Синтез управлений в условиях неопределённости при двойных ограничениях

А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

daryin@cs.msu.su, kurzhans@mail.ru

МГУ им. М. В. Ломоносова

Факультет ВМиК

Кафедра системного анализа

Управляемая система

Система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)} \end{cases} \qquad (*)$$

рассматривается на *фиксированном* отрезке времени $T = [t_0, t_1]$.

Управляемая система

Система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = B(t)u + v, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)} \end{cases} \qquad (*)$$

рассматривается на *фиксированном* отрезке времени $T = [t_0, t_1]$.

Ограничения

Двойное ограничение на управление (u):

геометрическое	$+$	интегральное
$u \in \mathcal{P}(t)$		$k(t) \geqslant 0$

$$k(t) \geqslant 0 \quad \Updownarrow \quad \int_{t_0}^{t} \|u\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k(t_0)$$

Геометрическое ограничение на помеху (v):

$$v \in \mathcal{Q}(t)$$

Классы управлений

$\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ — синтезирующие стратегии

$$\mathcal{U}(t,x,k) : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n,$$

измеримо по t и п.н.с. по (x,k),

$$\mathcal{U}(t,x,k) \subseteq \mathcal{P}(t),$$

$$\mathcal{U}(t,x,k) = \{0\} \quad \text{при} \quad k<0.$$

Классы управлений

$\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ — синтезирующие стратегии

$$\mathcal{U}(t,x,k) : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n,$$

измеримо по t и п.н.с. по (x,k),

$$\mathcal{U}(t,x,k) \subseteq \mathcal{P}(t),$$

$$\mathcal{U}(t,x,k) = \{0\} \quad \text{при} \quad k < 0.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \underbrace{\operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} B(t)u \\ -\|u\|^2_{R(t)} \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathcal{U} \right\}}_{\mathcal{B}(t,\mathcal{U}(t,x,k))} + \mathcal{Q}(t). \quad (**)$$

Классы управлений

$\mathcal{U}_{\mathrm{OL}} = \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k_0)$ — *программные управления*

$u(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n,$ измеримо по t,

$u(t) \in \mathcal{P}(t),$ $$\int_{t_0}^{t_1} \|u\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k_0.$$

Задача

Найти *множество разрешимости* $\mathcal{W}[t] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и синтез управлений $\mathcal{U}(t, x, k) \in \mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ т.ч. для всех решений дифференциального включения $(**)$, выпущенных из $(x(t), k(t)) \in \mathcal{W}[t]$, выполняется $(x(t_1), k(t_1)) \in \mathcal{M}$.

Схема решения

Задача решается сочетанием следующих подходов:

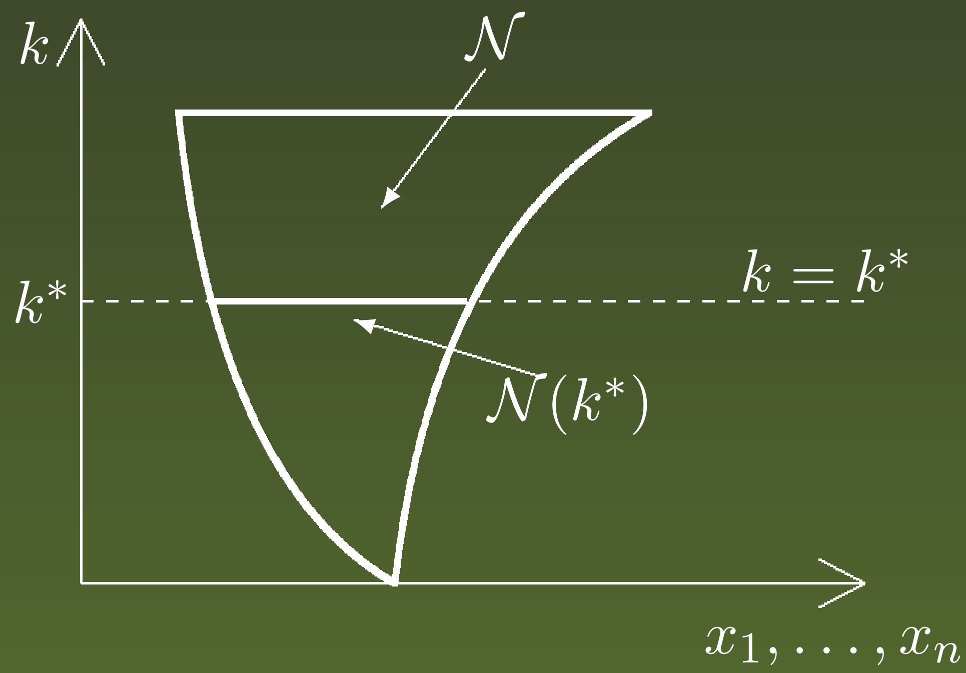
- Альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина (Понтрягин, 1967; Понтрягин, 1980).
- Теория Н. Н. Красовского (Красовский, 1968).
- Негладкое динамическое программирование (Crandall and Lions, 1983; Субботин, 1990).

