Быстрые управления в задаче синтеза управлений при неопределённости

А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

3 июня 2011 года

Введение

Система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t) \quad t \in [t_0, t_1]$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ — положение
- $u \in \mathbb{R}^m$ — управление
- $v \in \mathbb{R}^k$ — заранее неизвестная помеха
- $[t_0, t_1]$ — фиксированный интервал времени
- $x(t_0) = x_0$ — известное начальное положение
- Ограничения:
  - $u(t) \in \mathscr{P}(t)$
  - $v(t) \in \mathscr{Q}(t)$
- Цель управления: $x(t_1) \in \mathscr{M}$

Основа решения задачи синтеза —
альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина

Максиминное множество разрешимости:

$$W^{+}(t; t_1, \mathscr{M}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall v(\cdot) \exists u(\cdot) : x(t_1; t, x, u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathscr{M}\}$$

Альтернированные суммы:

$$\mathscr{I}^{+}_{\mathscr{T}}[t] = W^{+}(t; \tau_1, W^{+}(\tau_1; \tau_2, \ldots W^{+}(\tau_k; t_1, \mathscr{M}) \ldots))$$

Альтернированный интеграл:

$$\mathscr{I}[t] = \bigcap_{\mathscr{T}} \mathscr{I}^{+}_{\mathscr{T}}[t]$$

Введение

- Опорная функция $W^+[t]$ (случай $A(t) \equiv 0$):

$$\rho\left(\ell \mid W^+[t]\right) = \text{conv}\Big\{\rho\left(\ell \mid \mathscr{M}\right) + \\ + \int_t^{t_1} \rho\left(-\ell \mid B(t)\mathscr{P}(t)\right) dt - \int_t^{t_1} \rho\left(\ell \mid C(t)\mathscr{Q}(t)\right) dt\Big\}$$

- Необходимо вычислять выпуклую оболочку на каждом шаге разбиения.

Введение

- Решение упрощается в частных случаях.
- **Условие «полного выметания»:** $\rho\,(-\ell \mid B(t)\mathscr{P}(t)) - \rho\,(\ell \mid C(t)\mathscr{Q}(t))$ — выпуклая
- Подобие: $\mathscr{P}(t) = \alpha(t)\mathscr{Q}(t)$, $|\alpha(t)| \geq 1$
- Не требуется выпуклая оболочка:

$$\rho\left(\ell \mid W^{+}[t]\right) = \cancel{\mathrm{conv}}\Big\{\rho\,(\ell \mid \mathscr{M}) + \\ + \int_{t}^{t_1} \rho\,(-\ell \mid B(t)\mathscr{P}(t))\,dt - \int_{t}^{t_1} \rho\,(\ell \mid C(t)\mathscr{Q}(t))\,dt\Big\}$$

- **Решение сводится к программным конструкциям:**

$$\mathscr{I}[t] = W^{+}[t].$$

Примеры:

- Условие подобия ($\Rightarrow$ условие полного выметания) **выполнено** при $\mu \geq \nu$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) + v(t), \end{cases} \qquad |u| \leq \mu, \ |v| \leq \nu.$$

- Условие полного выметания **не выполнено** ни при каком ограничении на u:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) + v_2(t). \end{cases}$$

Задача

Указать класс управлений, позволяющий свести решение задачи синтеза к программным конструкциям для систем без условия полного выметания.

Быстрые управления

- Обобщённое управление (случай $t_0 = t_1$):

$$u(t) = \sum_{j=0}^{s} h_s \delta^{(s)}(t - t_1), \quad h_s \in \mathbb{R}^m$$

  - При большом s переводят вполне управляемую систему из x_0 в x_1 **за нулевое время**.
- Быстрые управления — ограниченные аппроксимации обобщённых управлений.
  - Переводят вполне управляемую систему из x_0 в x_1 **за произвольное малое время**.
- **Быстрые управления расширяют класс задач, решаемых программными конструкциями.**

Схема решения

Исходная система (1)

$\Downarrow$ (формальный переход)

Система с обобщёнными управлениями (2)

$\Downarrow$ (сведение)

Система с импульсными управлениями (3)

