Вычисление инвариантных множеств линейных систем большой размерности

А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

МГУ имени М. В. Ломоносова
Ф-т вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Киев, 3 октября 2012 года

Задача

- Система: $\dot{x} = A(t)x + u + v, \quad t \in [t_0, t_1]$
- Ограничения: $u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t)$
- Цель: $x(t_1) \in \mathcal{M}$
- Синтез: $\mathcal{U}(t, x)$
- Множество разрешимости: $\mathcal{W}[t]$

Эллипсоидальная аппроксимация

- Эллипсоид: $\mathcal{E}(q,Q)$

$$\rho(\ell \mid \mathcal{E}(q,Q)) = \langle \ell, q\rangle + \langle \ell, Q\ell\rangle^{\frac{1}{2}}$$

- Эллипсоидальные ограничения:

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(0, P(t)), \quad \mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(0, Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(0, M)$$

Эллипсоидальная аппроксимация

$$\mathcal{W}^-[t] = \mathcal{E}(0, W(t))$$

- Уравнение внутренней аппроксимации

A. B. Kurzhanski, P. Varaiya // Optim. Meth. & Software, V. 17, N. 2, 2002.

A. A. Kurzhanski, P. Varaiya. Ellipsoidal Toolbox, 2005.

$$\dot{W} = AW + WA^T - W^{\frac{1}{2}}TP^{\frac{1}{2}} - P^{\frac{1}{2}}T^TW^{\frac{1}{2}} + \pi W + \pi^{-1}Q$$

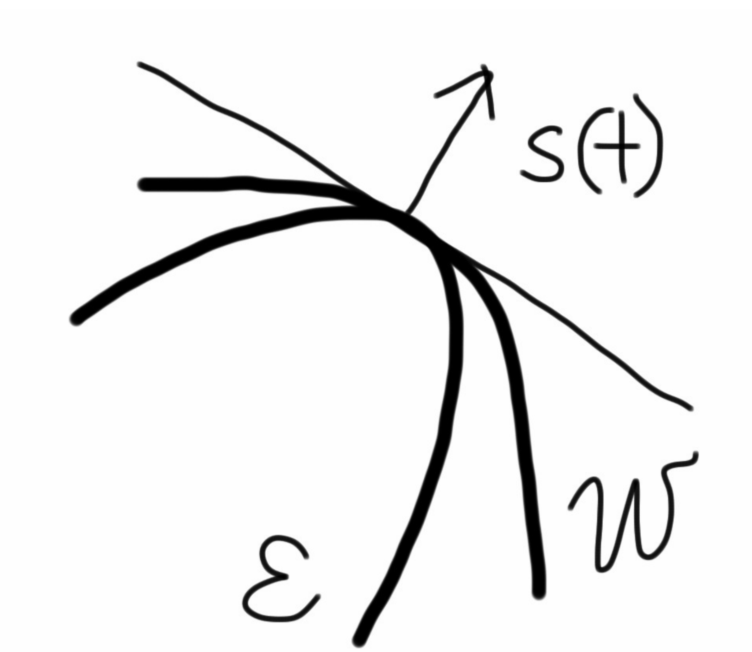
$$TT^T = I, \quad TP^{\frac{1}{2}}s \parallel W^{\frac{1}{2}}s \qquad \dot{s} = -A^Ts, \quad s(t_1) = \ell$$

$$\pi = \frac{\langle s, Qs\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle s, Ws\rangle^{\frac{1}{2}}} \qquad W(t_1) = M$$

Эллипсоидальная аппроксимация

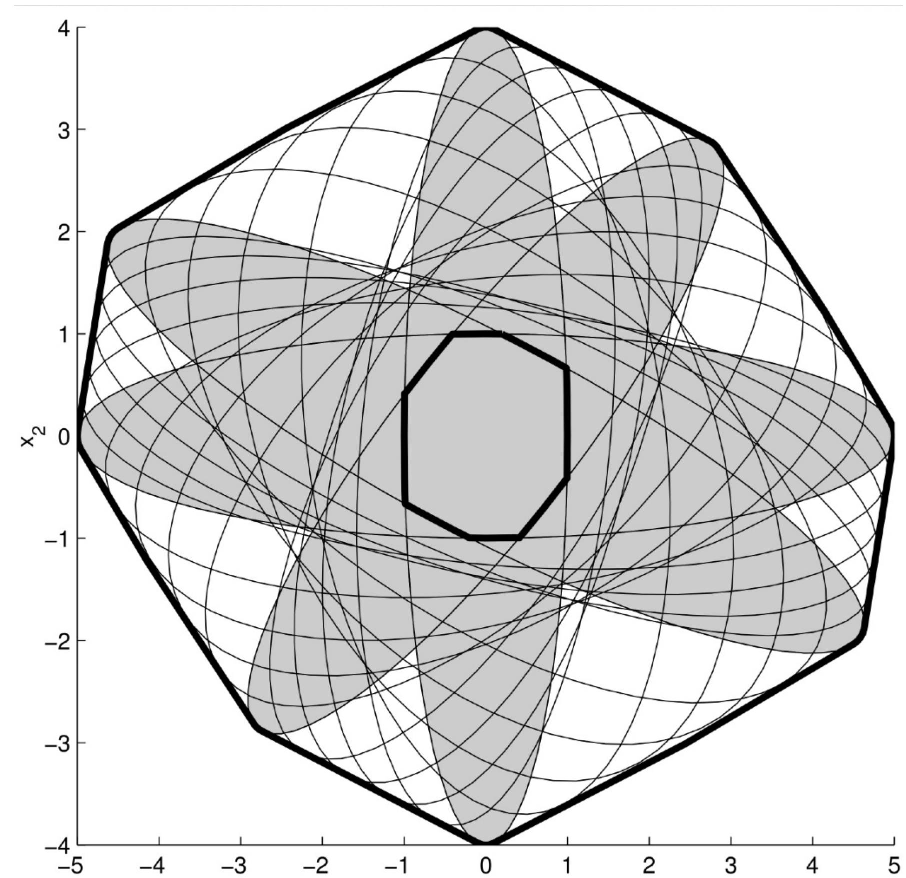
- **Тугость**:

