ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2001, том 37, № 11, с. 1476–1484

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977

НЕЛИНЕЙНЫЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ ПРИ ДВОЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

© 2001 г. А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

В данной статье рассмотрена задача о нелинейном синтезе управлений в системе с линейной структурой при одновременном воздействии двух видов ограничений на управление – интегральных и геометрических. Решение задачи проведено на основе метода динамического программирования. Указана структура разрешающих стратегий. Предложенный подход допускает распространение на системы с неопределенностью.

1. СИСТЕМА

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t), \quad \dot{k}(t) = -\|u(t)\|^2, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление, $k(t) \in \mathbb{R}^1$ – текущий запас энергии управления.

Функция $u(t)$ при почти всех $t \in T$ стеснена геометрическим ограничением $\|u(t)\| \le \mu$. Кроме того, должно выполняться фазовое ограничение

$$k(t) \ge 0 \quad \forall t \in T, \tag{1.2}$$

эквивалентное интегральному ограничению на управление*)

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 \, dt \le k(t_0) \triangleq \nu^2. \tag{1.3}$$

Далее мы будем предполагать, что матричная функция $B(\cdot)$ является непрерывной, а система

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t) \tag{1.4}$$

является вполне управляемой [2] на отрезках $[t_0, t]$ и $[t, t_1]$ при любых t из интервала (t_0, t_1), т.е. матрицы $W_0(t) = \int_{t_0}^{t} B(s)B'(s)\, ds$ и $W_1(t) = \int_{t}^{t_1} B(s)B'(s)\, ds$ являются невырожденными.

Рассмотрение уравнения (1.4) по сравнению с $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ не умаляет общности задачи, так как последнее уравнение приводится к первому при помощи известного линейного преобразования.

2. ОБЛАСТЬ ДОСТИЖИМОСТИ

Целью этого пункта является нахождение области достижимости системы из начала координат, а именно всех точек x, достижимых в момент t_1 за счет выбора управлений при указанных выше ограничениях. Обозначим указанную область достижимости как

$$\mathcal{X}[t_1] = \mathcal{X}(t_1; t_0, k_0, \{0\}) = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\, dt \mid \|u(t)\| \le \mu, \ \int\limits_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 dt \le k(t_0) \right\}. \tag{2.1}$$

*) Двойным ограничениям иного вида посвящена работа [1].

Лемма 2.1[*]. *1) Область достижимости $\mathcal{X}[t_1]$ содержится в пересечении множеств $\mathcal{X}_G[t_1]$ и $\mathcal{X}_I[t_1]$, а именно*

$$\mathcal{X}[t_1] \subseteq \mathcal{X}_G[t_1] \cap \mathcal{X}_I[t_1], \tag{2.2}$$

где $\mathcal{X}_G[t_1]$ – область достижимости только при геометрическом ограничении:

$$\mathcal{X}_G[t_1] = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt \mid \|u(t)\| \leq \mu \right\} = \int_{t_0}^{t_1} B(t)\mathcal{B}_\mu\,dt,$$

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_G[t_1]) = \mu \int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)\ell\|\,dt, \tag{2.3}$$

$\mathcal{X}_I[t_1]$ – область достижимости только при интегральном ограничении:

$$\mathcal{X}_I[t_1] = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt \,\middle|\, \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2\,dt \leq k(t_0) \right\},$$

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_I[t_1]) = \left(k(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)\ell\|^2\,dt \right)^{1/2} = \nu\langle \ell, W_0(t_1)\ell\rangle^{1/2}. \tag{2.4}$$

2) Для того чтобы при геометрическом ограничении для заданного $\ell \in \mathbb{R}^n$ выполнялось равенство $\langle \ell, x^*(t_1)\rangle = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_G[t_1])$, необходимо и достаточно, чтобы в каждый момент времени выполнялся поточечный принцип максимума

$$\langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \max_{\|u\|\leq\mu} \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \mu\|B'(t)\ell\|. \tag{2.5}$$

3) Для того чтобы при интегральном ограничении для заданного $\ell \in \mathbb{R}^n$ выполнялось равенство $\langle \ell, x^*(t_1)\rangle = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_I[t_1])$, необходимо и достаточно, чтобы в ограничении (1.3) достигалось равенство и существовало число $\lambda > 0$, при котором в каждый момент выполняется следующее условие максимума для интегрального ограничения:

$$-\lambda\|u^*(t)\|^2 + \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \max_{u\in\mathbb{R}^p} \{-\lambda\|u\|^2 + \langle \ell, B(t)u\rangle\}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Из (2.1) следует, что множество $\mathcal{X}[t_1]$ содержится в каждом из множеств $\mathcal{X}_G[t_1]$ и $\mathcal{X}_I[t_1]$, из чего сразу вытекает вложение (2.2).

