2007. Т. ???, № ???. С. 1 — 11

УДК 517.977

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ В КЛАССЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

Настоящая работа посвящена задачам импульсного управления. Её отличие от других работ на эту тему состоит прежде всего в том, что управления выбирается в классе функций, допускающих не только импульсы первого порядка (дельта-функции), но и конечное число высших производных этих функций (обобщённые импульсы или импульсы высших порядков). Кроме того, здесь управление ищется в виде позиционных стратегий, а не программных решений. Последнее приводит к применению модифицированного варианта теории динамического программирования, приспособленного для такого рода задач и основанного на сведении исходной задачи к некоторой другой, рассматриваемой уже в классе, допускающем импульсы лишь первого порядка. В упомянутой модификации место уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана занимают вариационные неравенства аналогичной структуры. Однако решения в классе обобщённых функций высших порядков могут не допускать физической реализации. Чтобы сделать решения применимыми предлагаются физически реализуемые аппроксимации, сходящиеся к точным решениям. Так, в классе обобщённых функций высших порядков оказывается возможным перевести линейную систему, обладающую свойством управляемости, из одного заданного состояния в другое за нулевое время. Физическая же реализация такого решения позволяет решить ту же задачу за сколь угодно малое конечное время, что приводит к понятию физически реализуемых «быстрых» управлений. В заключение указывается возможность численного решения задачи о построении областей достижимости линейных систем в обсуждаемом классе управлений, содержащих импульсы высших порядков, при помощи методов эллипсоидального исчисления. Последнее может достигаться путём применения принципа сравнения для уравнений и неравенств типа Гамильтона–Якоби–Беллмана.

1 Задача

Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление. Матричные функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ известны и k раз дифференцируемы на отрезке $\alpha \le t \le \beta$.

Управления $u(t)$ выбираются из класса $D^*_{k,m}[\alpha,\beta]$ линейных непрерывных функционалов над линейным нормированным пространством $D_{k,m}[\alpha,\beta]$ [1, 2]. Последнее состоит из k раз дифференцируемых функций $\phi(t) : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ с носителями из промежутка $[\alpha,\beta]$ и наделено нормой

$$\rho[\phi] = \max_{t\in[\alpha,\beta]} \gamma[\gamma_0(\phi(t)), \gamma_1(\phi'(t)), \ldots, \gamma_k(\phi^{(k)}(t))],$$

где γ_k, γ — конечномерные нормы в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^{k+1}$. Норма $\rho[\phi]$ определяет сопряжённую норму $\rho^*[u]$ в пространстве $D^*_{k,m}[\alpha,\beta]$. Таким образом, управление является

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00332), программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП 2.1.1.1714) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-5344.2006.1).

распределением порядка $k_u \leq k$. При этом траектории системы (1) являются распределениями из $D^*_{k-1,n}[\alpha, \beta]$.

Допустимыми будем считать управления $u(t)$ — распределения из $D^*_{k,m}[\alpha, \beta]$, для которых существует распределение $x(t) \in D^*_{k-1,n}[\alpha, \beta]$, удовлетворяющее уравнению

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}$$

и сосредоточенное на отрезке $[t_\alpha, t_\beta]$, где $\alpha < t_\alpha \leq t_\beta < \beta$. Здесь $f^{(\alpha)}$, $f^{(\beta)}$ — распределения из $D^*_{k,n}[\alpha, \beta]$, сосредоточенные в точках t_α и t_β соответственно. Эти распределения имеют смысл начального и конечного условий для траектории $x(t)$ и могут быть представлены в виде

$$f^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \delta^{(j)}(t - t_\alpha), \quad f^{(\beta)} = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \delta^{(j)}(t - t_\beta).$$

Напомним, что распределение $u \in D^*_{k,m}[\alpha, \beta]$ представимо в виде [1]

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{j=0}^{k} \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}^j \phi}{\mathrm{d}t^j} \, \mathrm{d}U_j(t),$$

где U_j — функции ограниченной вариации на $[\alpha, \beta]$, принимающие значения из $\mathbb{R}^m$ и постоянные при $\alpha \leq t \leq t_\alpha$, $t_\beta < t < \beta$.

Задача 1. Для заданного распределения $f^{(\alpha)}$ и отрезка времени $[t_\alpha, t_\beta]$ найти распределение $f^{(\beta)}$ и допустимое управление $u(t) \in D^*_{k,m}[\alpha, \beta]$, доставляющие минимум функционалу

$$J(u, f^{(\beta)}) = \rho^*[u] + \phi(f^{(\beta)}) \to \min.$$

Здесь $\phi(f)$ — выпуклая, ограниченная снизу терминальная функция, наличие которой позволит далее сформулировать принцип оптимальности для нахождения искомого решения.

Задача 1 при $\phi(f) = \mathscr{I}\big(f \mid \{f^{(\beta)}\}\big)$ [1] (т.е. с фиксированным правым концом) была решена в работе [3] в классе программных управлений. Однако ниже будем искать решение в классе стратегий с обратной связью. Прежде чем формулировать определение таких стратегий, сведём вначале изложенную задачу, следуя [3], к задаче управления в классе импульсов первого порядка.

Определим функции $L_j(t)$ соотношениями

$$L_0(t) = B(t), \quad L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - \frac{\mathrm{d}L_{j-1}}{\mathrm{d}t}, \quad j = \overline{1,k}$$

и составим из них матрицу $\mathscr{B}(t) = \begin{pmatrix} L_0(t) & L_1(t) & \cdots & L_k(t) \end{pmatrix}$. Для данного $h \in \mathbb{R}^m$ вектор $L_j(\tau)h$ имеет смысл скачка траектории системы (1) в момент τ при управлении, равном $(-1)^j h \delta^{(j)}(t - \tau)$.