Подобная комбинация ранее рассматривалась для задач с геометрическим ограничением на управление и помеху с целью применения методов эллипсоидальной аппроксимации для получения эффективного алгоритма решения задачи (Куржанский, 1999).

Сечения множества разрешимости

Для $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{N}(k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,k) \in \mathcal{N}\}$ называется сечением $\mathcal{N}$ на уровне k.

$$\mathcal{N} = \{(x,k) \mid x \in \mathcal{N}(k)\}$$



Сечения множества разрешимости

Сечения целевого множества: $\mathcal{M}(k)$.
Сечения множества разрешимости: $\mathcal{W}[k,t]$.

Требования к целевому множеству $\mathcal{M}$:

1. монотонность: $\mathcal{M}(k_1) \subseteq \mathcal{M}(k_2)$ если $k_1 \leqslant k_2$;
2. $\mathcal{M}(k) = \varnothing$ для $k < 0$;
3. $\mathcal{M}(k)$ непрерывно по Хаусдорфу при $\mathcal{M}(k) \neq \varnothing$;
4. $\mathcal{M}(k) \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$.

Программные множества разрешимости

Максиминное М.Р. $W^+(k, t, t_1; \mathcal{M}(\cdot))$ состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, т.ч. для любой помехи $v(\cdot)$ существует $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$, т.ч. $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$. (помеха известна заранее)

Минимаксное М.Р. $W^-(k, t, t_1; \mathcal{M}(\cdot))$ состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, т.ч. существует $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$, для которого $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$ для любой помехи $v(\cdot)$. (нет информации о помехе)

Здесь $x(\cdot)$ — траектория (**), выпущенная из позиции (t, x, k) при управлении $u(\cdot)$ и помехе $v(\cdot)$.

