

Параллельный алгоритм вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределённых возмущениях¹

© 2012 г. А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

119991, Москва, Ленинские горы, 1, ВМК МГУ;
e-mail: daryin@cs.msu.ru, kurzhan@cs.msu.ru

Поступила в редакцию июля 2012 г.

Разработка эффективных методов вычисления синтезирующих управлений в линейных системах большой размерности представляет серьёзную задачу в области соответствующей математической теории и её приложений. Это тем более справедливо для систем с геометрическими ограничениями на управления и неопределёнными возмущениями. Решение задачи синтеза целевых управлений в указанных условиях опирается, как известно, на построение слабо инвариантных множеств (попятных множеств достижимости), порождённых разрешающими уравнениями рассматриваемого процесса. В данной статье приводятся методы построения подобных уравнений и отвечающих им инвариантных множеств, с обсуждением особенности вычислений для систем большой размерности. Предлагаемые подходы основаны на применении разработанных ранее теории и методах эллипсоидальных аппроксимаций многозначных функций. Библ. ??? Фиг. 3

Ключевые слова: динамическое программирование, эллипсоидальная аппроксимация, параллельные вычисления.

1 Введение

Ниже обсуждается линейная система с неопределённостью вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1)$$

¹Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (контракт № 16.740.11.0426 от 26 ноября 2010 года), при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00251) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-2239.2012.1). Первый автор поддержан грантом президента РФ для поддержки молодых учёных-кандидатов наук (грант МК-1111.2011.1).

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, с управлением $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ и неопределённым возмущением $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ принадлежащими известным множествам $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ соответственно.

Задача целевого управления состоит в том, чтобы привести состояние $x(t)$ в фиксированный момент времени t_1 в заданное целевое множество $\mathcal{M}$. Решение этой задачи будем искать в классе синтезируемых стратегий $U(t, x)$, обеспечивающих существование решений системы (1) при $u = U(t, x)$.

Напомним, что эллипсоидом $\mathcal{E}(x, X) \subseteq \mathbb{R}^k$ с центром $x \in \mathbb{R}^k$ и неотрицательно определённой матрицей конфигурации $X \in \mathbb{R}^{k \times k}$, называется выпуклое замкнутое множество, опорная функция [1, 2] которого равна

$$\rho(\ell \mid \mathcal{E}(x, X)) = \langle \ell, x \rangle + \langle \ell, X\ell \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Далее предполагаем, что множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ являются эллипсоидами в соответствующих пространствах:

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), \quad \mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad \mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(q(t), Q(t)),$$

причём функции $p(t)$, $P(t)$, $q(t)$, $Q(t)$ соответствующих размерностей непрерывно зависят от времени.

Под *множеством разрешимости* $\mathcal{W}[t]$ указанной выше задачи будем понимать совокупность всех таких начальных *позиций* $\{t_0, x_0\}$, для каждой из которых существует управление² $\mathcal{U}(t, x)$, переводящее это начальное состояние в терминальное $\{t_1, x(t_1)\}$, $x(t_1) \in \mathcal{E}(m, M)$ при любом допустимом возмущении $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Данное множество $\mathcal{W}[t]$ является слабо инвариантным [3] относительно системы (1) и целевого множества $\mathcal{E}(m, M)$. Как известно, знание трубки $\mathcal{W}[\tau]$, $\tau \in [t, t_1]$, позволяет вычислить соответствующее управление $U(t, x)$ [4, 5]. Конкретные вычисления будем проводить, аппроксимируя $\mathcal{W}[\tau]$ *изнутри* при помощи совокупности параметризованных эллипсоидов. Далее рассматривается задача вычисления внутренней эллипсоидальной аппроксимации [6] множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$. Известны

²В рассматриваемом линейном случае существует универсальное управление, не зависящее от $\{t_0, x_0\}$.

[7] следующие уравнения подобной аппроксимации $\mathcal{W}^-[t] = \mathcal{E}(w(t), W(t))$

$$\dot{w}(t) = A(t)w(t) + B(t)p(t) + C(t)q(t), \quad w(t_1) = m; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & A(t)W(t) + W(t)A^T(t) - \\ & - W^{\frac{1}{2}}(t)T(t)(B(t)P(t)B^T(t))^{\frac{1}{2}} - (B(t)P(t)B^T(t))^{\frac{1}{2}}T^T(t)W^{\frac{1}{2}}(t) + \\ & \pi(t)W(t) + \pi^{-1}(t)C(t)Q(t)C^T(t), \quad W(t_1) = M. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $T(t)$ — произвольная ортогональная матрица, обеспечивающая коллинеарность векторов $T(t)(B(t)P(t)B^T(t))^{\frac{1}{2}}s(t)$ и $W^{\frac{1}{2}}(t)s(t)$, функция $s(t)$ — решение сопряжённой системы

$$\dot{s}(t) = -A^T(t)s(t), \quad s(t_1) = \ell.$$

При отсутствии помехи в (3) опускаются два слагаемых, содержащих $\pi(t)$, иначе

$$\pi(t) = \left\langle s(t), C(t)Q(t)C^T(t)s(t) \right\rangle^{\frac{1}{2}} / \left\langle s(t), W(t)s(t) \right\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Эллипсоидальная аппроксимация (2)–(3) обладает свойством «тугоści», т.е. она обеспечивает касание оценки и точного множества в направлении сопряжённого вектора $s(t)$:

$$\rho(s(t) | \mathcal{W}^-[t]) = \rho(s(t) | \mathcal{W}[t]).$$

Последнее условие выполняется для так называемых «хороших направлений» $s(t)$ (см. [7]).