Управления $U(t) = \begin{pmatrix} U_0^T(t) & U_1^T(t) & \cdots & U_k^T(t) \end{pmatrix}^T$ будем выбирать из класса $BV\big([t_\alpha, t_\beta]; \mathbb{R}^{m(k+1)}\big)$ функций ограниченной вариации на отрезке $[t_\alpha, t_\beta]$ со значениями в $\mathbb{R}^{m(k+1)}$ (каждая из функций $U_j(t)$ принимает значения в $\mathbb{R}^m$). Определим норму в этом пространстве как вариацию

$$\underset{[t_\alpha, t_\beta], G^*[\cdot]}{\mathrm{Var}} U(\cdot) = \sup \sum_i G^*[U(t_{i+1}) - U(t_i)], \quad G^*(U) = \gamma^*[\gamma_0^*[U_0], \ldots, \gamma_k^*[U_k]]$$

(звёздочкой обозначены соответствующие сопряжённые нормы). Соответствующее управление в задаче 1 равно

$$u(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{\mathrm{d}^{j+1} U_j}{\mathrm{d}t^{j+1}}, \quad \rho^*[u] = \underset{[t_\alpha, t_\beta], G^*[\cdot]}{\mathrm{Var}} U(\cdot).$$

[1] Через $\mathscr{I}(x \mid A)$ обозначается индикаторная функция множества A, равная нулю на этом множестве и бесконечности в остальных точках.

Наконец, определим начальную точку траектории $x_\alpha = x(t_\alpha) = \sum_{j=0}^{k} A^j(t_\alpha)\alpha_j$ и терминальный функционал $\Phi(x) = \min\left\{ \phi(f^{(\beta)}) \;\middle|\; \sum_{j=0}^{k} A^j(t_\beta)\beta_j = x \right\}$.

Задача 2. Найти управление $U(\cdot) \in BV\big([t_\alpha, t_\beta]; \mathbb{R}^{m(k+1)}\big)$, минимизирующее функционал (аналог функционала Майера–Больца)

$$J(U(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t_\alpha, t_\beta], G^*[\cdot]} U(\cdot) + \Phi(x(t_\beta + 0))$$

на траекториях системы

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \mathscr{B}(t)dU(t), \quad x(t_\alpha) = x(\alpha). \tag{2}$$

Замечание 1. Для решения задачи 2 в классе программных импульсных управлений могут быть использованы методы, изложенные в [4, 5, 6, 7, 8, 9]. В частности, известно, что множество оптимальных управлений непусто и среди них найдётся хотя бы одно вида[2]

$$U(t) = \sum_{j=1}^{K} h_j \mathbf{1}_{[t_j, \infty)}(t), \quad K \le n. \tag{3}$$

Траектории системы (2) — функции ограниченной вариации. Далее будем считать, что они непрерывны слева. Позицией системы (2) будем считать пару $\{t, x(t)\}$. Отметим, что в дальнейшем позиция «после скачка» $(t, x(t+0))$, соответствующая тому же самому моменту времени, нигде явно не используется.

Определение 1. Стратегией управления с обратной связью (или синтезом управлений) для системы (2) будем называть многозначное отображение $\mathscr{U}(t, x) : [t_\alpha, t_\beta] \to \mathbb{R}^{m(k+1)}$, полунепрерывное сверху по совокупности переменных, принимающее непустые выпуклые компактные значения.

Элементы множества $\mathscr{U}(t, x)$ имеют смысл коэффициентов h_j в (3): если $h \in \mathscr{U}(\tau, x(\tau))$, то управление может иметь слагаемое $h\mathbf{1}_{[\tau, \infty)}(t)$. Последнее формализуется следующим определением.

Определение 2. Программное управление вида (3) называется совместимым с синтезом управлений $\mathscr{U}(t, x)$, если выполняются условия

1. при $t \ne t_j$ множество $\mathscr{U}(t, x(t))$ содержит начало координат;
2. $h_j \in \mathscr{U}(t_j, x(t_j))$, $j = \overline{1, K}$.
3. $\mathscr{U}(t_\beta, x(t_\beta + 0)) = \{0\}$.

Здесь $x(t)$ — траектория, отвечающая управлению $U(t)$.

Иными словами, если имеется ненулевой вектор $u^* = (u_0^*, \ldots, u_k^*) \in \mathscr{U}(t^*, x^*)$, то совместимое управление, для которого траектория удовлетворяет условию $x(t^*) = x^*$, может иметь слагаемое вида $u^*\delta(t - t^*)$, что соответствует в задаче 1 слагаемому вида $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j u_j^* \delta^{(j)}(t - t^*)$.

Задача 3 (О синтезе управлений)**.** Найти синтез управлений $\mathscr{U}(t, x)$, для которого множество совместимых управлений вида (3) совпадает со множеством оптимальных управлений в задаче 2, имеющих вид (3).

[2] Через $\mathbf{1}_A(t)$ обозначается функция принадлежности множеству, равная единице на этом множестве и нулю в остальных точках.

2 Уравнение динамического программирования

Обозначим через $V(t_\alpha, x_\alpha)$ минимальное значение функционала в задаче 2 при фиксированной начальной позиции $x(t_\alpha) = x_\alpha$. Будем также использовать расширенное обозначение $V(t_\alpha, x_\alpha; t_\beta, \Phi(\cdot))$, подчёркивающего зависимость значения функции цены от конечного моменты t_β и терминальной функции $\Phi(\cdot)$.