Программные множества разрешимости

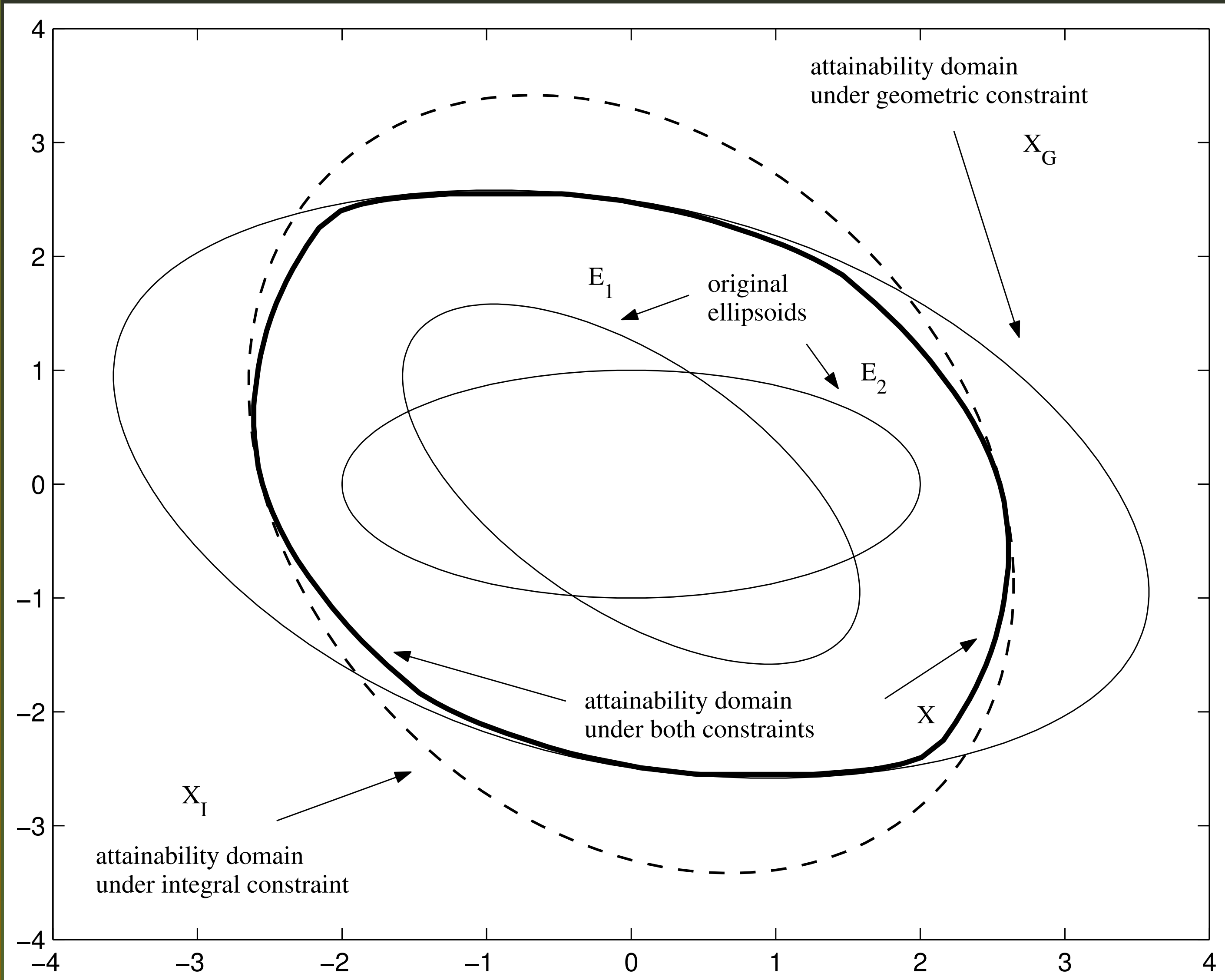
$$W^+[k,t] = \Big[\bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \mathcal{M}(\gamma) - \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t,t_1;k-\gamma)\Big] \mathbin{\dot{-}} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$W^-[k,t] = \bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \Big[\Big(\mathcal{M}(\gamma) \mathbin{\dot{-}} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) - \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t,t_1;k-\gamma)\Big].$$

Здесь $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$ — *множество достижимости при двойном ограничении:*

$$\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t,t_1;k) = \left\{ \int_t^{t_1} B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\middle|\; u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k) \right\}.$$

Пример $\mathcal{X}_{\mathbf{GI}}$



Оценка для $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$

$\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t, t+\sigma; \delta) \subseteq \mathcal{X}_{\mathrm{G}}(t, t+\sigma) \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}(t, t+\sigma; \delta)$, где

$$\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \int_t^{t+\sigma} B(\tau)\mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \mathcal{X}_{\mathrm{I}} = \mathcal{E}\left(0, \delta\int_t^{t+\sigma} R^{-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

$$h(\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}, \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}) = O(\sigma^2)$$

при предположениях:

1. $0 \in \operatorname{int}\mathcal{P}(t)$;
2. $\rho(\ell \mid \mathcal{P}(t))$ и $R(t)$ непрерывны по Липшицу.