Докажем формулы (2.3) и (2.5). По неравенству Коши–Буняковского (для пространства $\mathbb{R}^p$)

$$\left\langle \ell, \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\,dt \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle B'(t)\ell, u(t)\rangle\,dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \mu\|B'(t)\ell\|\,dt,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда выполняется принцип максимума (2.5).

Докажем формулы (2.4) и (2.6). По неравенству Коши–Буняковского (для пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^p)$)

$$\left\langle \ell, \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\,dt \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle B'(t)\ell, u(t)\rangle\,dt \underset{(A)}{\leq}$$

[*] Отмеченные факты, рассмотренные подробно в монографии [3], здесь приведены в несколько иной форме, полезной для дальнейших выкладок.

$$\underset{(A)}{\leq}\left(\int\limits_{t_0}^{t_1}\|B'(t)\ell\|^2\,dt\int\limits_{t_0}^{t_1}\|u(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}\underset{(B)}{\leq}\left(k(t_0)\int\limits_{t_0}^{t_1}\|B'(t)\ell\|^2\,dt\right)^{1/2},$$

причем равенство в (A) достигается, когда функции $u(\cdot)$ и $B'(\cdot)\ell$ сонаправлены, т.е. $2\lambda u^*(t) = B'(t)\ell$, а константа $\lambda > 0$ здесь выбирается так, чтобы достигалось равенство в (B). Непосредственно проверяется, что такое управление удовлетворяет условию (2.6). Лемма доказана.

Следствие 2.1. *Оптимальные управления при геометрическом и интегральном ограничениях имеют следующий вид соответственно:* $u_G^*(t) = \mu B'(t)\ell/\|B'(t)\ell\|$, $u_I^*(t) = (2\lambda)^{-1}B'(t)\ell = k(t_0)B'(t)\ell/(\rho(\ell \mid \mathcal{X}_I[t_1]))$.

Следствие 2.2. *Множество достижимости при интегральном ограничении является невырожденным эллипсоидом с центром в начале координат:* $\mathcal{X}_I[t_1] = \mathcal{E}(0, W_0(t_1))$.

Лемма 2.2. *Для того чтобы в исходной задаче с двумя ограничениями для заданного* $\ell \in \mathbb{R}^n$ *в конечный момент достигалось равенство*

$$\langle \ell, x^*(t_1)\rangle = \rho(\ell \mid \mathcal{X}[t_1]), \tag{2.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda \geq 0$ *такое, что в каждый момент времени выполняется следующий принцип максимума:*

$$-\lambda\|u^*(t)\|^2 + \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \max_{\|u\|\leq\mu}\{-\lambda\|u\|^2 + \langle \ell, B(t)u\rangle\} \tag{2.8}$$

и условие дополняющей нежесткости

$$\lambda\left(\nu^2 - \int\limits_{t_0}^{t_1}\|u^*(t)\|^2\,dt\right) = 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Управление, обеспечивающее равенство (2.7), переводит систему из начала координат в точку $x^*(t_1)$ с наименьшими затратами энергии. Применяя метод моментов [3] или принцип максимума Понтрягина [4] к задаче оптимального управления

$$J(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\|u(t)\|^2\,dt \to \inf,$$

$$x(t_0) = 0, \quad x(t_1) = x^*(t_1), \quad \dot{x}(t) = B(t)u(t), \quad \|u(t)\| \leq \mu,$$

получаем соотношение (2.8). Лемма доказана.