Рассуждениями, аналогичными [10], устанавливаем, что функция цены может быть представлена в виде

$$V(t_\alpha, x_\alpha) = \min_{x_\beta \in \mathbb{R}^n} \left[\Phi(x_\beta) + \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle p, x_\beta - X(t_\beta, x_\alpha) x_\alpha \rangle}{\|p\|_{G,[t_\alpha,t_\beta]}} \right],$$

где $\|\cdot\|_{G,[t_\alpha,t_\beta]}$ — полунорма, определяемая следующим образом:

$$\|p\|_{G,[t_\alpha,t_\beta]} = \max_{t \in [t_\alpha,t_\beta]} G\big(\mathscr{B}^T(t) X^T(t_\beta, t) p\big),$$

а $X(t,\tau)$ — фундаментальная матрица однородной системы, то есть решение матричного уравнения $\partial X(t,\tau)/\partial t) = A(t) X(t,\tau)$, $X(\tau,\tau) = I$.

Далее, функция цены $V(t_\alpha, x_\alpha)$ является выпуклой по переменной x_α, и сопряжённая к ней функция равна

$$V^*(t_\alpha, p) = \Phi^*\big(X^T(t_\alpha, t_\beta) p\big) + \mathscr{I}\Big(X^T(t_\alpha, t_\beta) p \;\Big|\; \mathscr{B}_{\|\cdot\|_{G,[t_\alpha,t_\beta]}} \Big), \tag{4}$$

где $\mathscr{B}_{\|\cdot\|}$ — единичный шар в указанной полунорме.

Из представления (4) следует принцип оптимальности в виде полугруппового свойства

$$V(t_\alpha, x_\alpha; t_\beta, \Phi(\cdot)) = V(t_\alpha, x_\alpha; t_\epsilon, V(t_\epsilon, \cdot; t_\beta, \Phi(\cdot))), \quad t_\alpha \le t_\epsilon \le t_\beta.$$

Отметим, что $V(t_\beta, x; t_\beta, \Phi(\cdot)) \le \Phi(x)$ и в общем случае неравенство может быть строгим, так как

$$V(t_\beta, x; t_\beta, \Phi(\cdot)) = \sup_{G(\mathscr{B}^T(t_\beta)p) \le 1} [\langle x, p \rangle - \Phi^*(p)] \le \Phi(x) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} [\langle x, p \rangle - \Phi^*(p)]. \tag{5}$$

Функция цены $V(t,x)$ удовлетворяет квазивариационному неравенству [11, 10, 12] (в точках негладкости функции цены скалярные произведения понимаются как соответствующие производные по направлению)

$$\min\{H_1(t, x, V_t, V_x), H_2(t, x, V_t, V_x)\} = 0, \tag{6}$$
$$V(t_\beta, x) = V(t_\beta, x; t_\beta, \Phi(\cdot)).$$
$$H_1(t, x, \xi_t, \xi_x) = \xi_t + \langle \xi_x, A(t) x \rangle,$$
$$\begin{aligned} H_2(t, x, \xi_t, \xi_x) = \min\Big\{ \langle \xi_x, \mathscr{B}(t) u \rangle + 1 \;\Big|\; u \in \mathbb{R}^{m(k+1)},\ G^*(u) \le 1 \Big\} = 1 - G(\mathscr{B}^T(t) V_x) = \\ = 1 - \gamma\big[\gamma_0\big[L_0^T(t) V_x\big], \ldots, \gamma_k\big[L_k^T(t) V_x\big]\big]. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь гамильтониан H_1 отвечает за движение при нулевом управлении, а H_2 — за скачки, порождённые импульсами управления. Таким образом, уравнение (6) можно интерпретировать следующим образом: либо $H_1 = 0$ и в текущей позиции можно выбрать нулевое управление, либо $H_2 = 0$, и управление будет иметь скачок.

Определим синтез управлений $\mathscr{U}^*(t,x)$:

1. если $H_2(t, x, V_t, V_x) > 0$, то $\mathscr{U}^*(t,x) = \{0\}$.

2. если $H_2(t, x, V_t, V_x) = 0$, то обозначим через $\{u^*\}$ множество минимизаторов в (7) и положим

$$\mathscr{U}^*(t,x) = \left\{ \sigma u \;\middle|\; \begin{array}{c} u \in \{u^*\} \\ H_2(t, x(s,u)) = 0, \quad 0 \le s \le \sigma \\ H_1(t, x(\sigma,u)) = 0 \end{array} \right\}$$

(мы обозначили $x(\sigma,u) = x + \sigma \mathscr{B}(t) u$, $H_i(t,x) = H_i(t, x, V_t(t,x), V_x(t,x))$).

Заметим, что $H_1(t,x)=0$ тогда и только тогда, когда управление $\mathscr{U}^*(t,x)$ содержит начало координат.

Теорема 1. *Синтез управлений* $\mathscr{U}^*(t,x)$ *является решением задачи 3.*

Доказательство. Пусть $dU(t)$ — оптимальное управление в задаче 2 вида (3) (а $x(t)$ — соответствующая ему траектория). Покажем, что оно совместимо с синтезом $\mathscr{U}^*(t,x)$.