$$\rho(s(t) \mid \mathcal{W}^-[t]) = \rho(s(t) \mid \mathcal{W}[t])$$



- **Набор** оценок

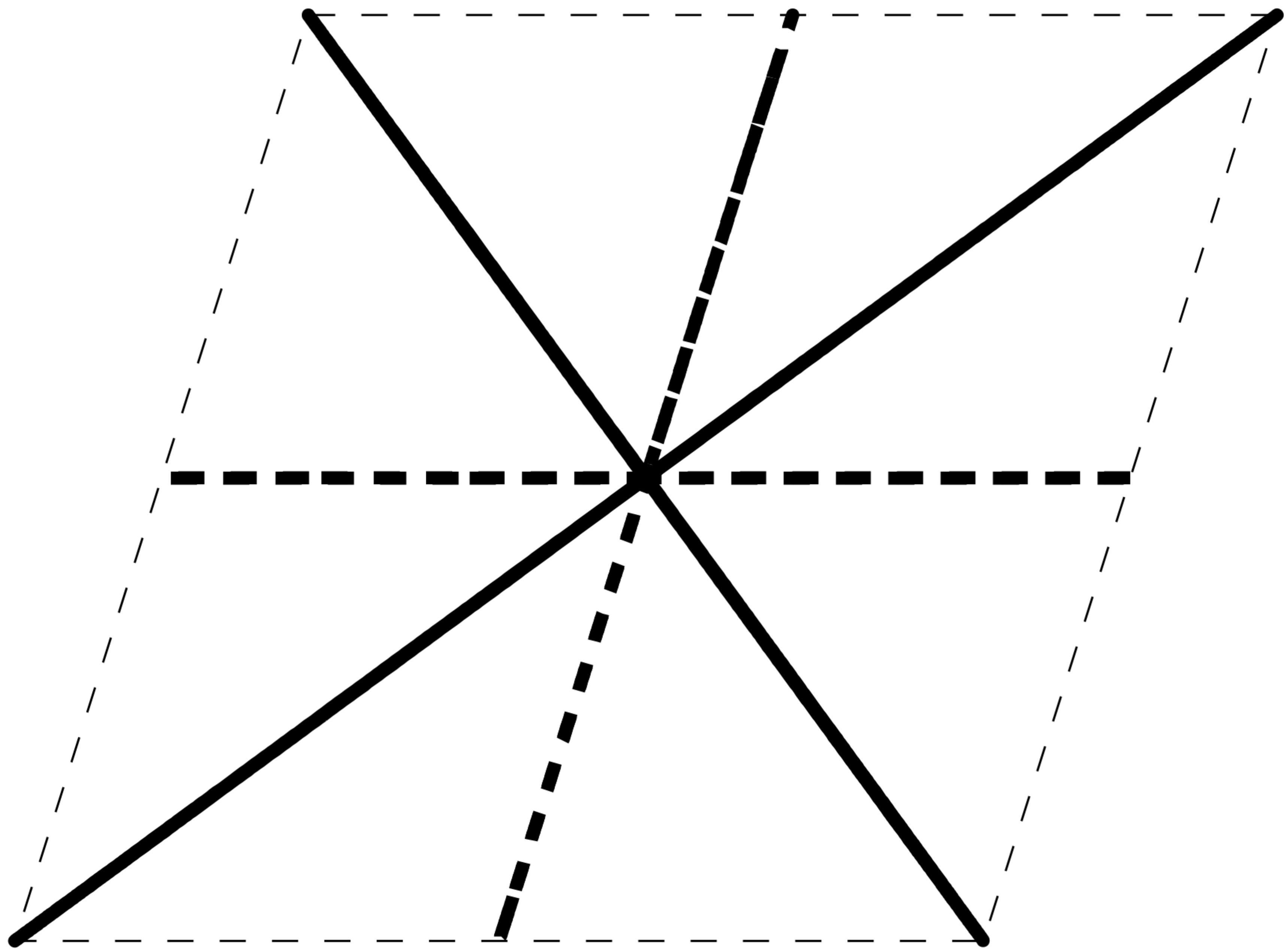
$$\ell = \ell_i, \quad i = 1, \ldots, k$$



