2011. Т. 47 № ??. С. 1 — 10

УДК 517.977

БЫСТРЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

Как известно, центральным для приложений вопросом математической теории управления в условиях неизвестных возмущений является построение синтезирующих управляющих стратегий, реализующих соответствующие воздействия в виде обратной связи. Искомые управления тогда зависят не только от времени, как у программных, но также и от текущего состояния системы. Такие управления весьма необходимы, однако их сложно вычислять. Ниже приводится класс ограниченных управляющих воздействий (так называемых «быстрых воздействий»), позволяющий решать задачи синтеза целевого управления в линейных системах с геометрическими («мгновенными») ограничениями на возмущения путём сведения к более простым программным задачам. Он построен путём аппроксимации импульсных управлений, допускающих высшие производные дельта-функций.

1 Задача

Рассматривается линейная система с управлением u и неопределённым возмущением («помехой») v вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

и с размерностями $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^k$, $m, k \leq n$. Интервал времени $[t_0, t_1]$ задан заранее. Матричные функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ известны и обладают достаточной гладкостью для последующих построений.

Помеха $v(t)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая ограничению

$$v(t) \in \mathscr{Q}(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $\mathscr{Q}(t)$ — многозначная функция со значениями в $\operatorname{conv}\mathbb{R}^k$ — множестве выпуклых компактов из $\mathbb{R}^k$. Функция $\mathscr{Q}(t)$ — непрерывная в хаусдорфовой метрике, задаваемая, например, неравенствами $|v_i(t)| \leq \nu_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Целью управления является приведение системы на данное целевое множество $\mathscr{M} \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ в момент времени t_1, несмотря на возможные действия помехи.

Перейдём к описанию классов управлений. Здесь известно [7, 8], что если $B(t) \equiv C(t)$ и управление $u(t)$ — функция того же класса что и $v(t)$, ограниченная условием $u(t) \in \mathscr{P}(t)$, с однотипным ограничением $\mathscr{P}(t) = \alpha(t)\mathscr{Q}(t)$, $|\alpha(t)| \geqslant 1$, то решения задач минимаксимизации (например, рассматриваемой на минимакс по u, v отклонения в конечный момент процесса от заданного целевого множества $\mathscr{M} \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$), полученных в классе программных и в классе синтезированных управлений, совпадают. Иная ситуация возникает в отсутствии упомянутого условия «однотипности» ограничений. Тогда решение задачи синтеза намного сложнее, чем программной, и требует серьёзной дополнительной вычислительной нагрузки.

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00589-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (контракт № 16.740.11.0426 от 26 ноября 2010 года) и гранта МК-1111.2011.1.

Задача 1. Указать класс управлений, позволяющий свести решение задачи синтеза к программным конструкциям.

В настоящей статье предложен иной класс управлений, обеспечивающий эффект аналогичный свойству однотипности для более широкого круга систем, чем в задачах с однотипными геометрическими ограничениями на управления и возмущения. Это класс кусочно-постоянных функций с переменными амплитудами, порождённый аппроксимациями «идеальных управлений» — линейных комбинаций дельта-функций и их высших производных. Он подробно описан далее. Использование такого класса управлений также позволяет сводить нахождение решения задачи синтеза к более простой задаче вычисления программных управлений.

2 Обобщённые управления

Пусть в качестве качестве управляющего воздействия на вход системы подаются обобщённые функции (распределения) порядка s. Известно [5, 1], что последние могут быть представлены в виде суммы обобщённых производных высших порядков от функций ограниченной вариации:

$$u(t) = \sum_{j=0}^{s} \frac{d^{j+1}U_j(t)}{dt^{j+1}}, \quad U_j(\cdot) \in BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m). \tag{2}$$

В частности, оптимальные обобщённые управления в задаче о переводе линейной системы в заданное состояние при отсутствии помехи, как показано в [9], имеют вид

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{s} h_{i,j} \delta^{(j)}(t - \tau_j), \tag{3}$$

где $\delta(t) = \chi'(t)$ — дельта функция, обобщённая производная функции Хевисайда $\chi(t) \in BV[t_0, t_1]$; векторы $h_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ определяют направление и амплитуду обобщённых импульсов, τ_i — моменты приложения этих импульсов.