1. При $t \neq t_j$ имеем $V(t+\sigma, x(t+\sigma)) = V(t, x(t))$ при достаточно малых σ, для которых на отрезке $[t, t+\sigma]$ нет точек t_j. Следовательно, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{dU=0} = H_1(t,x,V_t,V_x) = 0$ и по сделанному выше замечанию $0 \in \mathscr{U}^*(t,x)$.

2. При $t = t_j$ имеем $V(t, x(t) + \mathscr{B}(t)h_j) + G^*(h_j) = V(t, x(t))$. Из условия $H_2(t,x,V_t,V_x) \geq 0$ получаем, что в общем случае $V(t, x(t) + \mathscr{B}(t)h_j) + G^*(h_j) \geq V(t, x(t))$, а равенство достигается только в том случае, если во всех точках отрезка, соединяющего $x(t)$ и $x(t) + \mathscr{B}(t)h_j$, выполнено $H_2 = 0$. Рассуждениями, аналогичными первому пункту, получаем, что $H_1(t, x(t) + \mathscr{B}(t)h_j) = 0$. Следовательно, $h_j \in \mathscr{U}^*(t, x(t))$.

Пусть $dU(t)$ — программное управление вида (3), совместимое с синтезом $\mathscr{U}^*(t,x)$. Покажем, что оно является оптимальным. Для этого покажем, что

$$\sum_{j=1}^{K} G^*(h_j) + \Phi(x(t_\beta + 0)) = V(t_\alpha, x(t_\alpha)).$$

1. При $t \neq t_j$ имеем $0 \in \mathscr{U}^*(t, x(t))$ и, следовательно, $H_1 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{dU=0} = 0$. Следовательно, на промежутках между точками t_j значение функции цены не изменяется.

2. При $t = t_j$ по имеем $V(t, x(t) + \mathscr{B}(t)h_j) + G^*(h_j) = V(t, x(t))$, так как по построению синтеза $H_2 = 0$ во всех точках отрезка, соединяющего $x(t)$ и $x(t) + \mathscr{B}(t)h_j$. $\square$

3 Схема двойного ограничения

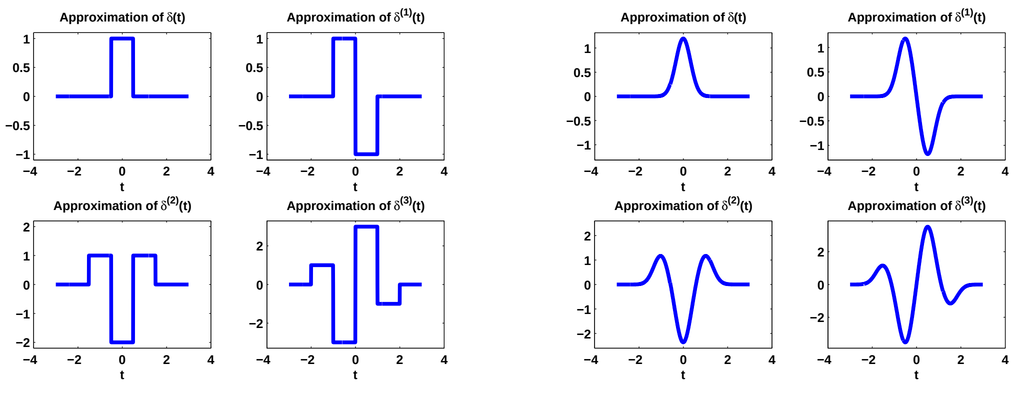

Рис. 1: Аппроксимации дельта-функций и их производных

Задачу 2 аппроксимируем другой задачей с ограниченными управлениями. При этом дельта-функции будут заменяться, например, «столбиками» соответствующей длительности и высоты (рис. 1). При этом можно фиксировать высоту столбиков, т.е. равномерно ограничить управления, либо их длительность — тогда управления будут ограниченными функциями (но для каждого управления ограничение будет своим). Последнее требует расширения состояния системы и добавления в неё дополнительных уравнений интеграторов. Далее будем использовать первый способ аппроксимации, аналогично тому, как это делалось в [10]:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \mathscr{B}(t)u(t), \quad x(t_\alpha) = x(\alpha), \quad G^*(u(t)) \le \mu,$$
$$J(u(\cdot)) = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} G^*(u(t))\,\mathrm{d}t + \Phi(x(t_\beta)) \tag{8}$$

Соответствующая функция цены $V_\mu(t,x)$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial t} + \min_{u:G^*(u)\le\mu} \left\{ \left\langle \frac{\partial V_\mu}{\partial x}, A(t)x(t) + \mathscr{B}(t)u \right\rangle + G^*(u) \right\} = 0$$

с начальным условием $V_\mu(t_\beta, x) = \Phi(x)$, а сопряжённая к ней функция равна

$$V_\mu^*(t_\alpha, p) = \Phi^*(X^T(t_\alpha, t_\beta)p) + \mu \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(G\left(\mathscr{B}^T(t)X^T(t_\beta, t)p\right) - 1\right)_+ \mathrm{d}t,$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$. При этом $V_\mu(t,x) \underset{\mu\to\infty}{\to} V(t,x)$ поточечно [10].