$\Downarrow$ (введение дополнительного ограничения)

Система с быстрыми управлениями (4)

$\Downarrow$ (решение задачи синтеза с помощью программных конструкций)

Ограниченное управление для системы (4)

$\Downarrow$ (аппроксимация)

Ограниченное управление для системы (1)

Обобщённые управления

Общий вид

$$u(t) = \sum_{j=0}^{s} \frac{d^{j+1} U_j(t)}{dt^{j+1}}, \qquad U_j(\cdot) \in BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$$

В частности, при отсутствии помехи

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{s} h_{i,j} \delta^{(j)}(t - \tau_j),$$

- $\delta(t) = \chi'(t)$
- $h_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ — направление и амплитуда обобщённых импульсов
- τ_i — моменты приложения этих импульсов

Система с импульсными управлениями

Система с обобщёнными управлениями сводится к следующей:

$$dx(t) = A(t)x(t)dx(t) + \mathscr{B}(t)dU(t) + C(t)v(t)dt$$

- $U(t) = \begin{bmatrix} U_0(t) & \cdots & U_s(t) \end{bmatrix} \in BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{m(s+1)})$ — импульсное управление
- $\mathscr{B}(t) = \begin{bmatrix} L_0(t) & \cdots & L_s(t) \end{bmatrix}$

$$L_0(t) = B(t), \quad L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - \frac{dL_{j-1}(t)}{dt}, \quad j = \overline{1, s}.$$

- цель управления — $x(t_1 + 0) \in \mathscr{M}$

$\operatorname{Range}\mathscr{B}(t) \supseteq \operatorname{Range}B(t)$ — увеличение возможностей управления

Предположение

Найдётся $s \leq n-1$, при котором $\operatorname{Range}\mathscr{B}(t) \supseteq \operatorname{Range}C(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Например:

- $A(t) \equiv A$
- $B(t) \equiv B$
- $[A, B]$ — управляемая пара

Система с ограниченными управлениями

Дополнительное ограничение

$$\mathbf{u}(t) = dU/dt \in \mathscr{P}(t).$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \mathscr{B}(t)\mathbf{u}(t) + C(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \qquad (1)$$

- $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_0(t) & \cdots & u_s(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(s+1)}$
- цель управления — $x(t_1) \in \mathscr{M}$

Выбор ограничений на управление

Цель: согласовать ограничения на помеху и управление, чтобы выполнялось **условие «полного выметания»**:

$$(\mathscr{BP} \dot{-} C\mathscr{Q}) + C\mathscr{Q} = \mathscr{BP} \qquad (*)$$

Способы:

1. Выбрать $\mathscr{P}$ из условия $(*)$
2. Последовательно:
   1. Выбрать $\mathscr{P}$, т.ч. $\mathscr{BP} \dot{-} C\mathscr{Q} \neq \emptyset$
   2. Выбрать $\hat{\mathscr{Q}} \supseteq \mathscr{Q}$ из условия $(*)$

Лемма

Для любого множества $\mathscr{N}(t) \in \operatorname{conv} \operatorname{Range} \mathscr{B}(t)$ *существует множество* $\mathscr{P}(t) \in \operatorname{conv} \mathscr{R}^{m(s+1)}$*, такое что* $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t) = \mathscr{N}(t)$.

Положим

$$\mathscr{N}(t) = \alpha C(t)\mathscr{Q}(t) + \mathscr{N}_0(t), \quad \alpha \geq 1,$$

где $\mathscr{N}_0(t) \in \operatorname{conv} \operatorname{Range} \mathscr{B}(t)$ — произвольное множество.