В ходе применения описанной эллипсоидальной оценки к задаче синтеза управлений для многозвенной колебательной системы высокой размерности [8] возникают следующие трудности.

Во-первых, эллипсоиды-аппроксимации близки к вырожденным. Из-за этого, вследствие ошибок численного метода интегрирования дифференциального уравнения (3), матрица $W(t)$ может перестать быть неотрицательно определённой, так что соответствующая эллипсоидальная оценка станет непригодной. В разделе 2 настоящей статьи предлагается способ комбинирования нескольких эллипсоидальных оценок, позволяющий преодолеть их вырожденность.

Во-вторых, с ростом размерности существенно увеличивается вычислительная нагрузка. Поэтому необходимо максимально эффективно производить операции, входящие в матричное дифференциальное уравнение (3). Новому эффективному способу нахождения матрицы $T(t)$ посвящён раздел 3.

В-третьих, требования по скорости вычисления и по необходимой для этого компьютерной памяти приводят к необходимости вычислять эллипсоидальные оценки при помощи *параллельных алгоритмов*. Особенности компьютерной реализации полученных формул описаны в разделе 4.

В статье использованы следующие обозначения. $\mathcal{B}_r(a)$ — шар радиуса r с центром в точке a в соответствующем нормированном пространстве. $h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} + \mathcal{B}_\varepsilon(0) \} = \sup \{ \rho(\ell \mid \mathcal{X}) - \rho(\ell \mid \mathcal{Y}) \mid \|\ell\| \leq 1 \}$ — хаусдорфово полурасстояние между замкнутыми множествами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. $G(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы (1) (решение задачи Коши $\partial G / \partial t = A(t)G(t, \tau)$, $G(\tau, \tau) = I$). $\rho(\ell \mid X) = \sup_{x \in X} \langle \ell, x \rangle$ — опорная функция ко множеству X в направлении ℓ .

2 Регуляризация аппроксимаций

Вычислительные эксперименты с эллипсоидальной оценкой трубки достижимости для многозвенной колебательной системы [8] со скалярным управлением показывают, что в случае малого размера целевого множества $\mathcal{M}$ (требуется привести систему в заданную небольшую окрестность заданной точки) эллипсоидальные аппроксимации близки к вырожденным: с течением попятного времени, существенно увеличивается лишь одно из собственных чисел матрицы $W(t)$, остальные же несущественно отличаются от собственных чисел матрицы M . Данное обстоятельство представляется неблагоприятным с точки зрения эффективного решения задачи синтеза управлений по крайней мере по следующим трём причинам.

1. Погрешность численного метода решения задачи Коши (3) может привести (и на практике приводит) к выходу матрицы $W(t)$ из конуса неотрицательно определённых матриц, что неприемлемо. Варьирование параметров задачи и чис-

ленных алгоритмов может несколько отсрочить указанный процесс, однако при этом возникают другие проблемы: при увеличении размеров целевого множества M ухудшается качество решения задачи синтеза (система приводится в заданную точку с меньшей точностью), а при повышении требований к точности численного интегрирования уменьшается шаг метода и соответственно возрастает вычислительная нагрузка (к тому же в случае высоких размерностей начинает играть роль неточное представление чисел с плавающей точкой в памяти ЭВМ, т.е. существует предел точности численного решения задачи Коши).

2. При наличии в системе помехи, действующих вдоль направлений вырождения эллипсоидальной аппроксимации множества разрешимости, последняя быстро вырождается окончательно и становится пустым множеством.
3. Эллипсоид, вытянутый лишь по одному направлению, фактически несёт в себе информацию лишь о значении опорной функции множества разрешимости вдоль заданной траектории сопряжённой системы. При этом указанная опорная функция может быть вычислена с существенно меньшими вычислительными затратами, чем интегрирование матричного дифференциального уравнения.

В следующем разделе вначале демонстрируется причина появления вырожденности, для чего анализируется формула внутренней эллипсоидальной аппроксимации геометрической суммы двух эллипсоидов. Далее показывается, каким образом можно преодолеть вырожденность, ослабив требование тугости аппроксимации. После этого данный подход переносится с операции суммы эллипсоидов на вычисление аппроксимации множества разрешимости.

2.1 Вырожденность суммы вырожденных эллипсоидов

Напомним [7] формулу внутренней эллипсоидальной аппроксимации геометрической суммы m эллипсоидов $\mathcal{E}(q_i, Q_i)$, $i = 1, m$, являющейся тугой в направлении $\ell \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(q_1, Q_1) + \dots + \mathcal{E}(q_m, Q_m) &\supseteq \mathcal{E}(q, Q), \\ q &= \sum_{i=1}^m q_i, \quad Q = (Q_1^{\frac{1}{2}} + T_2 Q_2^{\frac{1}{2}} + \dots + T_m Q_m^{\frac{1}{2}})^T (Q_1^{\frac{1}{2}} + T_2 Q_2^{\frac{1}{2}} + \dots + T_m Q_m^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (4)$$

где T_i — ортогональные матрицы, обладающие свойством $Q_1^{\frac{1}{2}} \ell \uparrow\uparrow T_i Q_i^{\frac{1}{2}} \ell$. В случае, если одна из матриц Q_i является вырожденной, формула (4) имеет смысл для таких направлений ℓ , что $Q_i \ell \neq 0$, $i = 1, m$.

Теорема 1. Пусть $\text{rank } Q_i = r_i$ и $Q_i \ell \neq 0$, $i = 1, m$. Тогда ранг матрицы Q , вычисленной по формуле (4), не превосходит числа $r_1 + \dots + r_m - (m - 1)$.