Альтернированные суммы

Пусть $\mathcal{T} = \{t = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{m-1}, \tau_m = t_1\}$ — разбиение $[t, t_1]$; $\sigma_i = \tau_i - \tau_{i-1} > 0$.

$$W^+_{\mathcal{T}}[k, \tau_m] = W^-_{\mathcal{T}}[k, \tau_m] = \mathcal{M}(k),$$
$$W^+_{\mathcal{T}}[k, \tau_{i-1}] = W^+(k, \tau_{i-1}, \tau_i; W^+_{\mathcal{T}}[\cdot, \tau_i]),$$
$$W^-_{\mathcal{T}}[k, \tau_{i-1}] = W^-(k, \tau_{i-1}, \tau_i; W^-_{\mathcal{T}}[\cdot, \tau_i]).$$

$$W^+_{\mathcal{T}}[k, \tau_0] = \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k, t], \qquad W^-_{\mathcal{T}}[k, \tau_0] = \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k, t]$$

— *верхняя* и *нижняя* альтернированные суммы. (множество разрешимости в задаче коррекции движения)

Верхний и нижний интеграл

Предположение: для любого разбиения $\mathcal{T}$, $k \geqslant 0$ и $t \in [t_0, t_1]$ множества $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t]$ и $\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k,t]$ выпуклые.

Если для некоторого $k \geqslant 0$ существует предел по Хаусдорфу $\mathcal{I}^+[k,t]$ верхних (нижних) сумм

$$\lim_{\operatorname{diam}\mathcal{T}\to 0} h(\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t], \mathcal{I}^+[k,t]) = 0,$$

то это предел называется *верхним (нижним) альтернированным интегралом*.

$$\mathcal{I}^+[k,t] = \bigcap_{\mathcal{T}} \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t], \quad \mathcal{I}^-[k,t] = \bigcup_{\mathcal{T}} \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k,t].$$

Альтернированный интеграл

$$\mathcal{I}^-[k,t] \subseteq \mathcal{W}[k,t] \subseteq \mathcal{I}^+[k,t].$$

Если верхний и нижний альтернированный интегралы существуют и совпадают, то $\mathcal{I}[k,t] = \mathcal{I}^+[k,t] = \mathcal{I}^-[k,t]$ называется *альтернированным интегралом.*

$$\mathcal{W}[k,t] = \mathcal{I}[k,t].$$

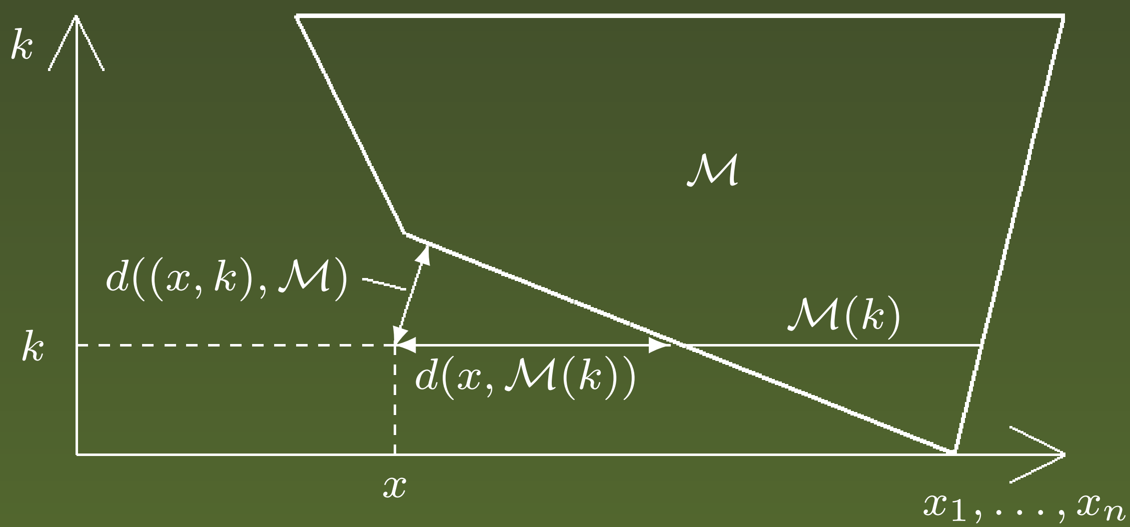
Отображения $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$, $\mathcal{W}$ обладают полугрупповым свойством:

$$\mathcal{I}(k,t,t_1;\mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{I}(k,t,\tau,\mathcal{I}(\cdot,\tau,t_1;\mathcal{M}(\cdot))),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant t_1.$$

Функция цены

$$V(t,x,k) = \inf_{\mathcal{U}\in\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}} \sup_{\binom{x(\cdot)}{k(\cdot)}\in\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(\cdot)} d(x(t_1),\mathcal{M}(k(t_1))).$$

$$\mathcal{W}[k,t] = \{\, x\in\mathbb{R}^n \mid V(t,x,k)\leqslant 0\}, \quad V(t,x,k)\leqslant d(x,\mathcal{W}[k,t]).$$



Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса

$$V_t + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \left\{ \langle V_x, B(t)u + v \rangle - V_k \|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0,$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad k \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

с краевым условием

$$V_t + \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \langle V_x, v \rangle \Big|_{k=0} = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и начальным условием

$$V(t_1, x, k) = d(x, \mathcal{M}(k)), \quad k \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Оптимальный синтез управлений

$$\mathcal{U}^*(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in \mathcal{P}(t)} \langle V_x, B(t)u \rangle - V_k \|u\|^2_{R(t)}.$$

Эволюционное уравнение

Многозначное отображение $\mathcal{Z}[k,t] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *слабо инвариантно* если

$$\mathcal{Z}[k,t] \subseteq W^+(k,t,t+\sigma,\mathcal{Z}(\cdot,t+\sigma)).$$

$\mathcal{Z}[k,t]$ слабо инвариантно $\iff$ является решением *эволюционного уравнения*

$$\lim_{\sigma\downarrow 0} \sigma^{-1} h_+\Big(\mathcal{Z}[k,t] + \sigma\mathcal{Q}(t), \bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \big[\mathcal{Z}[\gamma,t+\sigma] - \\ - \sigma\mathcal{P}(t) \cap \mathcal{E}\big(0,(k-\gamma)\sigma R^{-1}(t)\big)\big]\Big) = 0.$$

$\mathcal{W}[k,t]$ — *максимальное решение* эволюционного уравнения.

Синтез управлений

Пусть $\mathcal{Z}[k,t]$ — слабо инвариантное многозначное отображение с опорной функцией, непрерывно дифференцируемой по t и k. Тогда

$$\min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max_{v\in\mathcal{Q}(t)}\frac{\mathrm{d}d^2(x,\mathcal{Z}[k,t])}{\mathrm{d}t}\leqslant 0.$$

$$\operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)}\langle \ell_0, B(t)u\rangle + \|u\|^2_{R(t)}\frac{\partial\rho(\ell_0\mid\mathcal{Z}[k,t])}{\partial k}$$

называется *экстремальной стратегией* для $\mathcal{Z}[k,t]$.

$$\ell_0=\arg\max_{\ell}\langle\ell,x\rangle-\rho(\ell\mid\mathcal{Z}[k,t])-\frac{1}{4}\|\ell\|^2.$$