Пусть в задаче 1 управление в момент времени τ имело вид

$$u(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j u_j \delta^{(j)}(t-\tau).$$

Этому управлению соответствует импульс в задаче 2

$$dU(t) = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix}^T \delta(t-\tau),$$

тогда этот импульс может быть заменён на ограниченное управление

$$u(t) = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 & \bar{u}_1 & \cdots & \bar{u}_k \end{pmatrix}^T \mathbf{1}_{[\tau-h,\tau]}(t),$$

где вектор $\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 & \bar{u}_1 & \cdots & \bar{u}_k \end{pmatrix}^T$, $G^*(\bar{u}) = \mu$, и число $h > 0$ выбираются исходя из соотношения

$$x(\tau+0) - x(\tau) = \sum_{j=0}^{k} L_j(\tau)u_j = \sum_{j=0}^{k} \left[\int_{\tau-h}^{\tau} X(\tau,\theta)L_j(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right] =$$
$$= \left[\int_{\tau-h}^{\tau} X(\tau,\theta)B(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right] \bar{u}_0 - \sum_{j=1}^{k} (L_{j-1}(\tau) - X(\tau,\tau-h)L_{j-1}(\tau-h))\bar{u}_j.$$

4 «Быстрые» управления

За счёт использования обобщённых воздействий система (1) может быть управляемой за нулевое время, даже если размерность управления m строго меньше размерности пространства n. А именно, пусть $\operatorname{im}\mathscr{B}(t_\beta) = \mathbb{R}^n$, тогда $\ker \mathscr{B}^T(t_\beta) = \{0\}$ и в формуле (5) для $V(t_\beta, x)$ верхняя грань берётся по ограниченному множеству. Следовательно, значение $V(t_\beta, x)$ конечно для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь вопрос о построении «быстрых» управлений — ограниченных аппроксимаций управления, решающего задачу за нулевое время. Для достаточно малых $h > 0$ (а именно, для таких, что отрезок $[t_\beta, t_\beta + kh]$ принадлежит интервалу (α, β)) определим скалярные функции

$$\Delta_h^{(0)}(t) = \frac{1}{h}\mathbf{1}_{[0,h]}(t), \quad \Delta_h^{(j)}(t) = \frac{1}{h}\Big(\Delta_h^{(j-1)}(t) - \Delta_h^{(j-1)}(t-h)\Big), \quad j = 1, \ldots, k,$$

аппроксимирующие обобщённые функции $\delta^{(j)}(t)$. Будем рассматривать управления вида

$$u(t)=\sum_{j=0}^{k}u_j\Delta_h^{(j)}(t-t_\beta),\quad u_j\in\mathbb{R}^m.$$

Введём обозначения $U=\begin{pmatrix}u_0^T & u_1^T & \cdots u_k^T\end{pmatrix}$,

$$M_h^{(j)}(t)=\int_t^{t+kh}X(t+kh,\tau)B(\tau)\Delta_h^{(j)}(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau,\quad \mathscr{M}_h(t)=\Big(M_h^{(0)}(t)\quad M_h^{(1)}(t)\quad\cdots\quad M_h^{(h)}(t)\Big),$$

тогда $x(t_\beta+kh)=X(t_\beta+kh,t_\beta)x(t_\beta)+\mathscr{M}_hU$ и естественным аналогом задачи 1 при $t_\alpha=t_\beta$ будет следующая конечномерная задача оптимизации:

$$G^*(U)+\Phi(X(t+kh,t_\beta)x_0+\mathscr{M}_h(t_\beta)U)\to\inf_{U\in\mathbb{R}^{m(k+1)}}. \tag{9}$$

Исследуем частный случай задачи (9), когда требуется привести систему (1) в заданную точку x_1 из состояния (t_β,x_0) :

$$\begin{cases}G^*(U)\to\inf,\\ \mathscr{M}_h(t_\beta)U=x_1-X(t+kh,t_\beta)x_0=c.\end{cases} \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{rank}\mathscr{B}(t_\beta)=n$ *, тогда задача* (10) *имеет решение.*

Доказательство. При $h\to 0+$ функции $\Delta_h^{(j)}(t)$ $*$-слабо сходятся к $\delta^{(j)}(t)$ в пространстве обобщённых функций $D_{k,1}^*[\alpha,\beta]$. Следовательно,

$$M_h^{(j)}(t)\to(-1)^j\left.\frac{\partial X(t+kh,\tau)B(\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=t}=L_j(t),\quad \mathscr{M}_h(t)\to\mathscr{B}(t).$$

Поскольку по условию $\operatorname{rank}\mathscr{B}(t_\beta)=n$, то при достаточно малых значениях $h>0$ будет выполняться $\operatorname{rank}\mathscr{M}_h(t_\beta)=n$ и будут существовать допустимые управления. Пусть $\bar U$ — произвольное допустимое управление. Множество $\big\{U\;\big|\;G^*(U)\le G^*(\bar U),\ \mathscr{M}_hU=c\big\}$ компактно, а конечномерная норма $G^*(U)$ непрерывна. Следовательно, задача Задача (10) имеет решение по теореме Вейерштрасса. □

Вычислим оптимальное значение в задаче (10):

$$V_h=\min_{\mathscr{M}_h(t_\beta)U=c}\max_{G(q)\le 1}\langle q,U\rangle=\max_{G(q)\le 1}\min_{\mathscr{M}_h(t_\beta)U=c}\langle q,U\rangle=$$
$$=\max_{G(q)\le 1}\big\{\big\langle(\mathscr{M}_h^T(t_\beta))^{\oplus}q,c\big\rangle+\mathscr{I}(\,q\mid\ker\mathscr{M}_h(t_\beta))\big\}.$$

Здесь $\oplus$ означает псевдообратную матрицу. Обозначив $p=(\mathscr{M}_h^T(t_\beta))^{\oplus}q$, имеем

$$V_h=\max_{G(\mathscr{M}_h^T(t_\beta)p)\le 1}\langle p,c\rangle.$$

При $h\to 0$ имеем $c\to x_1-x_0$, $\mathscr{M}_h^T(t_\beta)\to\mathscr{B}^T(t_\beta)$. Следовательно, $V_h\to V(t_\beta,x_0;t_\beta,\Phi(\cdot))$ при $\Phi(x)=\mathscr{I}(\,x\mid\{x_1\})$ (см. (5)).