Доказательство. Обозначим подпространства — образы матриц $Q_1^{\frac{1}{2}}$ и $T_i Q_i^{\frac{1}{2}}$ через L_1 и L_i соответственно, $i = \overline{2, m}$. Тогда $\text{im } Q \subseteq \sum_{i=1}^m L_i$. По определению матриц T_i ненулевой вектор $e_1 = Q_1^{\frac{1}{2}} \ell$ принадлежит всем подпространствам L_i , поэтому общее число линейно независимых векторов в $\text{im } Q$ не может превышать $r_1 + (r_2 - 1) + \dots + (r_m - 1)$. $\square$

Следствие 1. Формула (4) не выводит из класса матриц ранга 1.

Следствие 2. Для системы (1) со скалярным управлением ($\text{rank } B(t)P(t)P^T(t) \equiv 1$) без неопределённости, с целевым множеством в виде точки или отрезка ($\text{rank } M \leq 1$), эллипсоидальная аппроксимация (2), (3) также будет в каждый момент времени либо точкой, либо отрезком ($\text{rank } W(t) \leq 1$).

Доказательство. Утверждение следует из того, что ломаные Эйлера уравнения (3) будут состоять из матриц ранга 1. $\square$

Замечание 1. Вырожденность аппроксимаций является следствием требования тугости (касания вдоль заданного направления), а не свойством конкретной формулы (4). Действительно, пусть $\text{rank } Q_i = 1$, тогда суммируемые эллипсоиды можно

представить как $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}(q_i, Q_i) = \text{conv}\{q_i \pm a_i\}$, где векторы a_i — единственные ненулевые полуоси этих эллипсоидов. Точной суммой $\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_m$ будет многоугольник $\text{conv}\{q_1 + \dots + q_m \pm a_1 \pm \dots \pm a_m\}$. Для почти всех направлений ℓ тугой аппроксимацией будет одна из диагоналей этого многоугольника, и формула (4) описывает в точности эти диагонали.

Замечание 2. При неудачном выборе ортогональной матрицы T размерность внутренней эллипсоидальной оценки суммы эллипсоидов может быть меньше размерности слагаемых. Например, если $Q_1 = Q_2 = I$, $\ell = e_1$, $T = \text{diag}\{1, -1, -1, \dots, -1\}$, то формула (4) даёт $Q = \text{diag}\{1, 0, 0, \dots, 0\}$.

2.2 Регуляризация аппроксимации суммы эллипсоидов

Покажем, каким образом можно скомбинировать несколько вырожденных аппроксимаций для получения эллипсоида большей размерности. Этот подход основан на известной формуле внутренней эллипсоидальной аппроксимации выпуклой оболочки объединения эллипсоидов [6].

Лемма 2. Пусть $\mathcal{E}_i^- = \mathcal{E}(q, Q_i^-)$, $i = \overline{1, m}$ — внутренние эллипсоидальные аппроксимации выпуклого множества $\mathcal{X}$. Тогда эллипсоид

$$\mathcal{E}_\alpha^- = \mathcal{E}(q, Q_\alpha^-), \quad Q_\alpha^- = \sum_{i=1}^m \alpha_i Q_i^-, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad (5)$$

также будет внутренней аппроксимацией множества $\mathcal{X}$.

Доказательство. Пользуясь вогнутостью функции $\sqrt{t}$, имеем

$$\rho(\ell \mid \mathcal{E}_\alpha^-) = \langle q, \ell \rangle + \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \langle \ell, Q_i^- \ell \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i (\langle q_i, \ell \rangle + \langle \ell, Q_i^- \ell \rangle^{\frac{1}{2}}) \leq \max_{i=\overline{1, m}} \rho(\ell \mid \mathcal{E}_i^-), \quad (6)$$

откуда

$$\mathcal{E}_\alpha^- \subseteq \text{conv} \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}_i^- \subseteq \mathcal{X}. \quad \square$$

Теорема 3. Пусть $q = 0$ и размерность $\mathcal{L}$ — линейной оболочки объединения эллипсоидов $\mathcal{E}_i^-$ равна r . Тогда при $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, имеет место равенство $\text{im } Q_\alpha^- = \mathcal{L}$, и в частности матрица Q_α^- имеет ранг r .

Доказательство. Утверждение теоремы сводится к тому, что

$$\text{im}(\alpha_1 Q_1^- + \dots + \alpha_m Q_m^-) = \text{im } Q_1^- + \dots + \text{im } Q_m^-.$$

Последнее в силу симметричности матриц Q_i^- эквивалентно

$$\ker(\alpha_1 Q_1^- + \dots + \alpha_m Q_m^-) = \ker Q_1^- \cap \dots \cap \ker Q_m^-.$$

Вложение правой части в левую очевидно. Если $x \in \ker(\alpha_1 Q_1^- + \dots + \alpha_m Q_m^-)$, то домножая равенство $\alpha_1 Q_1^- x + \dots + \alpha_m Q_m^- x = 0$ скалярно на x , получаем $\alpha_1 \langle x, Q_1^- x \rangle + \dots + \alpha_m \langle x, Q_m^- x \rangle = 0$, откуда в силу неотрицательной определённости матриц Q_i^- и положительности α_i имеем $\langle x, Q_i^- x \rangle = 0$ и следовательно $x \in \ker Q_i^-$. $\square$

Отметим некоторые свойства аппроксимации $\mathcal{E}_\alpha^-$.

1. Пусть эллипсоид $\mathcal{E}_1^-$ был тугой оценкой в направлении ℓ , т.е. $\rho(\ell \mid \mathcal{E}_1^-) = \rho(\ell \mid \mathcal{X})$.