Системы высоких размерностей

- Регуляризация аппроксимаций: комбинирование оценок
- Вычисление матрицы поворота: эффективно и с требуемыми свойствами
- Параллельные вычисления

Вырожденность аппроксимаций



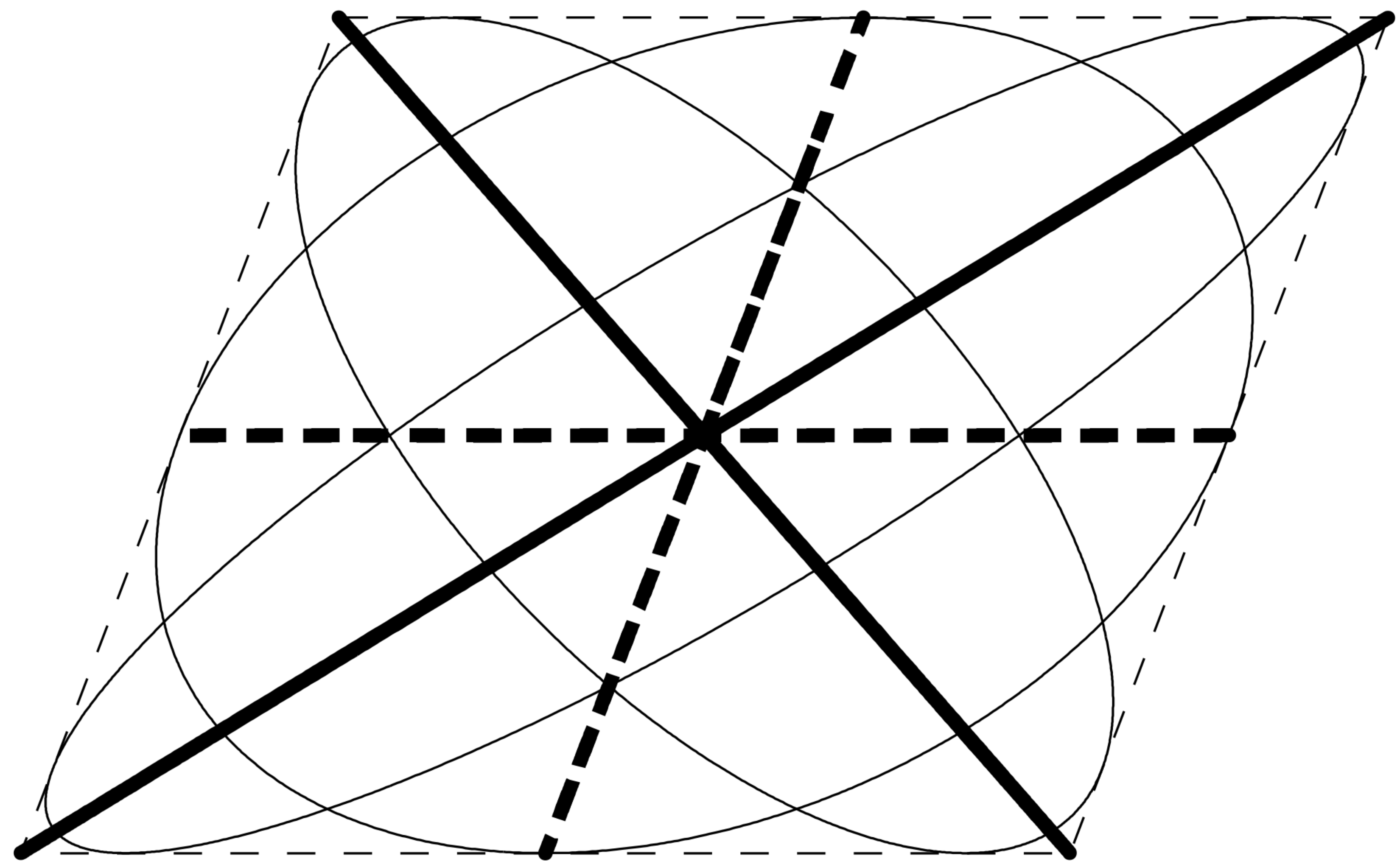
Идея решения проблемы

- Вырожденность - следствие тугости
    - **Ослабить требование тугости**
      (но не отказываться от него!)