При подстановке управления вида (2) в исходное дифференциальное уравнение (1) получаем следующую систему с импульсным управлением (см. [9]):

$$dx(t) = A(t)x(t)dx(t) + \mathscr{B}(t)dU(t) + C(t)v(t)dt, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{4}$$

где $\mathscr{B}(t) = \begin{bmatrix} L_0(t) & \cdots & L_s(t) \end{bmatrix}$, $U(t) = \begin{bmatrix} U_0(t) & \cdots & U_s(t) \end{bmatrix} \in BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{m(s+1)})$ — импульсное управление, цель управления — $x(t_1 + 0) \in \mathscr{M}$, матричные функции $L_j(t)$ находятся из рекуррентных соотношений

$$L_0(t) = B(t), \quad L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - \frac{dL_{j-1}(t)}{dt}, \quad j = \overline{1, s}. \tag{5}$$

Таким образом, применение импульсов высших порядков может увеличивать возможности управления в том смысле, что $\operatorname{Range} \mathscr{B}(t) \supseteq \operatorname{Range} B(t)$ (здесь и далее Range обозначает линейную оболочку столбцов матрицы).

Предположение 1. Найдётся $s \leqslant n - 1$, при котором $\operatorname{Range} \mathscr{B}(t) \supseteq \operatorname{Range} C(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Предположение выполнено, если $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$, и $[A, B]$ — управляемая пара. В этом случае минимальное значение s совпадает с индексом управляемости системы.

Заменим «идеальное» импульсные управления в системе (4) физически реализуемыми ограниченными функциями, для чего наложим на управляющее воздействие $\mathbf{u}(t) = dU/dt$ геометрическое ограничение

$$\mathbf{u}(t) \in \mathscr{P}(t).$$

Тогда система (4) примет вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \mathscr{B}(t)\mathbf{u}(t) + C(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_0(t) & \cdots & u_s(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(s+1)}$, цель управления снова $x(t_1) \in \mathscr{M}$.

Известно, что при выполнении условия «полного выметания»[1]

$$(\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t) \dot{-} C(t)\mathscr{Q}(t)) + C(t)\mathscr{Q}(t) = \mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t) \tag{7}$$

решение задачи построения синтезирующей стратегии [7, 8] существенно упрощается. Это условие эквивалентно выпуклости разности опорных функций множеств $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t)$ и $C(t)\mathscr{Q}(t)$.

Нашей целью будет согласовать ограничения на помеху и управление так, чтобы выполнялось условие (7). При заданном множестве $\mathscr{Q}(t)$ к такому согласованию можно, в частности, подойти следующими двумя путями:

1. Подобрать соответствующее $\mathscr{P}(t)$.
2. Выбрать некоторое $\mathscr{P}(t)$, так чтобы $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t) \dot{-} C(t)\mathscr{Q}(t) \neq \varnothing$. Далее подобрать множество $\hat{\mathscr{Q}}(t) \supseteq \mathscr{Q}(t)$, при котором выполняется условие полного выметания.

3 Выбор ограничения на управление

3.1 Общий случай

Лемма 1. *Для любого множества* $\mathscr{N}(t) \in \operatorname{conv}\operatorname{Range}\mathscr{B}(t)$ *существует множество* $\mathscr{P}(t) \in \operatorname{conv}\mathscr{R}^{m(s+1)}$, *такое что* $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t) = \mathscr{N}(t)$.

Предположение 2. Матрицы $A(t)$, $B(t)$ таковы, что $\operatorname{rank}\mathscr{B}(t) \equiv \text{const}$ и номера столбцов в $\mathscr{B}(t)$, образующих базис в $\operatorname{Range}\mathscr{B}(t)$, могут быть выбраны кусочно-постоянными функциями от t с конечным числом переключений.

Лемма 2. *При выполнении предположения функция* $\mathscr{P}(t)$ *может быть выбрана кусочно-непрерывной, полунепрерывной сверху по включению.*

Для выполнения условия полного выметания тогда достаточно положить

$$\mathscr{N}(t) = \alpha C(t)\mathscr{Q}(t) + \mathscr{N}_0(t), \quad \alpha \geqslant 1,$$

где $\mathscr{N}_0(t) \in \operatorname{conv}\operatorname{Range}\mathscr{B}(t)$ — некоторое множество, которое можно выбирать в соответствии с особенностями физической реализации системы.