Оценим, насколько будет отличаться опорная функция эллипсоида $\mathcal{E}_\alpha^-$ в том же направлении:

$$\begin{aligned} \rho(\ell \mid \mathcal{E}_\alpha^-) &\geq \langle q, \ell \rangle + (\alpha_1 \langle \ell, Q_1 \ell \rangle)^{\frac{1}{2}} = \langle q, \ell \rangle + \langle \ell, Q_1 \ell \rangle^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - (1 - \alpha_1)} = \\ &= \rho(\ell \mid \mathcal{X}) - \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) \langle \ell, Q_1 \ell \rangle^{\frac{1}{2}} + O((1 - \alpha_1)^2). \end{aligned}$$

Таким образом, чем ближе α_1 к единице, тем ближе $\mathcal{E}_\alpha^-$ к тугой аппроксимации в направлении ℓ .

2. В случае, если все эллипсоиды $\mathcal{E}_i^-$, $i = \overline{1, m}$, являются тугими аппроксимациями $\mathcal{X}$ вдоль общего направления ℓ , то в условии (6) достигается равенство и эллипсоид $\mathcal{E}_\alpha^-$ также будет тугой аппроксимацией $\mathcal{X}$ в направлении ℓ .

Пример 1. На рис. 1 представлены эллипсоидальные аппроксимации суммы двух вырожденных эллипсоидов. Исходные эллипсоиды $\mathcal{E}_i$ представляют собой два отрезка (жирный пунктир), а их сумма — параллелограмм (тонкий пунктир). В силу теоремы 1 тугие аппроксимации суммы этих эллипсоидов также являются вырожденными

эллипсоидами — отрезками (жирная сплошная). Регуляризованные аппроксимации для $\alpha_1 = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}$ изображены тонкой сплошной линией. Видно, что они невырождены (теорема 3) и касаются сторон параллелограмма (т.е. являются тугими вдоль нормалей к его сторонам — свойство 2). Кроме того, при $\alpha = \frac{1}{10}$ и $\frac{9}{10}$ в силу свойства 1 опорные функции аппроксимаций мало отличаются от опорной функции параллелограмма вдоль соответствующих направлений.

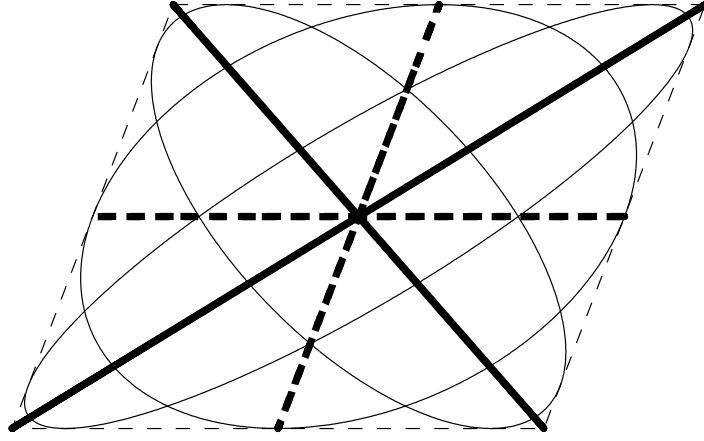


Рис. 1: Внутренние аппроксимации суммы двух эллипсоидов. Исходные эллипсоиды (жирный пунктир), точная сумма (тонкий пунктир), тугие аппроксимации (жирная сплошная), регуляризованные аппроксимации (тонкая сплошная)

2.3 Регуляризация аппроксимации трубки разрешимости

В условиях (5) выберем следующие значения параметров α : $\alpha_1 = 1 - \sigma\gamma + \sigma\gamma\beta_i$, $\alpha_i = \sigma\gamma\beta_i$, $i = \overline{2, m}$, где $\beta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1$, $\gamma \geq 0$. Здесь σ — достаточно малое положительное число,

так что $\alpha_1 > 0$. Тогда

$$\sigma^{-1}(Q_\alpha^- - Q_1^-) = \gamma \left(\sum_{i=1}^m \beta_i Q_i^- - Q_1^- \right).$$

Используем этот результат для записи m перемешиваемых эллипсоидальных аппроксимаций трубки разрешимости:

$$\begin{aligned} \dot{W}_i(t) = & A(t)W_i(t) + W_i(t)A^T(t) - \\ & - W_i^{\frac{1}{2}}(t)T_i(t)(B(t)P(t)B^T(t))^{\frac{1}{2}} - (B(t)P(t)B^T(t))^{\frac{1}{2}}T_i^T(t)W_i^{\frac{1}{2}}(t) + \\ & + \pi_i(t)W_i(t) + \pi_i^{-1}(t)C(t)Q(t)C^T(t) + \gamma \left(\sum_{j=1}^m \beta_{ij}W_j(t) - W_i(t) \right), \quad W_i(t_1) = M; \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\beta_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^m \beta_{ij} = 1$, $i = \overline{1, m}$; $\gamma \geq 0$; $T_i(t)$ — произвольные ортогональные матрица, обеспечивающие сонаправленность векторов $T_i(t)(B(t)P(t)B^T(t))^{\frac{1}{2}}s_i(t)$ и $W_i^{\frac{1}{2}}(t)s_i(t)$; функции $s_i(t)$ — решения сопряжённой системы при различных конечных условиях:

$$\dot{s}_i(t) = -A^T(t)s_i(t), \quad s_i(t_1) = \ell_i.$$

и при наличии помехи $\pi_i(t) = \langle s_i(t), C(t)Q(t)C^T(t)s_i(t) \rangle^{\frac{1}{2}} / \langle s_i(t), W_i(t)s_i(t) \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Замечание 3. Параметр $\gamma \geq 0$ отвечает за скорость «перемешивания» аппроксимаций — чем он больше, тем более вклад, вносимый перемешиванием. Параметры $\beta_{ij} \geq 0$ отвечают за конфигурацию перемешивания (какие из эллипсоидов добавляются к данному).