- Имеем набор аппроксимаций
    - **Скомбинировать аппроксимации**

Регуляризация суммы эллипсоидов

$$Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha) Q_2$$



Регуляризация трубки разрешимости

$$W_i(t_1) = M, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\dot{W}_i = AW_i + W_i A^T - W_i^{\frac{1}{2}} T_i P^{\frac{1}{2}} - P^{\frac{1}{2}} T_i^T W_i^{\frac{1}{2}} + \pi_i W_i + \pi_i^{-1} Q +$$
$$+ \gamma \left(\sum_{j=1}^m \beta_{i,j} W_j(t) - W_i(t) \right)$$

$$T_i T_i^T = I, \quad T_i P^{\frac{1}{2}} s_i \parallel W_i^{\frac{1}{2}} s_i$$

$$\dot{s}_i = -A^T s_i, \quad s_i(t_1) = \ell_i$$

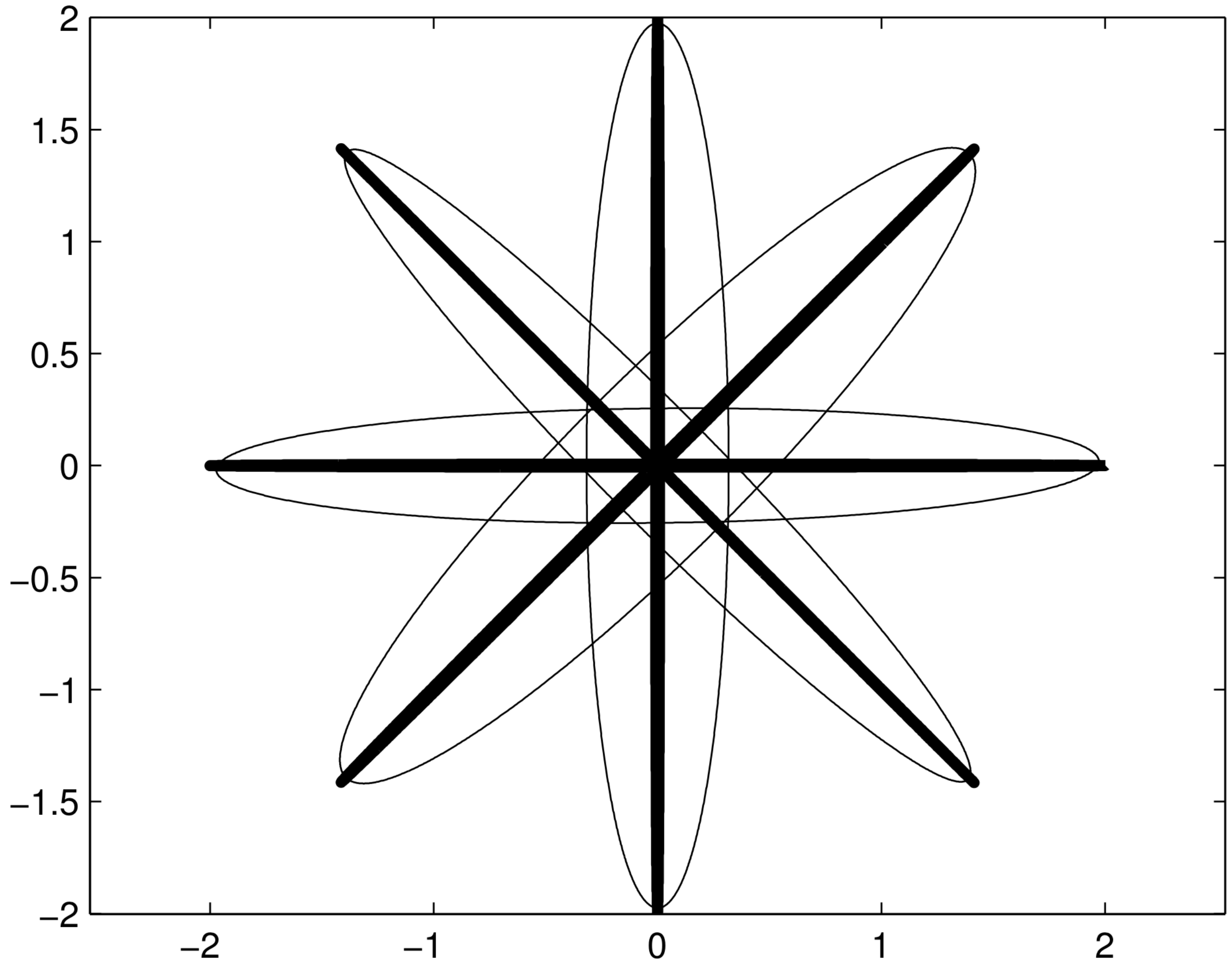
$$\pi_i = \frac{\langle s_i, Q s_i \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle s_i, W_i s_i \rangle^{\frac{1}{2}}}$$