3.2 Система специального вида

Рассмотрим систему, у которой $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$, $[A, B]$ — управляемая пара. Параметры помехи $\mathscr{Q}(t) \equiv \mathscr{Q}$, $C(t) \equiv C$ имеют описанный ниже вид.

В этом случае

$$\mathscr{B}(t) \equiv \mathscr{B} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^sB \end{bmatrix}.$$

Пусть помеха $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) & \cdots & v_r(t) \end{bmatrix}$, матрица C имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} k_1A^{j_1}B & \cdots & k_rA^{j_r}B \end{bmatrix}, \quad 0 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant s; \quad k_i \in \mathbb{R}.$$

Пусть ограничение на помеху $\mathscr{Q}$ задано в виде

$$\|v_1(t)\| \leqslant 1, \quad \ldots, \quad \|v_s(t)\| \leqslant 1.$$

Тогда ограничение на управление можно задавать в виде

$$\|u_0(t)\| \leqslant \mu_0, \quad \ldots, \quad \|u_s(t)\| \leqslant \mu_s,$$

причём для выполнения условия полного выметания достаточно потребовать

$$\mu_{j_1} \geqslant k_1, \quad \ldots, \quad \mu_{j_r} \geqslant k_r.$$

[1] Символ $\dot{-}$ означает геометрическую разность множеств: $A \dot{-} B = \{x \mid x + B \subseteq A\}$.

3.3 Пример

Рассмотрим трёхзвенную колебательную систему [4]

$$\begin{cases} m\ddot{w}_1 = k(w_2 - 2w_1) + mv_1(t), \\ m\ddot{w}_2 = k(w_3 - 2w_2 + w_1) + mv_2(t), \\ m\ddot{w}_3 = k(w_2 - w_3) + mu(t) + mv_3(t), \end{cases} \tag{8}$$

состоящую из последовательно соединённых грузов массы m и пружин жёсткости k. Переменные w_j описывают смещение грузов относительно состояния равновесия. Управление u и помехи v_j имеют смысл ускорений. Будем считать, что помехи удовлетворяют ограничениям $|v_j(t)| \leqslant \nu_j$, $j = \overline{1,3}$.

Условие «полного выметания» для системы (8) не выполняется, т.к. управление u входит только в последнее уравнение, тогда как помеха присутствует в каждом уравнении.

Запишем систему (8) в нормальной форме (обозначив $\omega = k/m$):

$$\begin{cases} \dot{x}_j = x_{3+j}, \quad j = \overline{1,3}; \\ \dot{x}_4 = \omega(x_2 - 2x_1) + v_1(t), \\ \dot{x}_5 = \omega(x_3 - 2x_2 + x_1) + v_2(t), \\ \dot{x}_6 = \omega(x_2 - x_3) + u(t) + v_3(t). \end{cases} \tag{9}$$

Для обеспечения условия $\operatorname{Range}\mathscr{B}(t) \supseteq \operatorname{Range}C(t)$ необходимо использовать распределения порядка не ниже $s \geqslant 4$. Для вычислений в примере выберем $s = 5$. Матрица $\mathscr{B}(t)$ равна тогда

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & -3\omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega & 0 & 2\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & -3\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & -\omega & 0 & 2\omega^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система с такой матрицей не подходит под случай, рассмотренный в предыдущем параграфе. Сделаем замену координат в управлении:

$$\hat{u}_1 = u_1 - \omega u_3 + 2\omega^2 u_5, \quad \hat{u}_3 = \omega u_3 - 3\omega^2 u_5, \quad \hat{u}_3 = \omega^2 u_5,$$
$$\hat{u}_2 = u_2 - \omega u_4 + 2\omega^2 u_6, \quad \hat{u}_4 = \omega u_4 - 3\omega^2 u_6, \quad \hat{u}_6 = \omega^2 u_6.$$