Пусть $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$, $[A, B]$ — управляемая пара:

$$\mathscr{B}(t) \equiv \mathscr{B} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^s B \end{bmatrix}.$$

Пусть помеха $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) & \cdots & v_r(t) \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} k_1 A^{j_1} B & \cdots & k_r A^{j_r} B \end{bmatrix}, \quad 0 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le s; \quad k_i \in \mathbb{R}.$$

Пусть ограничение на помеху $\mathscr{Q}$ задано в виде

$$\|v_1(t)\| \le 1, \quad \ldots, \quad \|v_s(t)\| \le 1.$$

Тогда ограничение на управление можно задавать в виде

$$\|u_0(t)\| \le \mu_0, \quad \ldots, \quad \|u_s(t)\| \le \mu_s,$$

причём условие полного выметания выполнено при

$$\mu_{j_1} \ge k_1, \quad \ldots, \quad \mu_{j_r} \ge k_r.$$

Определение (Половинкин, Балашов)

$\mathscr{X} \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$ — **порождающее множество**, если $\forall \mathscr{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$, т.ч. $\mathscr{X} \stackrel{\cdot}{-} \mathscr{Y} \neq \emptyset$, $\exists \mathscr{Z} \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$, т.ч. $\mathscr{X} \stackrel{\cdot}{-} \mathscr{Y} + \mathscr{Z} = \mathscr{X}$

Отметим, что

- $\mathscr{Z} \supseteq \mathscr{Y}$
- для $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Z}$ выполняется условие полного выметания

Пусть $\mathscr{P}(t)$ удовлетворяет условиям:

1. $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t) \stackrel{\cdot}{-} C(t)\mathscr{Q}(t) \neq \emptyset$;
2. $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t)$ — порождающее множество в $\operatorname{Range} \mathscr{B}(t)$.

Заменим множество $\mathscr{Q}(t)$ на $\hat{\mathscr{Q}}(t) \supseteq \mathscr{Q}(t)$, так что выполняется условие полного выметания.

$n = 2$: любое выпуклое замкнутое множество — порождающее.
$n \geq 3$. Пусть $\mathscr{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathscr{B}_1(t) & \mathscr{B}_2(t) \end{bmatrix}$, где $\mathscr{B}_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ — полного ранга. Соответственно $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) & \mathbf{u}_2(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1(t) \in \mathbb{R}^q$.
Определим ограничение на управление $\mathbf{u}(t)$:

1. ограничение на $\mathbf{u_1}$ одного из двух типов:
   1. $|(\mathbf{u}_1)_j| \leq \mu_j$;
   2. $\|\mathbf{u}_1\| \leq \mu$.
2. $\mathbf{u_2} \in \mathscr{P}_2(t)$.

Тогда множество $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t)$ будет порождающим. Числа μ_j (μ) такие, чтобы $\mathscr{B}_1(t)\mathscr{P}_1(t) \dot{-} C(t)\mathscr{Q}(t) \neq \emptyset$.

Напомним:

$$u(t) = \sum_{j=0}^{s} \frac{d^{j+1} U_j(t)}{dt^{j+1}}, \quad U_j(\cdot) \in BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{s} h_{i,j} \delta^{(j)}(t - \tau_j),$$

? — реализовавшееся управление $\mathbf{u}(t)$ не гладкое

Подходы:

- заменить δ—функции их аппроксимациями
- аппроксимировать $\mathbf{u}(t)$ гладкими функциями

$$u(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \sum\nolimits_{j=0}^{s} h_{i,j} \Delta_h^{(j)}(t - \tau_j),$$

$$\Delta_h^{(0)}(t) = h^{-1} \mathbf{1}_{[0,h]}(t), \quad \Delta_h^{(j)}(t) = h^{-1} \left(\Delta_h^{(j-1)}(t) - \Delta_h^{(j-1)}(t-h) \right)$$

Матрица $\mathscr{B}(t)$ заменится на

$$\mathscr{M}_h(t) = \begin{pmatrix} M_h^{(0)}(t) & \cdots & M_h^{(s)}(t) \end{pmatrix}$$

$$M_h^{(j)} = h^{-j}(I - e^{-Ah})^j M_h^{(0)}, \quad M_h^{(0)} = h^{-1} \left[\int_0^h e^{At} dt \right] B.$$

Теорема

Пусть $A(t) \in C[t_0, t_1]$, $B(t) \in C^{s+1}[t_0, t_1]$.
Тогда $M_h(t) \rightrightarrows \mathscr{B}(t)$ *при* $h \to 0$ *равномерно на* $[t_0, t_1]$.