Синтез управлений

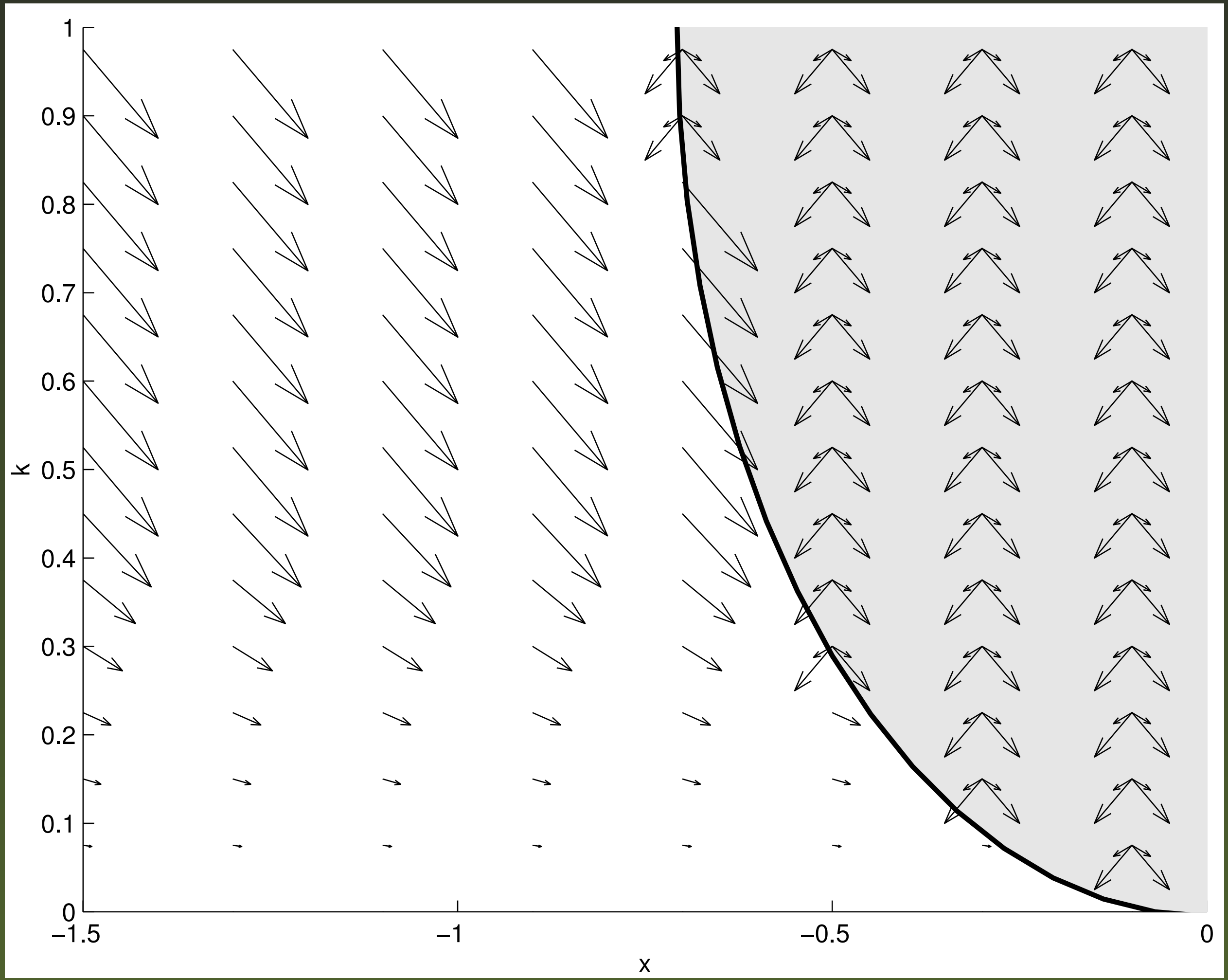
Экстремальная стратегия $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t,x,k)$ принадлежит $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ и является решением исходной задачи:

$$d(x(t_1),\mathcal{Z}[k(t_1),t_1]) \leqslant d(x(t),\mathcal{Z}[k(t),t])$$

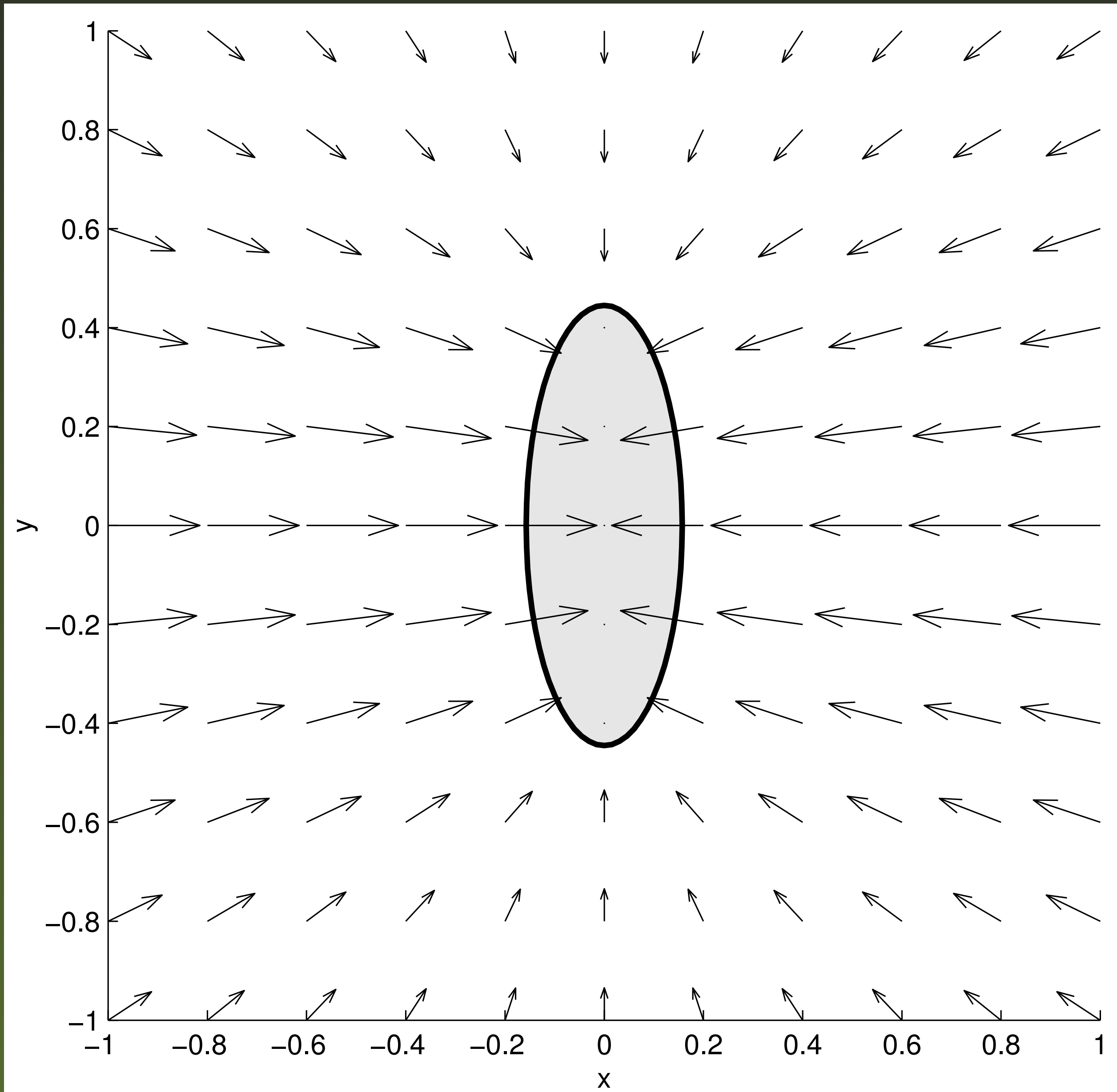
$$x(t)\in\mathcal{Z}[k(t),t] \quad\Longrightarrow\quad x(\tau)\in\mathcal{Z}[k(\tau),\tau],\ \tau\geqslant t,$$

в частности, $x(t_1)\in\mathcal{M}(k(t_1))$.