Тогда

$$\hat{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

система (9) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 + \hat{u}_6(t), \quad \dot{x}_4 = \omega(x_2 - 2x_1) + +\hat{u}_5(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_2 = x_5 + \hat{u}_4(t), \quad \dot{x}_5 = \omega(x_3 - 2x_2 + x_1) + \hat{u}_3(t) + v_2(t), \\ \dot{x}_3 = x_6 + \hat{u}_2(t), \quad \dot{x}_6 = \omega(x_2 - x_3) + \hat{u}_1(t) + v_3(t). \end{cases}$$

Ограничения на управления теперь выберем в виде

$$|\hat{u}_1(t)| \leqslant \alpha_3\nu_3, \quad |\hat{u}_3(t)| \leqslant \alpha_2\nu_2, \quad |\hat{u}_5(t)| \leqslant \alpha_1\nu_1, \quad \alpha_j \geqslant 1.$$

Управления $\hat{u}_2(t)$, $\hat{u}_4(t)$, $\hat{u}_6(t)$ можно ограничить произвольным выпуклым множеством. В частности, можно положить $\hat{u}_2(t) = \hat{u}_4(t) = \hat{u}_6(t) = 0$, чтобы сохранить физический смысл (управление непосредственно влияет только на скорости, но не на смещения грузов).

4 Выбор ограничения на помеху

Пусть выбрано множество $\mathscr{P}(t)$, удовлетворяющее условиям:

1. $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t) \dot{-} C(t)\mathscr{Q}(t) \neq \varnothing$;
2. $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t)$ — порождающее множество [10, стр. 324] в пространстве $\operatorname{Range}\mathscr{B}(t)$.

Напомним, что $\mathscr{X} \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ — порождающее множество, если для произвольного множества $\mathscr{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$, для которого $\mathscr{X} \dot{-} \mathscr{Y} \neq \varnothing$, найдётся множество $\mathscr{Z} \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ такое, что $\mathscr{X} \dot{-} \mathscr{Y} + \mathscr{Z} = \mathscr{X}$. Учитывая, что в этом случае $\mathscr{X} \dot{-} \mathscr{Z} + \mathscr{Z} = \mathscr{X}$, получаем, что для множеств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Z}$ выполнено условие «полного выметания».

Тогда, применяя лемму 1, можем заменить множество $\mathscr{Q}(t)$ на $\hat{\mathscr{Q}}(t) \supseteq \mathscr{Q}(t)$, так что выполняется условие (7).

Укажем, каким образом можно выбрать порождающее множество для ограничения на управление.

При $n = 2$ любое выпуклое замкнутое множество будет порождающим [10, теор. 4.2.6].

При $n \geqslant 3$, пусть выполнено предположение 1. Выберем в $\mathscr{B}(t)$ базисные столбцы. Пусть это первые q столбцов (иначе перенумеруем их). Тогда $\mathscr{B}(t) = \begin{bmatrix}\mathscr{B}_1(t) & \mathscr{B}_2(t)\end{bmatrix}$, где $\mathscr{B}_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times q}$ — матрица полного ранга. Соответственно $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1(t) & \mathbf{u}_2(t)\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1(t) \in \mathbb{R}^q$. Наложим на управление $\mathbf{u}(t)$ ограничение следующего вида:

1. ограничение на $\mathbf{u_1}$ одного из двух типов:
   (a) $|(\mathbf{u}_1)_j| \leqslant \mu_j$;
   (b) $\|\mathbf{u}_1\| \leqslant \mu$.
2. $\mathbf{u_2} = 0$ (временно).

Тогда согласно [10, теор. 4.2.3, 4.2.4, 4.2.7] множество $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t)$ будет порождающим. Числа μ_j (либо число μ) необходимо выбрать так, чтобы $\mathscr{B}(t)\mathscr{P}(t) \dot{-} C(t)\mathscr{Q}(t) \neq \varnothing$.

После того, как выбрано соответствующее расширенное множество $\hat{\mathscr{Q}}(t)$, можно убрать нулевое ограничение на $\mathbf{u}_2(t)$, оставив произвольное ограничение $\mathbf{u}_2(t) \in \mathscr{P}_2(t)$.