Замечание 4. Выбор одинаковых коэффициентов $\beta_{ij} = \hat{\beta}_j$ (в частности, $\beta_{ij} = \frac{1}{m}$) позволяет уменьшить количество вычислений, т.к. в этом случае слагаемое $\sum_{j=1}^m \beta_{ij}W_j(t) = \sum_{j=1}^m \hat{\beta}_jW_j(t)$ не зависит от j и вычисляется только один раз в каждый момент времени.

Теорема 4. Пусть решения $W_i(t)$ уравнения (7) продолжаемы на отрезок $[t_0, t_1]$ и на всём отрезке являются положительно определёнными матрицами. Тогда многозначная функция

$$\mathcal{W}^-[t] = \text{conv} \bigcup_{i=1}^m \mathcal{W}_i^-[t] = \text{conv} \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}(w(t), W_i(t))$$

удовлетворяет при $t \in [t_0, t_1]$ эволюционному уравнению

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} h_+((I + \sigma A(t))\mathcal{W}^-[t - \sigma] + \sigma C(t)\mathcal{Q}(t), \mathcal{W}^-[t] - \sigma B(t)\mathcal{P}(t)) = 0$$

с начальным условием $\mathcal{W}^-[t_1] \subseteq \mathcal{M}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать $p(t) \equiv 0$, $q(t) \equiv 0$ и следовательно $w(t) \equiv 0$. Далее, используя замену $z(t) = G(t_1, t)x(t)$, перейдём к системе (1) при $A(t) \equiv 0$. Кроме того, переобозначим матрицы $B(t)P(t)B^T(t)$ и $C(t)Q(t)C^T(t)$ как $P(t)$ и $Q(t)$.

Опорная функция множества разрешимости $\mathcal{W}^-[t]$ равна $\rho(\ell | \mathcal{W}^-[t]) = \max \left\{ \langle \ell, W_i(t)\ell \rangle^{\frac{1}{2}} \mid i = 1, \dots, m \right\}$. Пусть $\sigma > 0$ достаточно мало, так что при $\delta \in [0, \sigma]$ максимум для данного направления ℓ достигается при одном и том же $i = i_0$, т.е. $\rho(\ell | \mathcal{W}^-[t]) = \langle \ell, W_{i_0}(t)\ell \rangle^{\frac{1}{2}}$.

В предположении $\|\ell\| = 1$ оценим опорную функцию множества $\mathcal{W}^-[t - \sigma]$:

$$\begin{aligned} \rho(\ell | \mathcal{W}^-[t - \sigma]) &= \langle \ell, W_{i_0}(t - \sigma)\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \ell, (W_{i_0}(t) - \sigma \dot{W}_{i_0}(t) + o(\sigma))\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \\ &= \langle \ell, W_{i_0}(t)\ell \rangle^{\frac{1}{2}} - \frac{\sigma}{2} \langle \ell, W_{i_0}(t)\ell \rangle^{-\frac{1}{2}} \langle \ell, \dot{W}_{i_0}(t)\ell \rangle + o(\sigma). \end{aligned}$$

Отдельно оценим (опуская зависимость от t)

$$\begin{aligned} \langle \ell, W_{i_0}\ell \rangle &= -\langle \ell, W_{i_0}^{\frac{1}{2}}TP^{\frac{1}{2}}\ell \rangle - \langle \ell, P^{\frac{1}{2}}TW_{i_0}^{\frac{1}{2}}\ell \rangle + \pi_{i_0} \langle \ell, W_{i_0}\ell \rangle + \pi_{i_0}^{-1} \langle \ell, Q\ell \rangle + \\ &+ \gamma \left(\sum_{j=1}^m \beta_{i_0j} \langle \ell, W_j\ell \rangle - \langle \ell, W_{i_0}\ell \rangle \right) \geq -2\|W_{i_0}^{\frac{1}{2}}\ell\| \|T\| \|P^{\frac{1}{2}}\ell\| + 2\langle \ell, W_{i_0}\ell \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2\langle \ell, W_{i_0}\ell \rangle^{\frac{1}{2}} (\rho(\ell | \mathcal{Q}) - \rho(\ell | \mathcal{P})). \end{aligned}$$

Здесь использовалось неравенство Коши–Буняковского и неравенства $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$, $2ab \leq a^2 + b^2$. Скобка при γ неположительна, т.к. при $i = i_0$ выражение $\langle \ell, W_i\ell \rangle$ максимально. Возвращаясь к оценке опорной функции $\mathcal{W}^-[t - \sigma]$, получаем

$$(\rho(\ell | \mathcal{W}^-[t - \sigma]) + \sigma \rho(\ell | \mathcal{Q}(t))) - (\rho(\ell | \mathcal{W}^-[t]) + \sigma \rho(\ell | \mathcal{P}(t))) = o(\sigma),$$

что и означает выполнение эволюционного уравнения рассматриваемой теоремы. $\square$

Следствие 3. В условиях теоремы (4) многозначная функция $\mathcal{W}^-[t]$ является внутренней оценкой множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$, а функции $\mathcal{W}_i^-[t]$ — внутренними эллипсоидальными оценками этого множества.