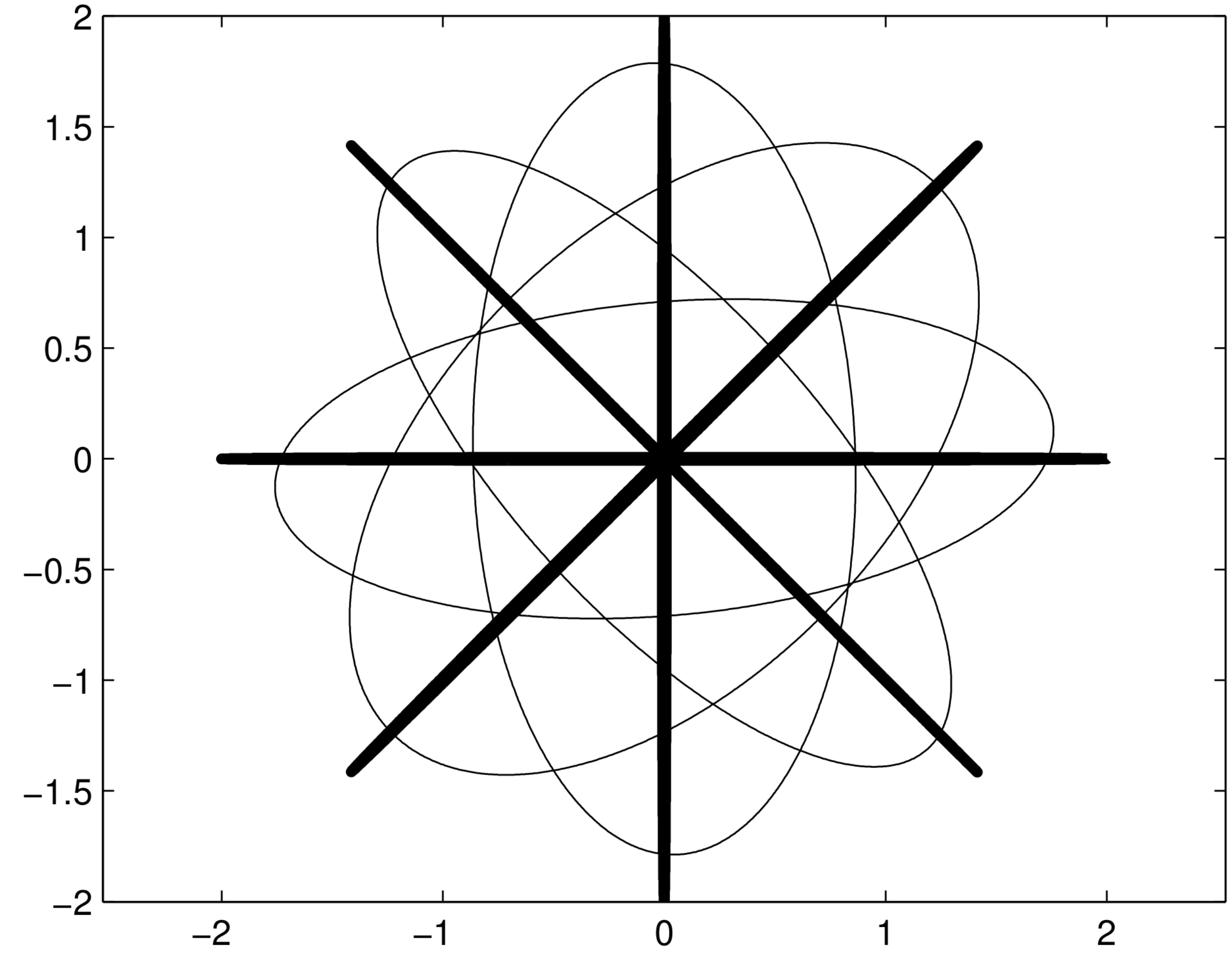
$$W_i(t_1) = M$$

$$\sum_{j=1}^m \beta_{ij} = 1$$

$$\gamma, \beta_{i,j} \geq 0$$

Регуляризация трубки разрешимости





Свойства "перемешанных" оценок

- $\mathcal{W}_i^-[t] \subseteq \mathcal{W}[t]$
- Эволюционное уравнение $\mathcal{W}^-[t] = \operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^m \mathcal{W}_i^-[t]$

$$\lim_{\sigma \to 0+} \sigma^{-1} h_+((I + \sigma A)\mathcal{W}^-[t-\sigma] + \sigma \mathcal{Q}, \mathcal{W}^-[t] - \sigma \mathcal{P}) = 0$$

- Неравенство Г-Я-Б-А $V_-(t,x) = d(x, \mathcal{W}^-[t])$

$$\min_{u \in \mathcal{P}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \{ V_t^- + \langle V_x^-, Ax + u + v \rangle \} \leq 0$$

Вычисление матрицы поворота

$Tv_1 \parallel v_2$ – ?