Следствие 2.3. *Для управления* $u^*(t)$ *в каждый момент времени выполняется либо принцип максимума в форме (2.5), либо условие максимума в форме (2.6).*

Доказательство. Для решения экстремальной задачи $j(u) = -\lambda\|u\|^2 + \langle \ell, B(t)u\rangle \to \max\limits_{\|u\|\leq\mu}$ составим функцию Лагранжа $\mathcal{L}(u,\Lambda) = \langle \ell, B(t)u\rangle - \lambda\|u\|^2 + \Lambda(\mu^2 - \|u\|^2)$. По теореме Куна–Таккера [5] найдется неотрицательное число Λ, для которого экстремум функции Лагранжа совпадает с условным экстремумом функции $j(u)$: $\max\limits_{\|u\|\leq\mu} j(u) = \max\limits_{u\in\mathbb{R}^p}\mathcal{L}(u,\Lambda)$ и, кроме того, выполнено условие дополняющей нежесткости

$$\Lambda(\mu^2 - \|u\|^2) = 0. \tag{2.10}$$

Рассмотрим два случая. Пусть сначала $\Lambda = 0$. Это означает, что геометрическое ограничение неактивно, т.е. в точке экстремума оно выполняется автоматически и может быть опущено. В этом случае $u^* = (2\lambda)^{-1}B'(t)\ell$, выполняется условие максимума в форме (2.6).

При $\Lambda > 0$ $u^* = (2(\lambda + \Lambda))^{-1}B'(t)\ell$, а число Λ выбирается так, чтобы выполнялось равенство $\|u\| = \mu$, следующее из (2.10). Это означает выполнение принципа максимума в форме (2.5).

Следствие 2.4. *Существует число $\lambda \geq 0$ такое, что*

$$u^*(t) = \begin{cases} (2\lambda)^{-1}B'(t)\ell, & \|B'(t)\ell\| < 2\lambda\mu; \\ \mu B'(t)\ell/\|B'(t)\ell\|, & \|B'(t)\ell\| \geq 2\lambda\mu. \end{cases}$$

Пусть теперь задано начальное множество $M_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ (будем считать, что это непустой выпуклый компакт). Найдем множество достижимости в момент t_1 из начального положения $\{t_0, x(t_0)\}$, где $x(t_0) \in M_0$. Очевидно, что

$$\mathcal{X}(t_1; t_0, k_0, M_0) = \bigcup_{x_0 \in M_0} x_0 + \mathcal{X}(t_1; t_0, k_0, \{0\}) = M_0 + \mathcal{X}(t_1; t_0, k_0, \{0\}).$$

Лемма 2.3. *Для того чтобы для заданного $\ell \in \mathbb{R}^n$ было выполнено равенство $\langle \ell, x^*(t_1)\rangle = \rho(\ell \mid \mathcal{X}(t_1; t_0, k_0, M_0))$, необходимо и достаточно, чтобы в каждый момент выполнялся принцип максимума (2.8), выполнялось условие дополняющей нежесткости (2.9) и условие трансверсальности в начальный момент $\langle \ell, x^*(t_0)\rangle = \rho(\ell \mid M_0)$.*

3. ОБЛАСТЬ РАЗРЕШИМОСТИ

Рассмотрим теперь ту же задачу в обратном времени: опишем множество начальных состояний $x(t_0)$, из которых можно попасть в конечный момент в начало координат при имеющихся ограничениях на управление. Указанное множество принято называть областью разрешимости или "попятной областью достижимости". Обозначим это множество как

$$\mathcal{W}[t_0] = \mathcal{W}(t_0, k_0; t_1, \{0\}) = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_1}^{t_0} B(t)u(t)\,dt \mid \|u(t)\| \leq \mu, \ \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2\,dt \leq k(t_0) \right\}.$$

Заметим, что из определения $\mathcal{W}[t_0]$ следует равенство $\mathcal{W}(t_0, k_0; t_1, \{0\}) = -\mathcal{X}(t_1; t_0, k_0, \{0\})$. Если вместо начала координат задано целевое множество M_1, то множество разрешимости можно найти как $\mathcal{W}(t_0, k_0; t_1, M_1) = M_1 + \mathcal{W}(t_0, k_0; t_1, M_1)$.