5 Вид управлений в исходной системе

Описанный подход позволит получить управление в виде синтеза для системы (6) и затем при некоторой реализовавшейся помехе $v(t)$ вычислить управляющее воздействие $\mathbf{u}(t)$. Далее необходимо указать, чему соответствует это управление в исходной системе (1).

Непосредственно воспользоваться формулой (2) не представляется возможным, поскольку дифференцируемость (и даже непрерывность) функции $\mathbf{u}(t)$ не гарантируется. Для решения этой проблемы предлагается аппроксимировать обобщённые управления ограниченными функциями по одной из следующих двух схем.

1. Заменить в (3) производные дельта-функции их аппроксимациями в классе обычных функций. В этом случае получим систему, отличную от (6), для которой надо будет применить описанную в предыдущих разделах теорию.
2. Решить задачу для системы (6), после чего аппроксимировать полученное управление $\mathbf{u}(t)$ достаточно гладкими функциями для применения формулы (2).

5.1 Первая схема

Следуя [6, 11], заменим в формуле (3) производные дельта-функции их кусочно-постоянными аппроксимациями:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{s} h_{i,j} \Delta_h^{(j)}(t - \tau_j), \tag{10}$$

где

$$\Delta_h^{(0)}(t) = h^{-1} \mathbf{1}_{[0,h]}(t), \quad \Delta_h^{(j)}(t) = h^{-1} \left(\Delta_h^{(j-1)}(t) - \Delta_h^{(j-1)}(t-h) \right), \quad j = 1, \ldots, s. \tag{11}$$

Отметим необходимые нам свойства указанных аппроксимаций.

1. Слабым пределом $\Delta_h^{(j)}(t)$ в пространстве обобщённых функций порядка j при $h \to 0$ является $\delta^{(j)}(t)$.

2. Из рекуррентного соотношения (5) следует явный вид этих функций:

$$\Delta_h^{(j)}(t) = h^{-(j+1)} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i C_j^i \mathbf{1}_{[ih,(i+1)h]}(t).$$

Запишем формулу Коши для системы (6):

$$x(\vartheta) = X(\vartheta, t_0) x_0 + \sum_{j=0}^{s} \int_{t_0}^{\vartheta} X(\vartheta, t) L_j(t) u_j(t) dt + \int_{t_0}^{\vartheta} X(\vartheta, t) C(t) v(t) dt. \tag{12}$$

Заметим, что функции $L_j(t)$ из (5) определяются соотношениями

$$L_j(t) = (-1)^j X(t, t_0) [X(t_0, t) B(t)]^{(j)}.$$

Представим в последнем выражении производную как свёртку с производной дельта-функции:

$$L_j(t) = X(t, t_0) \int_{\mathbb{R}} X(t_0, \tau) B(\tau) \delta^{(j)}(\tau - t) d\tau,$$

после чего перейдём к аппроксимациям (11):

$$M_h^{(j)}(t) = \int_t^{t+(j+1)h} X(t, \tau) B(\tau) \Delta_h^{(j)}(\tau - t) d\tau. \tag{13}$$

Теорема 1. *Матричные функции $\mathscr{M}_h^{(j)}(t)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:*

$$M_h^{(j)}(t) = h^{-1}(M_h^{(j-1)}(t) - X(t, t+h) M_h^{(j-1)}(t+h)), \quad M_h^{(0)}(t) = h^{-1} \int_t^{t+h} X(t, \tau) B(\tau) d\tau.$$

В частности, при $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$

$$M_h^{(j)} = h^{-j} (I - e^{-Ah})^j M_h^{(0)}, \quad M_h^{(0)} = h^{-1} \left[\int_0^h e^{At} dt \right] B.$$

Теорема 2. *Пусть матричная функция $A(t)$ непрерывна, а $B(t)$ является $s+1$ раз непрерывно дифференцируемой. Тогда функции $M_h^{(j)}(t)$ при $h \to 0$ сходятся к $L_j(t)$ равномерно на $[t_0, t_1]$, $j = 0, \ldots, s$.*

Доказательство. Утверждение теоремы доказывается применением ко всем элементам матрицы $M_h^{(j)}(t)$ следующей леммы. □