$T = I + Q_1(S - I)Q_1^T$

$$S = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

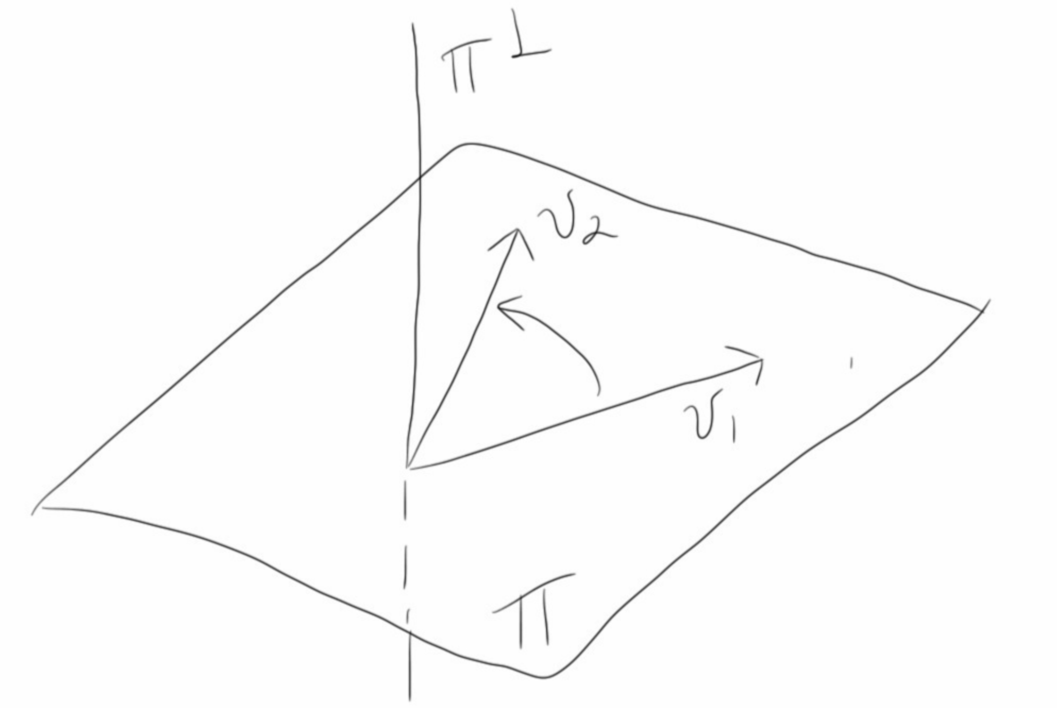
$c = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_2 \rangle,\ s = \sqrt{1 - c^2}$

$\hat{v}_i = v_i / \|v_i\|$

$Q_1 = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}$

$q_1 = \hat{v}_1$

$$q_2 = \begin{cases} s^{-1}(\hat{v}_2 - c\hat{v}_1), & s \neq 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$



Вычисление матрицы поворота

- Гладкость по v_1, v_2

- Сложность $O(n^2)$ (включая умножение)

Параллельные вычисления

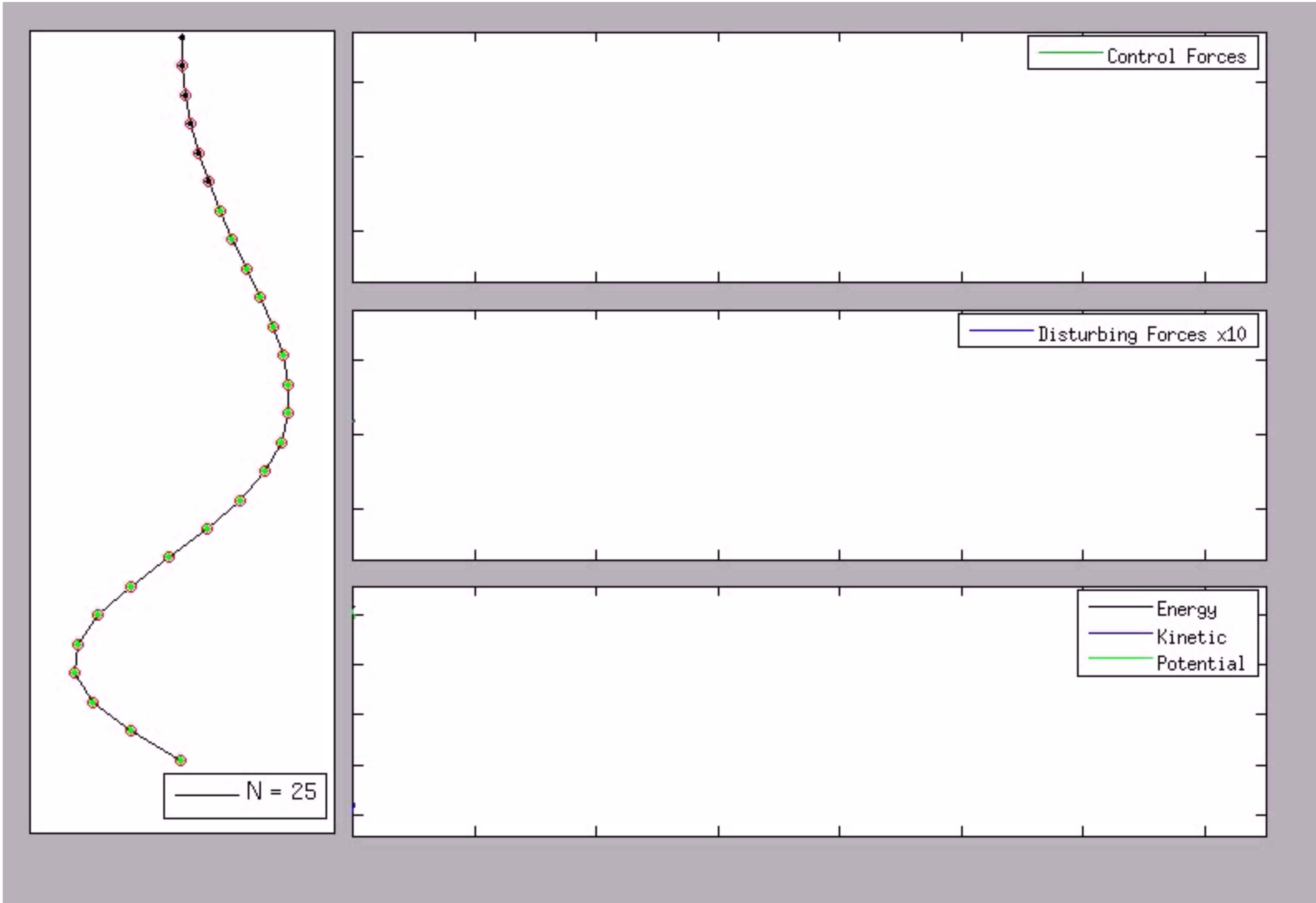
- Набор аппроксимаций делится между процессе
- Внутри процесса аппроксимации перемешиваются в соответствии с ОДУ
- Периодически аппроксимации перемешиваются между процессами

