frac{\mu_A(x)}{\mu_B(x)} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{R}. \quad (12)$$

*Доказательство.* Пусть  $x$  — точка на границе множества  $B$ ,  $y$  — ближайшая к  $x$  точка множества  $A$ . Считаем  $x \neq y$  (иначе  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  и неравенство (12) выполнено). Пусть  $\pi$  — плоскость, проходящая через луч  $Ox$  и точку  $y$ . В этой плоскости проведём касательную  $\ell$  к шару  $\mathcal{B}_R(0)$ , проходящую через точку  $y$  и пересекающую луч  $Ox$  в точке  $w$ . Пусть  $p$  — точка касания,  $q$  — ближайшая к  $x$  точка прямой  $\ell$ . Треугольники  $\Delta xwq$  и  $\Delta Owq$  подобны, откуда

$$\frac{\|w - x\|}{\|w\|} = \frac{\|x - q\|}{\|p\|} \leq \frac{\varepsilon}{R}.$$

С другой стороны,  $\|w - x\| = \|x\| - \|w\|$ , поэтому

$$\frac{\|x\|}{\|w\|} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{R}.$$

Поскольку точки  $y$  и  $p$  принадлежат  $A$ , то в силу выпуклости точка  $w$  также принадлежит  $A$ , откуда и следует (12).  $\square$

#### 4.4 Задача Майера–Больца

В случае задачи 2 функция цены может быть представлена в виде [8]

$$V(t, x) = \sup_{p \in \mathcal{Z}[t]} [\langle x, p \rangle - \varphi^*(p)],$$

где  $\mathcal{Z}[t]$  — полярное множество,  $\varphi^*$  — сопряжённая по Фенхелю [10] к терминальной функции  $\varphi$ .

Выберем в качестве верхней оценки для функции цены

$$\hat{V}(t, x) = \sup_{p \in \hat{\mathcal{Z}}[t]} [\langle x, p \rangle - \varphi^*(p)]. \quad (13)$$

Соотношение (13) представляет собой задачу условной оптимизации с выпуклым функционалом и линейными ограничениями. Решение этой задачи (значение  $\hat{V}(t, x)$  и оптимальный вектор  $p^*$ ) могут быть найдены методом Ньютона.

В частном случае, когда терминальная функция является квадратичной формой  $\varphi(x) = \frac{1}{2} \langle x, Mx \rangle$  с положительно определённой матрицей  $M$ , сопряжённая к ней функция также является квадратичной формой  $\varphi^*(p) = \frac{1}{2} \langle p, M^{-1}p \rangle$ . Следовательно, в этом случае (13) является задачей квадратичного программирования.

После нахождения вектора  $p^* = V_x$  синтез управлений строится по схеме, описанной в параграфе 3.

#### 4.5 Задача с производными обобщённых функций

Укажем, каким образом предложенный алгоритм может быть применён к задаче 3.

Применяя [2, теор. 3.1], получаем, что задача 3 эквивалентна задаче 1 для расширенной системы

$$\begin{aligned} dx(t) &= A(t)x(t) dt + \mathbf{B}(t) dU(t), \quad \mathbf{B}(t) = [L_0(t) \quad L_1(t) \quad \cdots \quad L_k(t)], \\ L_0(t) &= B(t), \quad L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - L'_{j-1}(t), \quad j = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $U(\cdot) \in BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{m(k+1)})$ .

Применяя алгоритм синтеза управлений для системы (14), получаем множество  $\mathbb{J}$  состояний, из которых совершается скачок, и функцию величины скачка  $v(t, x) : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}^{m(k+1)}$ . Представим её значения в виде

$$v(t, x) = \begin{pmatrix} v_0(t, x) \\ \vdots \\ v_k(t, x) \end{pmatrix}, \quad v_j(t, x) \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда  $v_j(t, x)$  и есть те функции величины скачка, которые необходимо найти в задаче 3; управление при этом представляется в виде (3).

## 5 Пример

Рассмотрим задачу об успокоении колебаний гармонического осциллятора управляющей силой, приложенной через интегратор:

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t) dt, \\ dx_2(t) = -x_1(t) dt + x_3(t) dt, \\ dx_3(t) = dU(t), \\ x(t_0) = x_0, x(t_1 + 0) = 0, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad N^* \left( \frac{dU}{dt} \right) \rightarrow \inf.$$

Здесь допускаются управления, содержащие первые производные дельта-функций.

Эта задача эквивалентна задаче 1 для следующей системы:

$$dx(t) = Ax(t) dt + \mathbf{B} dU(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функция цены была вычислена с помощью алгоритма, описанного в п. 4.1.