Лемма 3. *Пусть функция* $f(t)$ *является* $j+1$ *раз непрерывно дифференцируемой. Тогда имеет место равномерная сходимость*

$$\int_t^{t+(j+1)h} f(\tau)\Delta_h^{(j)}(\tau-t)d\tau \rightrightarrows (-1)^j f^{(j)}(t).$$

Доказательство. Разобьём промежуток интегрирования на отрезки $[ih,(i+1)h]$ и сделаем на каждом из них замену $\tau' = \tau - ih$:

$$I(h) = \int_t^{t+(j+1)h} f(\tau)\Delta_h^{(j)}(\tau-t)d\tau = \int_t^{t+h} f(\tau+ih)\Delta_h^{(j)}(\tau+ih-t)d\tau =$$

$$= h^{-1}(-1)^j \int_t^{t+h} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+j} h^{-j} C_j^i f(\tau+ih)d\tau.$$

Подынтегральное выражение является конечно-разностной аппроксимацией j-й производной, при сделанных предположениях равной $f^{(j)}(t)+O(h)g_1(t)$, где $g_1(t)$ — ограниченная функция от t. Таким образом $I(h) = (-1)^j f^{(j)}(t)+O(h)g_2(t)$, где $g_2(t)$ — также ограниченная функция. □

Следствие 1. *В условиях теоремы матричная функция* $\mathscr{M}_h(t) = \begin{pmatrix} M_h^{(0)}(t) & \cdots & M_h^{(s)}(t) \end{pmatrix}$ *при* $h \to 0$ *сходится к* $\mathscr{B}(t)$ *равномерно на* $[t_0,t_1]$.

Следствие 2. *Если* $\operatorname{rank}\mathscr{B}(t) \equiv n$, *то при достаточно малых* $h > 0$ *имеем также* $\operatorname{rank}\mathscr{M}_h(t) \equiv n$.

Заменим в (12) функции $L_j(t)$ на $M_h^{(j)}(t)$:

$$x_h(\vartheta) = X(\vartheta,t_0)x_0 + \sum_{j=0}^{s}\int_{t_0}^{\vartheta} X(\vartheta,t)M_h^{(j)}(t)u_j(t)dt + \int_{t_0}^{\vartheta} X(\vartheta,t)C(t)v(t)dt. \tag{14}$$

Последнее является формулой Коши для системы

$$\dot{x}_h(t) = A(t)x_h(t) + \mathscr{M}_h(t)\mathbf{u}(t) + C(t)v(t), \quad t \in [t_0,t_1]. \tag{15}$$

Теорема 3. *Траектории* $x_h(t)$ *системы* (15) *равномерно сходятся к траектории* $x(t)$ *системы* (6) *при* $h \to 0$ *на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 2 и формулы (14). □

Считаем, что $u_j(t) = 0$ при $t < t_0$. После подстановки в (14) выражения для $M_h^{(j)}(t)$ и изменения порядка интегрирования получаем

$$x_h(\vartheta) = X(\vartheta,t_0)x_0 + \sum_{j=0}^{s}\int_{t_0}^{\vartheta+(j+1)h} X(\vartheta,t)B(t)\int_{t_0}^{t\wedge\vartheta}\Delta_h^{(j)}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau dt + \int_{t_0}^{\vartheta} X(\vartheta,t)C(t)v(t)dt.$$

Отсюда следует

Теорема 4. *Пусть* $u(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$ *при* $t \in (\vartheta,\vartheta+(s+1)h]$. *Тогда* $x_h(\vartheta+(s+1)h) = x(\vartheta+(s+1)h)$, *где* $x(t)$ *— траектория исходной системы* (1) *при управлении*

$$u_h(t) = \sum_{j=0}^{s}\int_{t_0}^{t}\Delta_h^{(j)}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Отметим, что $u_h(t)$ зависит только от значений $\mathbf{u}(\tau)$ при $\tau \leqslant t$, т.е. может быть вычислено по имеющейся к моменту t информации.

Доказанные теоремы позволяют указать схему нахождения управляющих входов для исходной системы:

1. Зафиксировать $h > 0$ и перейти к рассмотрению системы (15).