После выкладок, аналогичных проделанным для множества достижимости, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.1. *1) Множество разрешимости содержится в пересечении множеств $\mathcal{W}[t_0] \subseteq \mathcal{W}_G[t_0] \cap \mathcal{W}_I[t_0]$, где $\mathcal{W}_G[t_0]$ – множество разрешимости только при геометрическом ограничении:*

$$\mathcal{W}_G[t_1] = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_1}^{t_0} u(t)\,dt \mid \|u(t)\| \leq \mu \right\} = \int_{t_0}^{t_1} B(t)\mathcal{B}_\mu\,dt, \quad \rho(\ell \mid \mathcal{W}_G[t_1]) = \mu \int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)\ell\|\,dt,$$

а $\mathcal{W}_I[t_1]$ – множество разрешимости только при интегральном ограничении:

$$\mathcal{W}_I[t_1] = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_1}^{t_0} u(t)\,dt \;\middle|\; \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2\,dt \leq k(t_0) \right\},$$

$$\rho(\ell \mid \mathcal{W}_I[t_1]) = \left(k(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)\ell\|^2\,dt \right)^{1/2} = \nu\langle \ell, W_1(t_0)\ell\rangle^{1/2}.$$

2) Для того чтобы при геометрическом ограничении выполнялось равенство $\langle \ell, x^*(t_0)\rangle = \rho(\ell \mid \mathcal{W}_G[t_1])$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало управление, для которого в каждый момент времени выполняется равенство (принцип максимума для геометрического ограничения)*

$$\langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \min_{\|u\|\le\mu} \langle \ell, B(t)u\rangle = -\mu\|B'(t)\ell\| \tag{3.1}$$

и в конечный момент $x^*(t_1) = 0$.

3) Для того чтобы при интегральном ограничении выполнялось равенство $\langle \ell, x^*(t_0)\rangle = \rho(\ell \mid \mathcal{W}_I[t_1])$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали управление* $u^*(\cdot)$, *для которого* $x^*(t_1) = 0$ *и интегральное ограничение (1.3) выполняется в виде равенства, и число* $\lambda > 0$ *такие, что в каждый момент времени выполняется условие максимума для интегрального ограничения*

$$\lambda\|u^*(t)\|^2 + \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \min_{u\in\mathbf{R}^p}\{\lambda\|u\|^2 + \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle\}. \tag{3.2}$$

4) Для того чтобы при совместных ограничениях достигалось равенство $\langle \ell, x^*(t_0)\rangle = \rho(\ell \mid \mathcal{W}(t_0, k_0; t_1, M_1))$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали управление* $u^*(\cdot)$ *и число* $\lambda \ge 0$, *для которых в каждый момент времени выполняется либо принцип максимума в форме (3.1), либо условие максимума для интегрального ограничения в форме (3.2), что эквивалентно общему принципу максимума*

$$\lambda\|u^*(t)\|^2 + \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \min_{\|u\|\le\mu}\{\lambda\|u\|^2 + \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle\},$$

выполняется условие дополняющей нежесткости (2.9) и в конечный момент выполняется условие трансверсальности $\langle \ell, x^*(t_1)\rangle = \rho(\ell \mid M_1)$.

4. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ

Найденные выше формулы для областей достижимости и разрешимости были получены в статической форме на основе неравенств выпуклого анализа. Далее приведем соотношения динамического программирования для этих задач, открывающие путь к построению синтезирующих стратегий управления.

4.1. Задача достижимости. Введем функцию цены

$$V(t,x,k) = \min_{x_0\in M_0} \min_{\substack{u(\cdot)\\ \|u(\tau)\|\le\mu,\ k(t)\ge 0}} \{d^2(x, x(t)) \mid x(t_0) = x_0,\ k(t_0) = k\},$$

означающую минимальное расстояние, на которое управление может приблизить систему к точке x в момент времени t, израсходовав не более k единиц энергии. Возведение в квадрат здесь проведено для обеспечения необходимой гладкости функции V.

Указанная функция цены допускает и другую интерпретацию: это минимальное расстояние до начального множества M_0, при котором возможно попадание в точку x в момент t при запасе энергии k :

$$V(t,x,k) = \min_{\substack{u(\cdot)\\ \|u(\tau)\|\le\mu,\ k(t)\ge 0}} \{d^2(x(t_0), M_0) \mid x(t) = x,\ k(t_0) = k\}.$$

Очевидно, что искомая область достижимости $\mathcal{X}(t_1; t_0, k_0, M_0)$ будет множеством уровня указанной выше функции цены: $\mathcal{X}(t_1; t_0, k_0, M_0) = \{x \mid V(t_1, x, k_0) \le 0\}$. Можно перейти и в обратную сторону: от множества достижимости к функции цены, используя следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Функция цены равна квадрату расстояния до множества достижимости:* $V(t,x,k) = d^2(x, \mathcal{X}(t; t_0, k, M_0))$.