5 Принцип сравнения. Эллипсоидальная аппроксимация

Получим верхнюю оценку функции цены в виде квадратичной формы и соответствующую ей внутреннюю оценку множества достижимости (по части координат) в виде эллипсоида, воспользовавшись принципом сравнения для уравнений Гамильтона–Якоби [13]. Отметим, что эллипсоидальным аппроксимациями для линейных систем с ограниченными управлениями посвящены работы [14, 15], аппроксимациям параллелотопами — [16]. В работе [17] построены оценки функции цены и множества достижимости, основанные на полиэдральной аппроксимации.

Гамильтониан задачи (8) равен

$$\mathscr{H}_\mu(t,x,p) = \min\{\, \langle p, A(t)x + \mathscr{B}(t)u\rangle + G^*(u) \mid G^*(u) \le \mu\}$$

Обозначим через $Q(G^*)$ множество коэффициентов квадратичных функций, оценивающих норму G^* сверху:

$$Q(G^*) = \Big\{\, (S,k) \in \mathbb{R}^{m(k+1)\times m(k+1)} \times \mathbb{R} \;\Big|\; \langle u, Su\rangle + k \ge G^*(u), \forall u \in \mathbb{R}^{m(k+1)} \Big\}.$$

Из определения следует, что любая пара $(S,k) \in Q(G)$ удовлетворяет условиям $S = S^T > 0$, $k > 0$.

Для гамильтониана (5) справедлива оценка

$$\mathscr{H}_\mu(t,x,p) \le H^+_\mu(t,x,p) = \langle p, A(t)x\rangle + k(t) + \min\big\{\, \big\langle \mathscr{B}^T(t)p, u\big\rangle + \langle u, S(t)u\rangle \;\big|\; G^*(u) \le \mu\big\},$$

где при всех $t \in [t_\alpha, t_\beta]$ выбрано $(S(t), k(t)) \in Q(G)$.

Рассмотрим функции цены $V^+_\mu(t,x)$, соответствующие гамильтонианам $H^+_\mu(t,x,p)$. В силу [13, теор. 3.1] выполнено неравенство

$$V(t,x) \le V_\mu(t,x) \le V^+_\mu(t,x).$$

При фиксированных (t,x) значение $V^+_\mu(t,x)$ убывает с ростом μ, поэтому существует конечный предел

$$V^+(t,x) = \lim_{\mu\to\infty} V^+_\mu(t,x) \ge V(t,x).$$

Найдём гамильтониан, определяющий функцию $V^+(t,x)$. Устремляя μ к бесконечности, получаем

$$\begin{aligned} H^+_\mu(t,x,p) \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} H^+(t,x,p) &= \langle p, A(t)x\rangle + k(t) + \min_{u\in\mathbb{R}^{m(k+1)}} \big\{ \big\langle \mathscr{B}^T(t)p, u\big\rangle + \langle u, S(t)u\rangle \big\} = \\ &= \langle p, A(t)x\rangle + k(t) - \frac{1}{4}\big\langle \mathscr{B}^T(t)p, S^{-1}(t)\mathscr{B}^T(t)p\big\rangle. \end{aligned}$$

Гамильтониан $H^+(t,x,p)$ соответствует задаче управления системой (2) с функционалом

$$J^+(u) = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} [\langle u(t), S(t)u(t)\rangle + k(t)]\,\mathrm{d}t + \Phi(x(t_\beta)) \to \inf$$

(без геометрического ограничения на управления $u(t) \in L_2\big([t_\alpha, t_\beta]; \mathbb{R}^{m(k+1)}\big)$). Рассмотрим соответствующую функцию цены $V^+(t,x)$. Поскольку $J^+(u) \le J(u)$, то $V^+(t,x) \ge V(t,x)$.

Выберем терминальный функционал в виде квадратичной формы:

$$\Phi(x) = \big\langle x - x_1, M_1^{-1}(x - x_1)\big\rangle + k_1, \quad M_1 = M_1 > 0,$$

и будем искать функцию цены $V^+(t,x)$ в виде

$$V^+(t,x) = \big\langle x - x^*(t), Z^{-1}(t)(x - x^*(t))\big\rangle + k^*(t), \quad Z(t) = Z^T(t) > 0. \tag{11}$$

Подставляя (11) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$V^+_t + \big\langle V^+_x, A(t)x\big\rangle + k(t) - \frac{1}{4}\big\langle \mathscr{B}^T(t)V^+_x, S^{-1}(t)\mathscr{B}^T(t)V^+_x\big\rangle = 0$$

и приравнивая коэффициенты при различных степенях x в левой части к нулю, получаем уравнения для параметров верхней оценки:

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = A(t)Z(t) + Z(t)A^T(t) - \mathscr{B}(t)S^{-1}(t)\mathscr{B}^T(t), \\ \dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t), \\ \dot{k}^*(t) = -k(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} Z(t_\beta) = M_1, \\ x^*(t_\beta) = x_1, \\ k^*(t_\beta) = k_1. \end{cases}$$