2. Применить теорию выбора ограничений на управление и/или на помеху, с $\mathscr{B}(t)$ на $\mathscr{M}_h(t)$. (В силу следствия 2, если $\operatorname{Range}\mathscr{B}(t) = \mathbb{R}^n$, то $\operatorname{Range}\mathscr{M}_h(t) = \operatorname{Range}\mathscr{B}(t)$.)

3. Для системы (15) с выбранными ограничениями построить синтез управлений $\mathscr{U}(t,x)$.

4. Определить реализовавшуюся траекторию управления $\mathbf{u}(t)$.

5. По формуле (16) найти управляющее воздействие для исходной системы (1). (Учитывая, что управление $u_h(t)$ зависит только от прошлых значений $\mathbf{u}(t)$, оно может вычисляться по ходу процесса управления.)

5.2 Вторая схема

Кратко опишем вторую схему построения управляющего воздействия для исходной системы. Пусть $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_0(t) & \cdots & u_s(t) \end{bmatrix}$ — реализовавшееся управление для системы (6). Аппроксимируем его компоненты гладкими функциями:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{u}_0(t) & \cdots & \hat{u}_s(t) \end{bmatrix},$$
$$\hat{u}_j(t) = h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} K_j((t-\tau)/h) u_j(\tau) d\tau.$$

К ядрам свёртки $K_j(t)$ предъявляются следующие требования: $K_j(t) = 0$ при $t < 0$; $K_j(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$; $K_j(t)$ непрерывно дифференцируемо j раз; условие нормировки: $\int_0^\infty K_j(t)dt = 1$.

В качестве $K_j(t)$ можно выбрать, например, следующие степенные функции:

$$K_j(t) = C_j(t(1-t))^{j+1}, \quad C_j = \frac{(2j+3)!}{((j+1)!)^2}.$$

Управление $\hat{\mathbf{u}}(t)$ соответствует следующему управляющему воздействию для исходной системы (1):

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^{s} \hat{u}_j^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{s} h^{-(j+1)} \int_{t_0}^{t_1} K_j^{(j)}((t-\tau)/h) u_j(\tau) d\tau.$$

Полученная аппроксимация обладает следующими свойствами.

1. $\hat{u}_j(t) \to u_j(t)$ почти всюду при $h \to 0$;

2. Траектории $\hat{x}(t)$ системы (1) при управлении $\hat{u}(t)$ совпадают с траекториями системы (6) при управлении $\hat{\mathbf{u}}(t)$. Последние поточечно сходятся к траекториям $x(t)$ системы (6) при управлении $\mathbf{u}(t)$.

3. $\hat{u}(t)$ зависит только от значений $\mathbf{u}(\tau)$ при $\tau \leqslant t$, т.е. может быть вычислено по имеющейся к моменту t информации.

5.3 Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) + v_2(t), \end{cases}$$

с ограничениями на помеху $|v_1| \leqslant \mu_1$, $|v_2| \leqslant \mu_2$.

Для этой системы

$$\mathscr{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{M}_h(t) = \begin{bmatrix} h/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

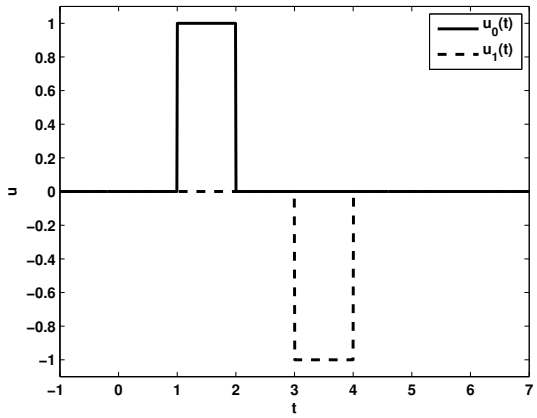

Рис. 1: Управления $u_j(t)$ для системы (6)