Доказательство. Воспользуемся формулой $d^2(x,M) = \max\limits_{\ell\in\mathbb{R}^n}\{\langle \ell, x\rangle - \rho(\ell \mid M) - (1/4)\|\ell\|^2\}$, тогда

$$V(t,x,k) = \min_{x_0\in M_0}\min_{u(\cdot)}\max_{\ell\in\mathbb{R}^n}\left\{\langle \ell, x\rangle - \langle \ell, x_0\rangle - \int\limits_{t_0}^{t}\langle \ell, B(\tau)u(\tau)\rangle\, d\tau - (1/4)\|\ell\|^2\right\}.$$

Функция в фигурных скобках линейна по $u(\cdot)$ и x_0, вогнута по ℓ и стремится к бесконечности при $\|\ell\| \to \infty$. Следовательно, операции взятия минимума и максимума перестановочны [6], и можно продолжить равенство

$$V(t,x,k) = \max_{\ell\in\mathbb{R}^n}\min_{x_0\in M_0}\min_{u(\cdot)}\left\{\langle \ell, x\rangle - \int\limits_{t_0}^{t}\langle \ell, B(\tau)u(\tau)\rangle\, d\tau - (1/4)\|\ell^2\|\right\} =$$

$$= \max_{\ell\in\mathbb{R}^n}\{\langle \ell, x\rangle - \rho(\ell \mid M_0) - \rho(\ell \mid \mathcal{X}(t;t_0,k,\{0\})) - (1/4)\|\ell\|^2\} =$$

$$= \max_{\ell\in\mathbb{R}^n}\{\langle \ell, x\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}(t;t_0,k,M_0)) - (1/4)\|\ell\|^2\} = d^2(x, \mathcal{X}(t;t_0,k,M_0)).$$

Следствие 4.1. *Функция цены является выпуклой по переменным* x, k.

Покажем, что функцию цены можно искать независимо от множества достижимости как решение дифференциального уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Лемма 4.2. *Функция цены в задаче достижимости является классическим решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\partial V/\partial t + \max_{\|u\|\le\mu}\{\langle \partial V/\partial x, B(t)u\rangle + (\partial V/\partial k)\|u\|^2\} = 0 \tag{4.1}$$

с граничным $\partial V/\partial t|_{k=0} = 0$ *и начальным* $V(t_0,x,k) = d^2(x,M_0)$ *условиями.*

Доказательство. Вычислим вначале опорную функцию множества достижимости из начала координат $\rho(\ell \mid \mathcal{X}(t;t_0,k,M_0)) = \max\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_I\cap\mathcal{U}_G}\int_{t_0}^{t}\langle \ell, B(s)u(s)\rangle\, ds$, где $\mathcal{U}_I$ и $\mathcal{U}_G$ – множества управлений, удовлетворяющих геометрическому и интегральному ограничениям соответственно. Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u(\cdot),\lambda) = \int\limits_{t_0}^{t}\langle \ell, B(s)u(s)\rangle\, ds + \lambda\left(k - \int\limits_{t_0}^{t}\|u(s)\|^2\, ds\right).$$

По теореме Куна–Таккера [5] существует число $\lambda = \lambda(\ell)$, при котором выполняется равенство

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}[t_1]) = \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_G}\mathcal{L}(u(\cdot),\lambda) = \int\limits_{t_0}^{t}(\max_{\|u\|\le\mu}\langle B'(s)\ell - \lambda u(s), u(s)\rangle)\, ds + \lambda k.$$

Как уже показано ранее,

$$V(t,x,k) = \max_{\ell\in\mathbb{R}^n}\{\langle \ell, x\rangle - \rho(\ell \mid M_0) - \rho(\ell \mid \mathcal{X}[t]) - (1/4)\langle \ell, \ell\rangle\} =$$

$$= \langle \ell_0, x\rangle - \rho(\ell_0 \mid M_0) - \int\limits_{t_0}^{t}(\max_{\|u\|\le\mu}\langle B'(s)\ell_0 - \lambda(\ell_0)u(s), u(s)\rangle)\, ds - \lambda(\ell_0)k - \frac{1}{4}\langle \ell_0, \ell_0\rangle,$$