Результаты

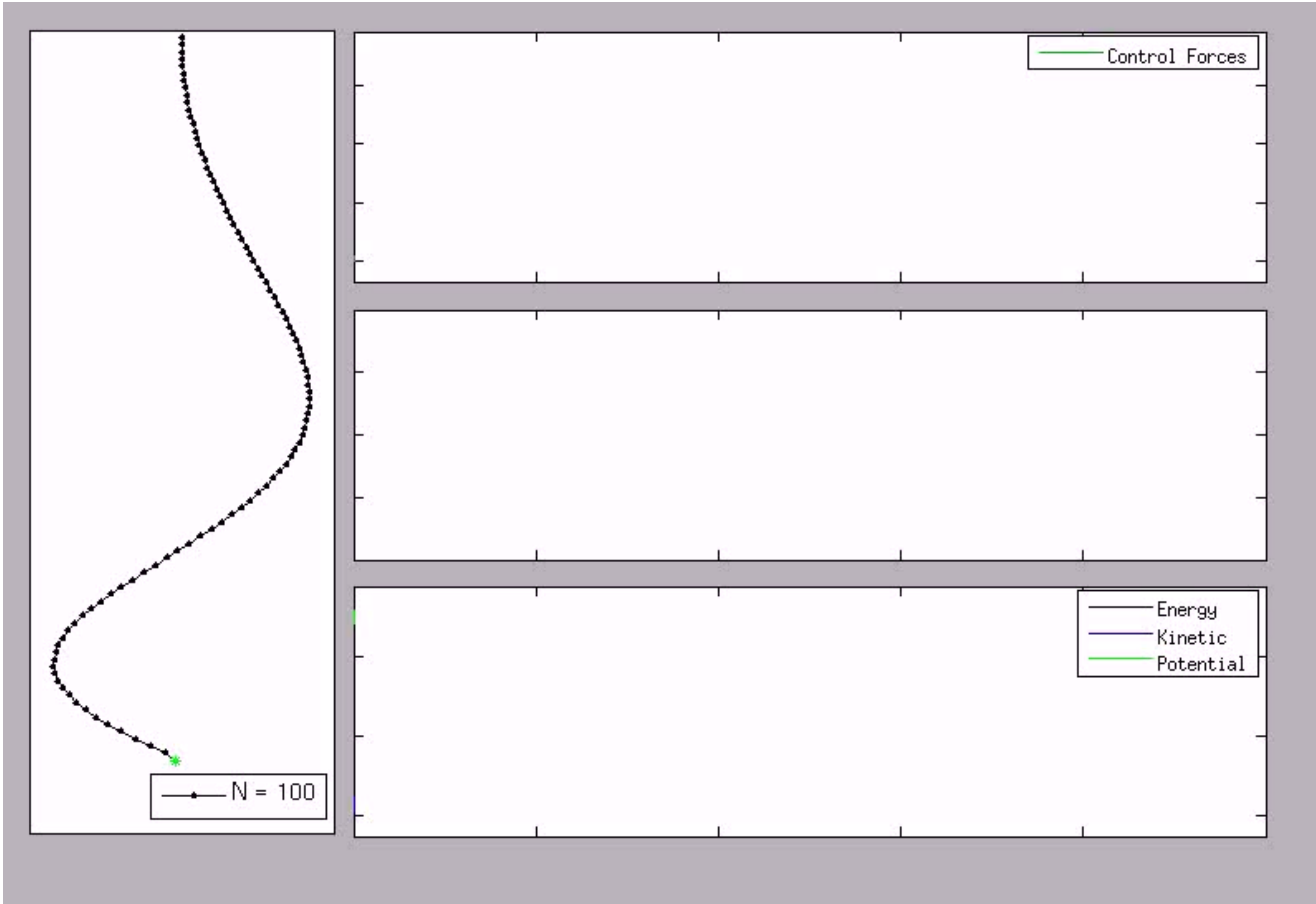
- Для многозвенной колебательной системы размерности ***n*=2*N***, *N* - число звеньев