Решением этой системы являются функции

$$Z(t) = X(t,t_\beta)M_1X^T(t,t_\beta) + \int_t^{t_\beta} X(t,\tau)\mathscr{B}(\tau)S^{-1}(\tau)\mathscr{B}^T(\tau)X^T(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{12}$$

$$x^*(t) = X(t,t_\beta)x_1, \quad k^*(t) = k_1 + \int_t^{t_\beta} k(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Полученные верхние оценки для функции цены позволяют получить внутренние эллипсоидальные оценки множества разрешимости. Выберем $M_1 = 0$, $k_1 = 0$, что соответствует терминальной функции $\Phi(x) = \mathscr{I}(\,x \mid \{x_1\})$. Тогда множество уровня функции цены $V^+(t,x)$ является эллипсоидом[3]

$$W_\nu^-[t] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; V^+(t,x) \le \nu \right\} = \mathscr{E}(x^*(t), (\nu - k^*(t))Z(t)).$$

Множество $W_\nu^-[t]$ является внутренней эллипсоидальной оценкой множества разрешимости

$$W_\nu[t] = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid V(t,x) \le \nu \},$$

то есть множества точек x, из которых можно достичь конечного состояния x_1 при условии, что вариация управления не превысит число ν.

Оценкой множества разрешимости по выходной переменной $z = Hx$

$$Z_\nu[t] = \{\, Hx \mid V(t,x) \le \nu \}$$

является эллипсоид $\mathscr{E}\big(x^*(t), (\nu - k^*(t))HZ(t)H^T\big)$.

Замечание 2. Формулы (12) верны при любом выборе $(M(t), k(t)) \in Q(G)$, однако для получения более точных оценок следует ограничиться подмножеством $Q_0(G) \subset Q(G)$ коэффициентов недоминируемых оценок, заданным следующим требованием:

$$\begin{cases} (M,k) \in Q_0(G), \\ (M',k') \in Q(G), \\ \langle u, M'u\rangle + k' \le \langle u, Mu\rangle + k,\ \forall u \in \mathbb{R}^{m(k+1)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M' = M, \\ k' = k. \end{cases}$$

Случай евклидовых норм. Пусть нормы γ, $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$ выбраны следующим образом:

$$\gamma(g_0,\ldots,g_k) = \left(\sum_{j=0}^k p_j g_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_j(\phi) = \langle \phi, P_i\phi\rangle^{\frac{1}{2}}, \quad P_i = P_i^T > 0.$$

Тогда нормы $G(p)$ и $G^*(u)$ могут быть найдены как

$$G(p) = \langle p, \mathscr{P}p\rangle^{\frac{1}{2}}, \quad G^*(u) = \left\langle u, \mathscr{P}^{-1}u\right\rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \mathscr{P} = \mathrm{diag}(p_0P_0, p_1P_1, \ldots, p_kP_k). \tag{13}$$

Множество недоминируемых оценок для нормы (13) есть

$$Q_0(G) = \left\{ \left(\eta^{-1}\mathscr{P}^{-1}, \frac{\eta}{4}\right) \;\middle|\; \eta > 0 \right\},$$

[3]Согласно [14], эллипсоидом $\mathscr{E}(q,Q)$ с параметрами $q \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \ge 0$, называется выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с опорной функцией $\rho(p \mid \mathscr{E}(q,Q)) = \langle p, q\rangle + \langle p, Qx\rangle^{\frac{1}{2}}$. Если матрица Q невырождена, то $\mathscr{E}(q,Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \left\langle x - q, Q^{-1}(x-q)\right\rangle \le 1 \right\}$.

откуда получаем формулу для матрицы эллипсоидальной оценки

$$Z(t) = X(t,t_\beta)M_1X^T(t,t_\beta) + \int_t^{t_\beta} \eta(t)X(t,\tau)\mathscr{B}(\tau)\mathscr{P}\mathscr{B}^T(\tau)X^T(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{14}$$

$$k^*(t) = k_1 + \tfrac{1}{4}\int_t^{t_\beta} \eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

(при этом $x^*(t)$ вычисляется так же, как в (12)).

Соотношение (14) связана с формулой внутренней эллипсоидальной оценки выпуклой оболочки объединения эллипсоидов [14]. А именно, при $M_1 = 0$, $k_1 = 0$, $x_1 = 0$ множество

$$Y_\nu^-[t] = \left\{ x \;\middle|\; \left\langle x, Z^{-1}(t)x \right\rangle \leq \nu^2 \left(\int_t^{t_\beta} \eta(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1} \right\}$$

является внутренней эллипсоидальной оценкой для множества

$$Y_\nu[t] = \operatorname{conv} \bigcup_{\tau\in[t,t_\beta]} [\nu X(t,\tau)B(\tau)\mathscr{E}(0,\mathscr{P})].$$

Каждое из множеств $\nu X(t,\tau)B(\tau)\mathscr{E}(0,\mathscr{P})$ представляет собой множество разрешимости при условии, что управление имеет один импульс в момент времени τ, норма которого не превосходит ν. Следовательно [5], множество $Y_\nu[t]$ совпадает со множеством разрешимости $W_\nu[t]$.