Доказательство. Утверждение следует из того, что множество разрешимости — максимальное по включению решение эволюционного уравнения. $\square$

Следствие 4. В условиях теоремы (4) многозначная функция $\mathcal{W}^-[t]$ является слабо инвариантной по включению относительно системы (1), а функция расстояния $V^-(t, x) = d(G(t_1, t)x, G(t_1, t)\mathcal{W}^-[t])$ — верхним решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзека (см. [9]), т.е. удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\min_{u \in \mathcal{P}(t)} \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} dV^-/dt = \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \{V_t^- + \langle V_x^-, A(t)x + B(t)u + C(t)v \rangle\} \leq 0 \quad (8)$$

с начальным условием $V^-(t_1, x) = d(x, \mathcal{M})$.

Пример 2. На рис. 2 представлены внутренние эллипсоидальные аппроксимации множества разрешимости колебательной системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$ на отрезке времени $[0, \pi]$ при значениях параметра $\gamma = \frac{1}{20}$ и $\frac{1}{2}$. Точные аппроксимации являются вырожденными эллипсоидами (изображены жирными линиями).

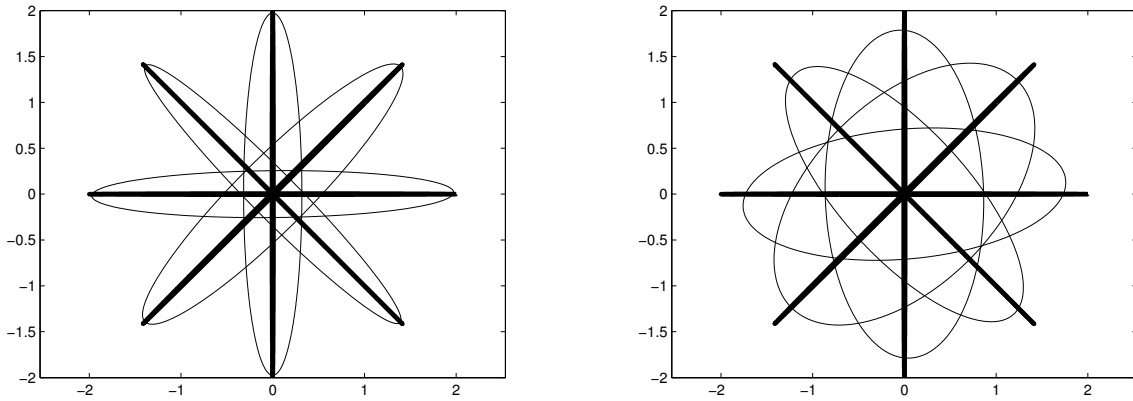


Рис. 2: Внутренние эллипсоидальные аппроксимации множества достижимости двухмерной системы (слева при $\gamma = \frac{1}{20}$, справа при $\gamma = \frac{1}{2}$)

Пример 3. На рис. 3 представлена зависимость размеров эллипсоидальной аппроксимации множества разрешимости для многозвенной колебательной системы (число

звеньев $N = 10$, размерность $n = 2N = 20$). Слева изображены графики всех 20 собственных чисел матрицы $W_1^{\frac{1}{2}}$ (т.е. полуосей эллипсоидальной аппроксимации), справа — объём эллипсоидальной аппроксимации в степени $\frac{1}{n} = \frac{1}{20}$ (т.е. среднее геометрическое полуосей).

На основании анализа подобных графиков для ряда значений N , был сделан вывод, что для устойчивого счёта данной задачи необходимо выбирать число аппроксимаций m близким к размерности системы n .

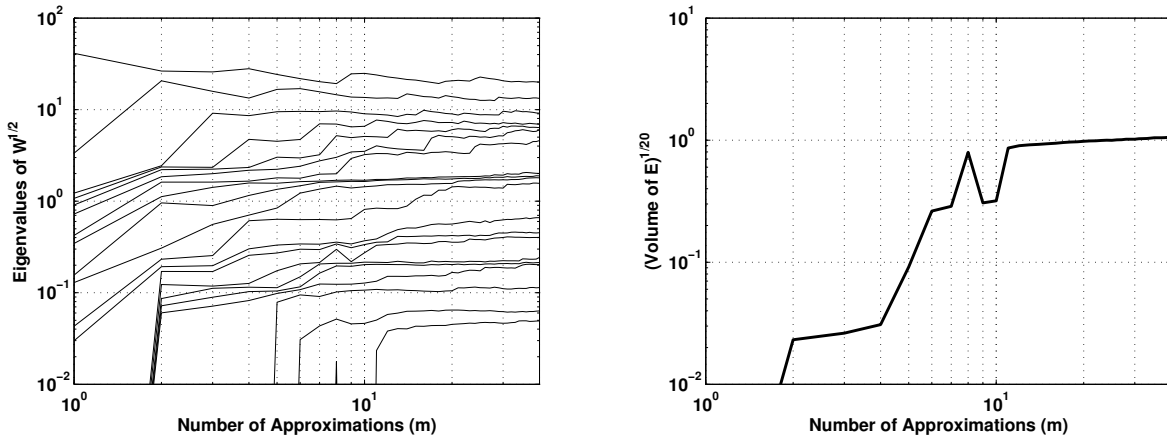


Рис. 3: Размеры эллипсоидальной аппроксимации в зависимости от числа аппроксимаций m (слева — собственные числа, справа — объём в степени $\frac{1}{n}$)

3 Эффективное вычисление матрицы поворота

В уравнение эллипсоидальной аппроксимации (3) входит операция вычисления ортогональной матрицы $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такой что $Tv_2 \uparrow v_1$ для некоторых ненулевых векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Введём обозначение $T = v_1 \oslash v_2$.