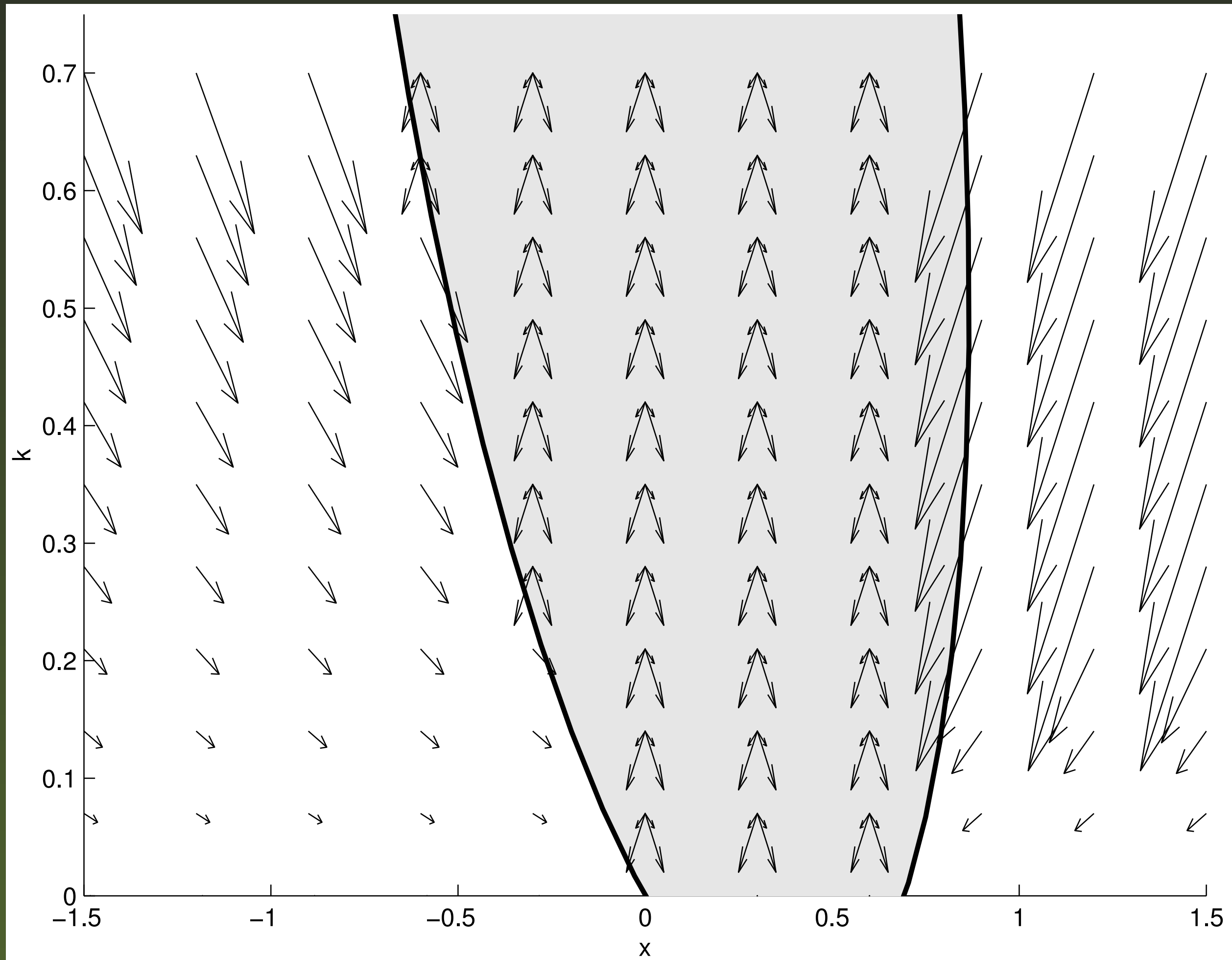
Пример синтеза управлений



Пример синтеза управлений



Пример синтеза управлений



Пример синтеза управлений