Множества $W_\nu^-[t]$ и $Y_\nu^-[t]$ совпадают, если выполняется

$$\nu^2\left(\int_t^{t_\beta} \eta(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1} = \frac{1}{4}\nu^2\cdot(k^*(t))^{-1} = \nu - k^*(t) \quad\Rightarrow\quad k^*(t) = \frac{\nu}{2}.$$

Замечание 3. Тугой внутренней оценки, то есть равенства $\rho(p \mid W_\nu[t]) = \rho(p \mid W_\nu^-[t])$, можно добиться, выбирая в качестве функцию $\eta(t)$ в виде $\eta(t) = 2\nu\delta(t-t^*)$, где момент t^* определяется равенством

$$\left\langle \mathscr{B}^T(t^*)X^T(t,t^*)p, \mathscr{P}\mathscr{B}^T(t^*)X^T(t,t^*)p \right\rangle = \max_{\tau\in[t,t_\beta]} \left\langle \mathscr{B}^T(\tau)X^T(t,\tau)p, \mathscr{P}\mathscr{B}^T(\tau)X^T(t,\tau)p \right\rangle.$$

Пример 1. На рис. 2 приведено точное множество разрешимости (по переменным x_9 и x_{10}) и его внутренние эллипсоидальные аппроксимации для многозвенной колебательной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{N+i}, \quad i = \overline{1,N}; \\ \dot{x}_{N+1} = x_2 - 2x_1; \\ \dot{x}_{N+i} = x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i, \quad i = \overline{2,N-1}; \\ \dot{x}_{2N} = x_{N-1} - x_N + u \end{cases}$$

с нормой $G^*(u) = \|u\|$. Здесь порядок управления $k = 2$, число звеньев $N = 5$ (размерность системы $n = 10$), $\nu = 1$, $t = 0$, $t_\beta = \pi$. Функции η для аппроксимаций, показанных тонкими сплошными линиями, выбирались как аппроксимации дельта-функций: $\eta(t) = \frac{2\nu K}{\pi}\mathbf{1}_{\left[\frac{(j-1)\pi}{K},\frac{j\pi}{K}\right]}(t)$, $j = \overline{1,K}$, $K = 10$. Жирная прерывистая линия соответствует функции $\eta(t) = 2\nu\pi$.

Список литературы

[1] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

[2] *Schwartz L.* Théorie des distributions. Paris: Hermann, 1950.

[3] *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360–1370.

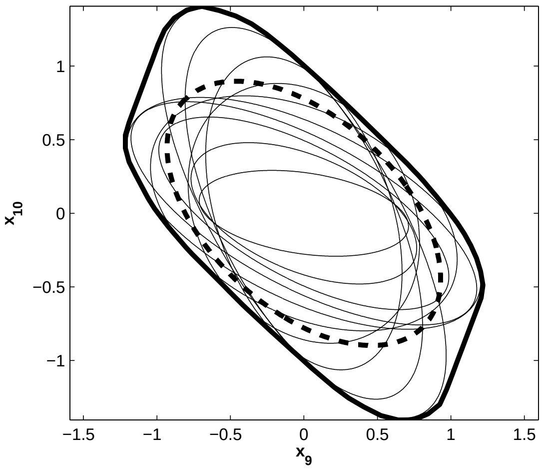

Рис. 2: Точное множество разрешимости (жирная сплошная линия) и его внутренние эллипсоидальные аппроксимации в примере 1

[4] *Красовский Н. Н.* Об одной задаче оптимального регулирования // ПММ. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.

[5] *Neustadt L. W.* Optimization, a moment problem and nonlinear programming // SIAM Journal on Control. 1964. V. 2. N. 1. P. 33–53.

[6] *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[7] *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[8] *Дыхта В. А., Самсонюк О. Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2003.

[9] *Miller B. M., Ya. Rubinovich E.* Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. N.Y.: Kluwer, 2003.

[10] *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В.* Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 11. С. 1491–1500.

[11] *Bensoussan A., Lions J.-L.* Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles. Paris: Dunod, 1982.

[12] *Daryin A. N., Kurzhanski A. B., Seleznev A. V.* A dynamic programming approach to the impulse control synthesis problem // Proc. Joint 44th IEEE CDC-ECC 2005. IEEE, Seville, 2005.

[13] *Куржанский А. Б.* Принцип сравнения для уравнений Гамильтона–Якоби в теории управления // Тр. инст. мат. и мех. УрО РАН. 2006. Т. 12. С. 173–183.

[14] *Kurzhanski A. B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.

[15] *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Internal approximation // Systems and Control Letters. 2000. V. 41. P. 201–211.

[16] *Kostousova E. K.* Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimization methods and software. 2001. V. 14. P. 267–310.

[17] *Дарьин А. Н., Малакаева А. Ю.* Численные методы синтеза импульсных управлений для линейных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. подготовлено к печати.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
??? июня 2007 г.

УДК 517.977

Д а р ь и н А. Н., К у р ж а н с к и й А. Б. **Синтез управлений в классе обобщённых функций высших порядков** // Дифференц. уравнения. 2007. Т. ???, № ???. С. 1 — 11.

Рассматриваются задачи импульсного управления, допускающие в качестве управлений конечное число высших производных дельта-функций (обобщённые импульсы или импульсы высших порядков). Управление ищется в виде позиционных стратегий, что приводит к применению модифицированного варианта теории динамического программирования, где место уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана занимают вариационные неравенства аналогичной структуры. Предлагаются физически реализуемые аппроксимации управлений, сходящиеся к точным решениям. В классе обобщённых функций высших порядков возможно перевести линейную систему, обладающую свойством управляемости, из одного заданного состояния в другое за нулевое время; аппроксимация таких управлений приводит к понятию физически реализуемых «быстрых» управлений. Для численного решения задачи о построении областей достижимости линейных систем, содержащих импульсы высших порядков, найдены внутренние эллипсоидальные оценки таких множеств с применением принципа сравнения для уравнений и неравенств типа Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Библиогр. 17 назв.