Следствие: если $\operatorname{rank} \mathscr{B}(t) \equiv n$, то при $h \to 0$ имеем $\operatorname{rank} \mathscr{M}_h(t) \equiv n$.

Новая система

$$\dot{x}_h(t) = A(t)x_h(t) + \mathscr{M}_h(t)\mathbf{u}(t) + C(t)v(t) \qquad (2)$$

Теорема

Пусть $u(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$ *при* $t \in (\vartheta, \vartheta + (s+1)h]$. *Тогда* $x_h(\vartheta + (s+1)h) = x(\vartheta + (s+1)h)$, *где* $x(t)$ *— траектория исходной системы при управлении*

$$u_h(t) = \sum_{j=0}^{s} \int_{t_0}^{t} \Delta_h^{(j)}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau.$$

Аппроксимируем компоненты $\mathbf{u}(t)$ гладкими функциями:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{u}_0(t) & \cdots & \hat{u}_s(t) \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_j(t) = h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} K_j((t-\tau)/h) u_j(\tau) d\tau.$$

$$K_j(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) C_j (t(1-t))^{j+1}, \quad C_j = \frac{(2j+3)!}{((j+1)!)^2}.$$

Управляющий вход для исходной системы:

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^{s} \hat{u}_j^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{s} h^{-(j+1)} \int_{t_0}^{t_1} K_j^{(j)}((t-\tau)/h) u_j(\tau) d\tau.$$

Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) + v_2(t), \end{cases}$$

с ограничениями на помеху $|v_1| \leq \mu_1$, $|v_2| \leq \mu_2$.
Для этой системы

$$\mathscr{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{M}_h(t) = \begin{bmatrix} h/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример

Первая схема. Линейная замена $\hat{u}_1(t) = hu_1(t)/2 + u_2(t)$, $\hat{u}_2(t) = u_1(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_{h1}(t) = x_{h2}(t) + \hat{u}_1(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_{h2}(t) = \hat{u}_2(t) + v_2(t). \end{cases}$$

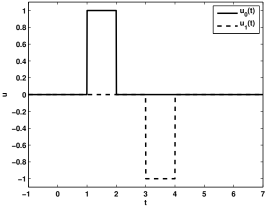
Ограничения на управление: $|\hat{u}_1| \leq \nu_1$, $|\hat{u}_2| \leq \nu_2$, где $\nu_j \geq \mu_j$.

Вторая схема.

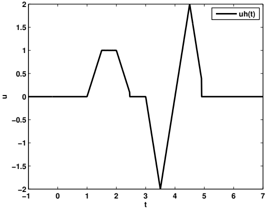
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) + v_2(t), \end{cases}$$

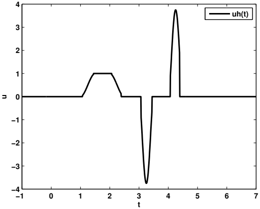
Ограничения на управление: $|u_1| \leq \nu_1$, $|u_2| \leq \nu_2$, где $\nu_j \geq \mu_j$.

Пример



реализовавшееся управление $\mathbf{u}_j(t)$





первая схема

вторая схема

Статья

Ссылка

А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский
Быстрые управления в задаче синтеза управлений при неопределённости
Дифференциальные уравнения, 2011, № 7, в печати.

Список литературы I

- *Агранович М. С.* Обобщённые функции. М.: МЦНМО, 2008.
- *Бенсусан А., Лионс Ж.-Л.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1987.
- *Владимиров В. С.* Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
- *Востриков И. В., Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* Успокоение многозвенной колебательной системы в условиях неопределённых возмущений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1452–1463.
- *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции и действия над ними, *Обобщённые функции*, Т. 1. М.: Физматгиз, 1957.
- *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* Синтез управлений в классе обобщённых функций высших порядков // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 11. С. 1443–1453.
- *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Список литературы II

- *Куржанский А. Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
- *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360–1370.
- *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
- *Kurzhanski A. B., Daryin A. N.* Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. N. 2. P. 213–227.
- *Rockafellar R. T., Wets R. J.* Variational Analysis. Berlin: Springer, 2005.
- *Schwartz L.* Théorie des distributions. Paris: Hermann, 1950.