Следует отметить, что при $n \geq 2$ матрица $v_1 \oslash v_2$ определена неоднозначно (при $n = 2$ таких матриц не меньше двух, а при $n \geq 3$ бесконечно много). Операцию « $\oslash$ » необходимо определить таким образом, чтобы она обладала достаточной гладкостью (по аргументам v_1, v_2) для применения к уравнению (3) схем численного интегрирования высоких порядков сходимости.

Операция $v_1 \oslash v_2$ может быть вычислена, например, через сингулярные разложения векторов v_1 и v_2 с последующим перемножением матриц преобразований [10]. Сложность этой вычислительной процедуры имеет порядок $O(n^3)$, непрерывная зависимость $v_1 \oslash v_2$ от v_1, v_2 (и тем более гладкость) не гарантируется.

Далее предлагаются явные формулы для вычисления $v_1 \oslash v_2$ со сложностью $O(n^2)$ и обладающие необходимой гладкостью.

Теорема 5. Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ — ненулевые векторы. Матрица $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, вычисленная по формулам

$$T = I + Q_1(S - I)Q_1^T, \quad (9)$$

$$S = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \quad c = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_2 \rangle, \quad s = \sqrt{1 - c^2}, \quad \hat{v}_i = v_i / \|v_i\|, \quad (10)$$

$$Q_1 = [q_1 \quad q_2] \in \mathbb{R}^{n \times 2}, \quad q_1 = \hat{v}_1, \quad q_2 = \begin{cases} s^{-1}(\hat{v}_2 - c\hat{v}_1), & s \neq 0, \\ 0, & s = 0, \end{cases} \quad (11)$$

является ортогональной и обладает свойством $Tv_2 \uparrow\uparrow v_1$.

Доказательство. Пусть $v_1 \nparallel v_2$. Перейдём к единичным векторам $\hat{v}_i = v_i / \|v_i\|$. Будем искать ортогональное преобразование T — поворот в плоскости π , натянутой на векторы v_1 и v_2 , переводящий вектор $\hat{v}_2$ в $\hat{v}_1$. Потребуем, чтобы на ортогональном дополнении к π индуцированный оператор $T|_{\pi^\perp}$ был единичным.

Составим матрицу $V = [\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2]$ и найдём её QR -разложение: $V = QR$, где $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ортогональная матрица $R \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ — верхняя треугольная матрица. Представим матрицы Q и R в блочном виде:

$$Q = [Q_1 \quad Q_2], \quad Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times 2}, \quad Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-2)},$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ O_{(n-2) \times 2} \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Отметим, что столбцы Q_1 образуют ортонормированный базис плоскости π , а столбцы Q_2 — ортонормированный базис ортогонального дополнения $\pi^\perp$. При дополнительном требовании $R_{11} > 0, R_{22} > 0$ матрица Q_1 определена однозначно, а матрица Q_2 может

быть любой, с ортонормированным столбцами, ортогональными столбцам Q_1 . Соотношения (11) представляют собой запись процесса ортогонализации Грама–Шмидта для нахождения матрицы Q_1 .

Положим

$$T = Q \begin{bmatrix} S & O \\ O & I \end{bmatrix} Q^T.$$

Данная матрица является ортогональной как произведение ортогональных матриц. Смысл этого преобразования — перевод плоскости π в плоскость Oe_1e_2 , поворот в этой плоскости и последующее возвращение к исходным координатам.

Покажем, что T не зависит от выбора Q_2 . В самом деле, $T = Q_1 S Q_1^T + Q_2 Q_2^T$. Но из равенства $Q Q^T = Q_1 Q_1^T + Q_2 Q_2^T = I$ имеем $Q_2 Q_2^T = I - Q_1 Q_1^T$ откуда получаем формулу (9), не содержащую Q_2 .

Матрица T является ортогональной и в случае $v_1 \parallel v_2$, т.е. $s = 0$. Тогда $c = \pm 1$. При $c = 1$ имеем $S = I$, поэтому $T = I$. В случае $c = -1$ получаем $T = I - 2\hat{v}_1 \hat{v}_1^T$ и непосредственно проверяем, что $T T^T = I$.

Вычислим $T \hat{v}_2$. Из (11) получаем, что $Q_1^T \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ при любом значении s . Далее имеем

$$T \hat{v}_2 = \hat{v}_2 + Q_1 \begin{pmatrix} c-1 & s \\ -s & c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \hat{v}_2 + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & s^{-1}(\hat{v}_2 - c\hat{v}_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1-c \\ -s \end{pmatrix} = \hat{v}_1.$$

Для любого вектора $v \perp \hat{v}_1, \hat{v}_2$ имеем $Q_1^T v = 0$, поэтому $T v = v$. □

Замечание 5. Отметим, что сложность вычислений в формулах (9)–(11) имеет порядок $O(n^2)$. Более того, умножение на матрицу T может быть также выполнено за $O(n^2)$ операций.

Замечание 6. Непосредственно проверяется, что функция $T = T(v_1, v_2)$ является сколь угодно гладкой при ненулевых векторах v_1, v_2 , за исключением конуса $v_1 \updownarrow v_2$.

4 О параллельных вычислениях

Данный раздел посвящён особенностям использования предложенной внутренней эллипсоидальной оценки в условиях параллельных вычислений.

4.1 Вычисление эллипсоидальных аппроксимаций

Для численного интегрирования дифференциального уравнения (7) с использованием μ параллельных процессов предлагается разбить множество индексов $I = \{1, \dots, m\}$ на μ непересекающихся подмножеств I_k , так что $I = I_1 \cup \dots \cup I_\mu$. Процесс с номером k будет вычислять и хранить значения матриц W_i , $i \in I_k$. (Для балансировки нагрузки между процессами мощности множеств I_k должны быть примерно одинаковыми, порядка m/μ .)