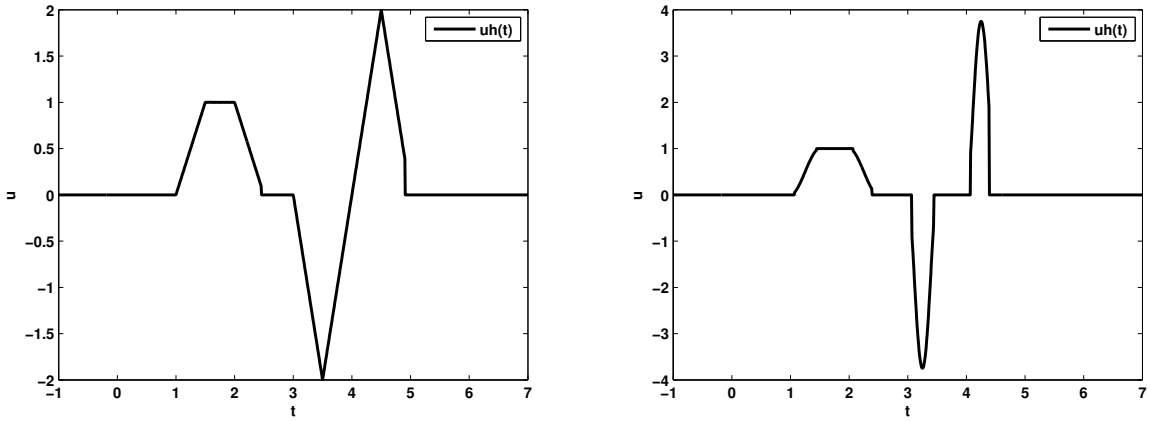

Рис. 2: Управляющие воздействия для исходной системы (1), полученные по первой (слева) и второй схеме (справа)

Для применения первой схемы в управлении сделаем линейную замену в управлении: $\hat{u}_1(t) = hu_1(t)/2 + u_2(t)$, $\hat{u}_2(t) = u_1(t)$, получив в качестве системы (15)

$$\begin{cases} \dot{x}_{h1}(t) = x_{h2}(t) + \hat{u}_1(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_{h2}(t) = \hat{u}_2(t) + v_2(t). \end{cases}$$

В качестве ограничений на управление можно выбрать $|\hat{u}_1| \leqslant \nu_1$, $|\hat{u}_2| \leqslant \nu_2$, где $\nu_j \geqslant \mu_j$.

Применение второй схемы сразу даёт систему (6) вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) + v_2(t), \end{cases}$$

в которой ограничения на управления также могут быть выбраны в виде $|u_1| \leqslant \nu_1$, $|u_2| \leqslant \nu_2$, где $\nu_j \geqslant \mu_j$.

Пусть в системе (6) реализовалось управление, представленное на рис. 1. Тогда рис. 2 показывает управляющие воздействия для системы (1), полученные по первой и второй схемам. Здесь $t_0 = 0$, $t_1 = 5$, $h = 0{,}5$.

Список литературы

[1] *Агранович М. С.* Обобщённые функции. М.: МЦНМО, 2008.

[2] *Бенсусан А., Лионс Ж.-Л.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1987.

[3] *Владимиров В. С.* Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

[4] *Вострикова И. В., Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* Успокоение многозвенной колебательной системы в условиях неопределённых возмущений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1452–1463.

[5] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции и действия над ними, *Обобщённые функции*, Т. 1. М.: Физматгиз, 1957.

[6] *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* Синтез управлений в классе обобщённых функций высших порядков // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 11. С. 1443–1453.

[7] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[8] *Куржанский А. Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.

[9] *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360–1370.

[10] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.

[11] *Kurzhanski A. B., Daryin A. N.* Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. N. 2. P. 213–227.

[12] *Rockafellar R. T., Wets R. J.* Variational Analysis. Berlin: Springer, 2005.

[13] *Schwartz L.* Théorie des distributions. Paris: Hermann, 1950.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
9 марта 2011 г.

УДК 517.977

Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. **Быстрые воздействия в задаче синтеза управлений при неопределённости** // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № ??. С. 1 — 10.

В статье приводится класс ограниченных управляющих воздействий, позволяющий решать задачи синтеза целевого управления в линейных системах с геометрическими («мгновенными») ограничениями на возмущения путём сведения к более простым программным задачам.

Библиогр. 13 назв.