На рис. 1 показаны линии уровня функции цены  $V(\pi, x)$  на единичной сфере для момента времени  $\pi$ . Ось  $x_3$  направлена ортогонально плоскости рисунка. Принимая во внимание положительную однородность и симметричность функции цены, приведённые на рисунке данные полностью определяют значения функции цены во всём пространстве.

Подстановка найденной функции цены в квазивариационное неравенство Г–Я–Б (5) показала, что гамильтониан  $H_2$  всюду равен нулю, следовательно, оптимальное управление может иметь скачок в любом состоянии (и, следовательно, не является единственным).

На рис. 2 показано соотношение между компонентами  $v_0(\pi, x)$  и  $v_1(\pi, x)$  (также на поверхности единичной сферы). Здесь значение 1 соответствует  $v_0 = 0$  (импульс вида дельта-функции), значение 0 означает  $v_1 = 0$  (используются только импульсы вида  $\delta^{(1)}(t - \tau)$ ), промежуточные значения соответствуют комбинациям импульсов обоих типов.

На рис. 3 показана область векторов  $x$ , в которых управление обязано иметь скачок в момент  $t = \pi$ .

В заключение авторы выражают благодарность академику А. Б. Куржанскому за постановку задачи и ценные замечания.

## Список литературы

- [1] Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования // ПММ. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.
- [2] Куржанский А. Б., Осипов Ю. С. К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360–1370.
- [3] Neustadt L. W. Optimization, a moment problem and nonlinear programming // SIAM Journal on Control. 1964. V. 2. N. 1. P. 33–53.

- [4] *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [5] *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [6] *Дыхта В. А., Самсонок О. Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2003.
- [7] *Куржанский А. Б.* О синтезе систем с импульсными управлениями // Труды 1-ой Российской мультikonференции по проблемам управления. 2006. Приложение к журналу «Вопросы мехатроники, робототехники и управления».
- [8] *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В.* Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 11. С. 1491–1500.
- [9] *Bensoussan A., Lions J.-L.* Contrôle impulsionnel et inéquations quasi variationnelles. Paris, 1982.
- [10] *Рокаффеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [11] *Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H.* The quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1996. V. 22. N. 4. P. 469–483.
- [12] *Демьянов В. Ф.* Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
- [13] *Dudley R. M.* Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries // Journal of Approximation Theory. 1974. V. 10. N. 3. P. 227–236.

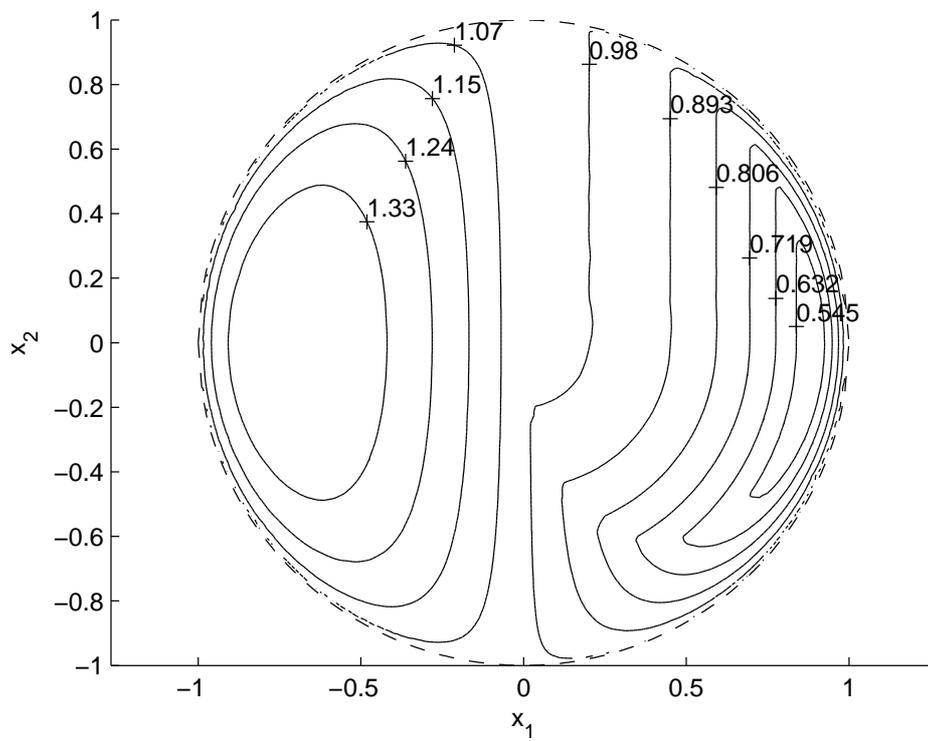


Рис. 1:

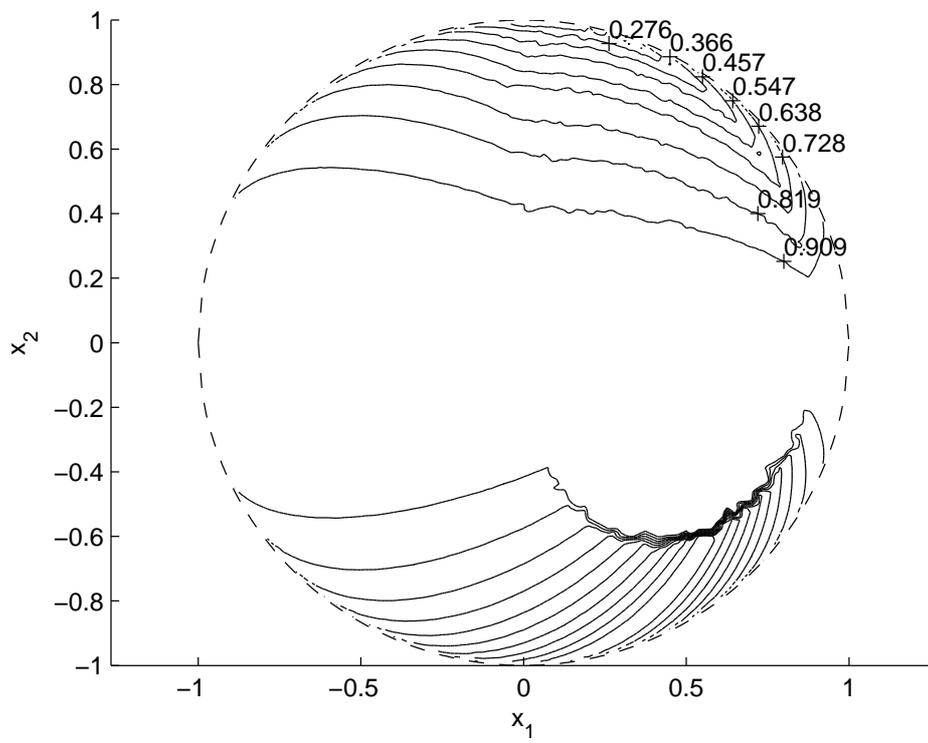


Рис. 2:

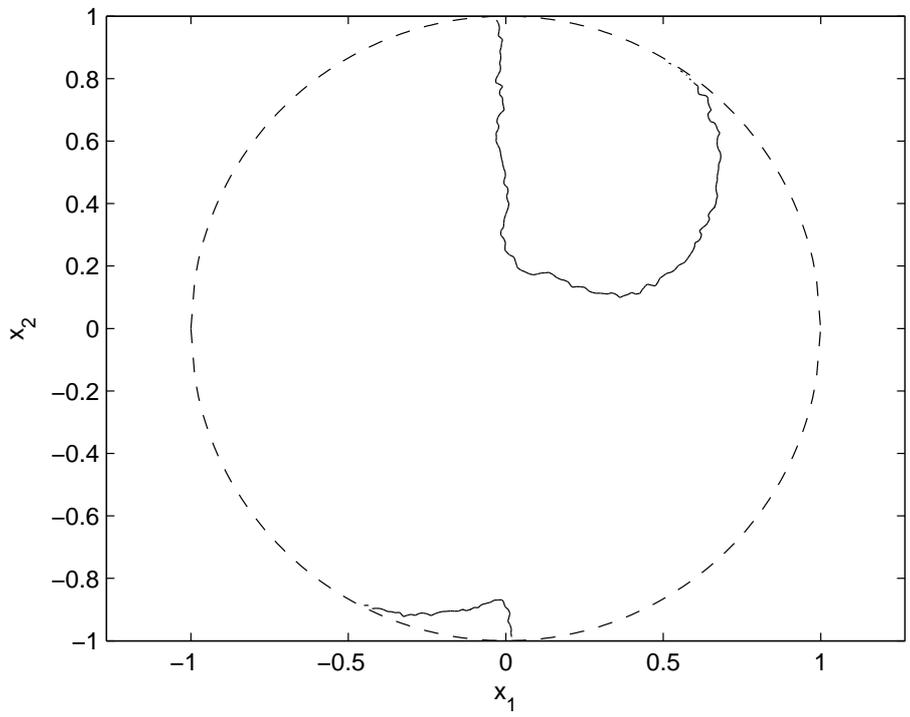


Рис. 3:

- рис. 1 Значения функции цены  $V(\pi, x)$  на единичной сфере
- рис. 2 Соотношение между компонентами управления  $v_0(\pi, x)$  и  $v_1(\pi, x)$  на единичной сфере
- рис. 3 Векторы единичной сферы, в которых управление должно иметь скачок при  $t = \pi$