Непосредственное интегрирование уравнения (7) привело бы к существенному объёму обмена данными между процессами, вследствие необходимости вычислять слагаемое $\sum_{i=1}^m \beta_{ij} W_j$. Для того, чтобы этого избежать, предлагается скомбинировать (7) с формулой (5). При таком подходе каждый процесс решает свою систему матричных дифференциальных уравнений (7), в которой упомянутое слагаемое заменено на $\sum_{i \in I_k} \beta_{ij} W_j$, где $\sum_{j \in I_k} \beta_{ij} = 1$. Перемешивание аппроксимаций, принадлежащих разным процессам, производится через заданные промежутки времени по формуле (5) при $\alpha_i = \frac{1}{m}$, что позволяет существенно уменьшить количество обменов данными по сети.

4.2 Вычисление управлений

Для обеспечения дифференциального неравенства (8), управление, гарантирующее приведение системы в целевое множество $\mathcal{M}$, может быть выбрано как соответствующий максимизатор:

$$\mathcal{U}^*(t, x) = \begin{cases} -\frac{P(t)B^T(t)p}{\langle B^T(t)p, P(t)B^T(t)p \rangle^{\frac{1}{2}}}, & B^T(t)p \neq 0; \\ \mathcal{P}(t), & B^T(t)p = 0; \end{cases}$$

где вектор $p = p(t, x) = \partial V^- / \partial x$ имеет смысл кратчайшего пути от точки x до множества $\mathcal{W}^-[t]$. Множество $\mathcal{W}^-[t]$ является выпуклой оболочкой набора множеств, поэтому вычисление вектора p является трудной процедурой — нахождением максимина

$$V^-(t, x) = \max_{\|p\| \leq 1} \min_{i=1, \dots, m} \{ \langle p, G(t_1, t)x \rangle - \rho(G^T(t_1, t)p \mid \mathcal{W}_i^-[t]) \} \quad (12)$$

(особенно учитывая тот факт, что параметры множеств хранятся в разных процессах).

Предлагается заменить функцию $V^-(t, x)$ на

$$\hat{V}^-(t, x) = d(G(t_1, t)x, G(t_1, t)\hat{\mathcal{W}}^-[t]), \quad \hat{\mathcal{W}}^-[t] = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{W}_i^-[t] = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}(w(t), W_i(t)),$$

что соответствует перестановке операций максимума и минимума в (12)

$$\hat{V}^-(t, x) = \min_{i=1, \dots, m} \max_{\|p\| \leq 1} \{ \langle p, G(t_1, t)x \rangle - \rho(G^T(t_1, t)p \mid \mathcal{W}_i^-[t]) \}. \quad (13)$$

Отсюда находим, что вектор $\hat{p}(t, x) = \partial V^- / \partial x$ равен $\hat{p} = \hat{p}_{i_0}$, где i_0 — номер $i \in \overline{1, m}$, на котором достигается минимум в (13), а $\hat{p}_i$ — максимизатор в (13) при фиксированном i .

Таким образом, для синтеза управлений каждый из процессов локально находит ближайший к текущему положению эллипсоид, после чего определяется процесс, содержащий глобально ближайший к текущему положению эллипсоид. Этот процесс вычисляет управление и сообщает его всем остальным процессам.

4.3 Результаты моделирования

Программа написана на языке Fortran 2003 с использованием интерфейса MPI (Message Passing Interface) для параллелизации, библиотеки MKL (Intel Math Kernel Library) для матричных вычислений, библиотеки NAG для решения дифференциальных уравнений и прочих вычислений.

Результаты вычислений для многозвенной колебательной системы [8] (N — число звеньев, размерность системы $n = 2N$) получены для следующих данных:

- $N = 25$ ($n = 50$) для системы с помехой без выполнения условия подобия;
- $N = 50$ ($n = 100$) для системы с односторонним скалярным управлением ($u \in [0, \mu]$);
- $N = 50$ ($n = 100$) для неоднородной системы (нижняя часть цепи в два раза тяжелее верхней);
- $N = 100$ ($n = 200$) для системы со скалярным управлением;
- $N = 250$ ($n = 500$) для системы с управлением размерности N .

Список литературы

- [1] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [2] *Половинкин Е. С., Балашихов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
- [3] *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-Theoretical Control Problems. SSSM. N.Y.: Springer, 1988.
- [4] *Куржанский А. Б., Никонов О. И.* Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Доклады РАН. 1993. Т. 333. № 4. С. 578–581.
- [5] *Куржанский А. Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
- [6] *Kurzhanski A. B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [7] *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization methods and software. 2002. V. 17. N. 2. P. 207–237.
- [8] *Востриков И. В., Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* Успокоение многозвенной колебательной системы в условиях неопределённых возмущений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1452–1463.
- [9] *Basar T., Olsder J.* Dynamic Noncooperative Game Theory. N.Y.: Academic Press, 1982.
- [10] *Kurzhanskiy A. A., Varaiya P.* Ellipsoidal toolbox. <http://code.google.com/p/ellipsoids/>, 2005.

Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Александр Николаевич Дарьин

119991 Москва, Ленинские горы, 1, ф-т ВМК МГУ

тел. +7 (495) 939-51-35 (раб.), +7 (916) 633-12-59 (моб.).

daryin@cs.msu.su, a.daryin@gmail.com

(автор, отвечающий за переписку)

Александр Борисович Куржанский

119991 Москва, Ленинские горы, 1, ф-т ВМК МГУ

тел. +7 (495) 932-88-50 (раб., тел./факс), +7 (495) 938-13-41 (дом.).

kurzhans@mail.ru, kurzhans@cs.msu.su