- ***N*=25** с помехой без условия подобия
- ***N*=50** для неоднородной системы
- ***N*=50** для одностороннего управления
- ***N*=100** для скалярного управления
- ***N*=250** для управления размерности *N*

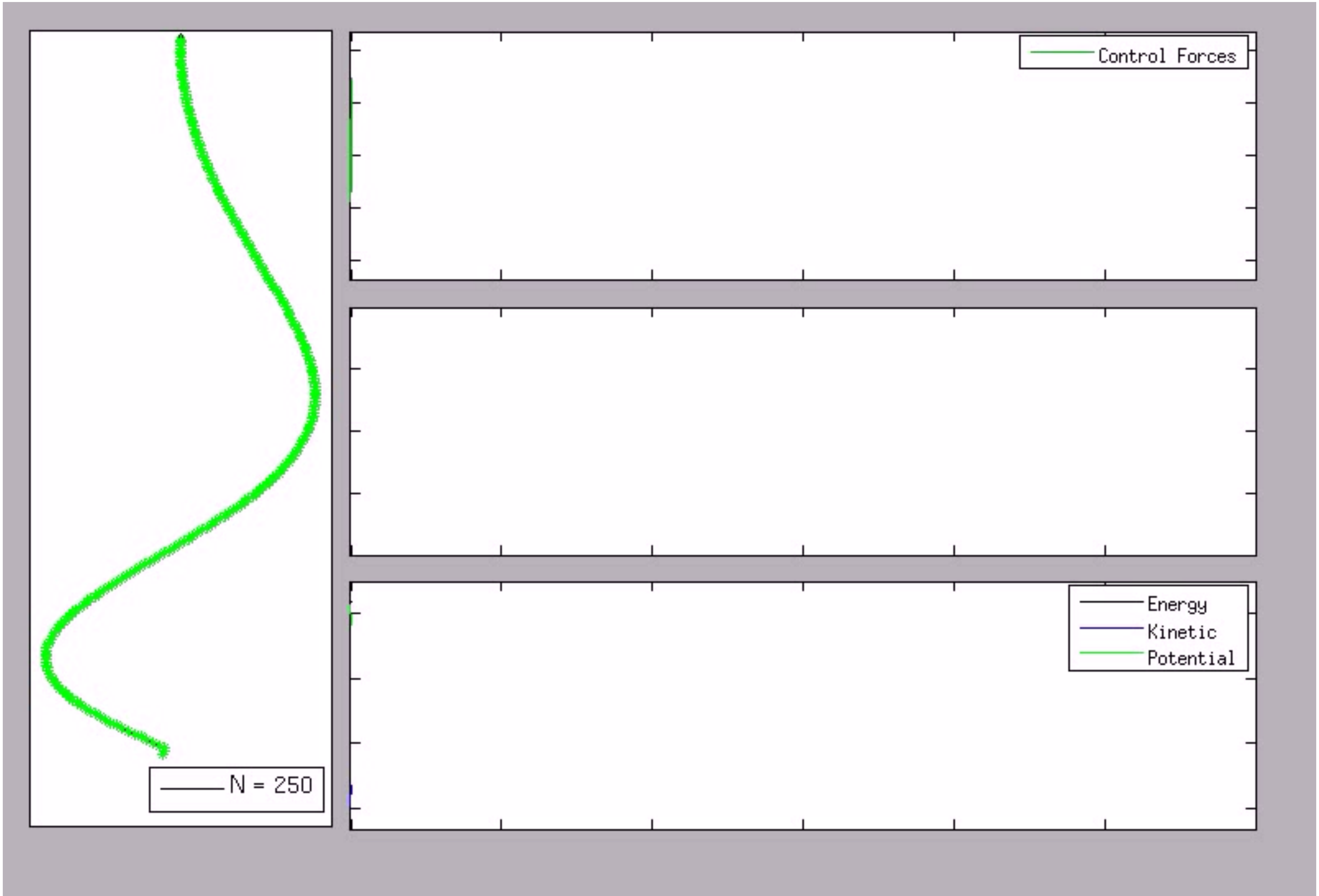
▌Примеры: N=25, многомерная помеха



Примеры: N=100, скалярное управление



Примеры: N=250 (n=500)



Публикации

- Доклады РАН. Т. 446, № 6, 2012.
- Журнал вычислительной математики и математической физики. № 1, 2013.
- IEEE Conference on Decision and Control (CDC) 2012.

Спасибо за внимание!