где $\ell_0 = \ell_0(t,x,k)$ - единственный максимизатор, так как функция под знаком максимума сильно выпукла по ℓ. По теореме о дифференцировании функции максимума [7] частные производные функции цены равны

$$\partial V/\partial x = \ell_0(t,x,k), \quad \partial V/\partial k = -\lambda(\ell_0(t,x,k)),$$

$$\partial V/\partial t = -\max_{\|u\|\le\mu}\{\langle\ell_0, B(s)u\rangle - \lambda\langle u,u\rangle\} = -\max_{\|u\|\le\mu}\{\langle\partial V/\partial x, B(s)u\rangle + (\partial V/\partial k)\|u\|^2\},$$

что эквивалентно (4.1).

Таким образом, функция $V(t,x,k)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных. Следовательно, она будет классическим решением уравнения (4.1). Лемма доказана.

Замечание. Если функция цены равна минимальному расстоянию до начального множества, а не его квадрату, то она будет менее гладкой, чем ранее, однако в силу выпуклости по переменным x, k она будет вязкостным решением [8] уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана [9].

4.2. Разрешимость. Функция цены для задачи разрешимости имеет вид

$$W(t,x,k) = \min_{\substack{u(\cdot)\\ \|u(\tau)\|\le\mu,\ k(t_1)\ge 0}}\{d^2(x(t_1), M_1) \mid x(t)=x,\ k(t)=k\}.$$

Это минимальное расстояние, на которое можно приблизиться к целевому множеству в конечный момент, если в момент t система находится в точке x и имеет неизрасходованный запас энергии k. Эта функция цены также допускает вторую интерпретацию – расстояние до ближайшей точки, из которой можно попасть в целевое множество разрешимости, использовав не более k единиц энергии: $W(t,x,k) = \min_{x_1\in M_1}\min_{\substack{u(\cdot)\\ \|u(\tau)\|\le\mu,\ k(t_1)\ge 0}}\{d^2(x,x(t)) \mid x(t_1)=x_1,\ k(t)=k\}$.

Лемма 4.3. *Функция цены в задаче разрешимости равна* $W(t,x,k)=d^2(x,\mathcal{W}(t,k;t_1,M_1))$. *Она является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \min_{\|u\|\le\mu}\left\{\left\langle\frac{\partial W}{\partial x}, B(t)u\right\rangle - \frac{\partial W}{\partial k}\|u\|^2\right\} = 0$$

с граничным $\partial W/\partial t|_{k=0} = 0$ *и начальным* $W(t_1,x,k) = d^2(x,M_1)$ *условиями.*

Следствие 4.2. *Оптимальный синтез управления* $u^*(t,x,k)$ *находится из следующего условия:*

$$\left\langle\frac{\partial W}{\partial x}, B(t)u^*(t,x,k)\right\rangle - \frac{\partial W}{\partial k}\|u^*(t,x,k)\|^2 = \min_{\|u\|\le\mu}\left\{\left\langle\frac{\partial W}{\partial x}, B(t)u\right\rangle - \frac{\partial W}{\partial k}\|u\|^2\right\}.$$

Существование и продолжаемость решений системы (1.1) при $u(t) = u^*(t,x(t),k(t))$ будут доказаны в следующем пункте.

5. ДОСТИЖИМОСТЬ И РАЗРЕШИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРЕМЕННЫХ x, k

До сих пор, задавая начальное и целевое множество в пространстве переменной x, мы искали множества достижимости и разрешимости в том же пространстве. Однако состояние рассматриваемой системы описывается не только переменной x, но и переменной k. Поэтому в дальнейшем при построении альтернированных интегралов в задаче с неопределенностью (см. [10, 11]) понадобится вычислять множества достижимости и разрешимости при всевозможных значениях k, т.е. искать их в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных x, k. В связи со сказанным имеет смысл рассматривать упомянутые выше задачи в пространстве переменных x, k.

5.1. Достижимость. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных x, k задано начальное множество $\mathcal{M}_0$. Будем предполагать, что это выпуклый компакт, полностью содержащийся в полупространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+ = \{(x,k) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid k \geq 0\}$. Обозначим через $\mathcal{X}^*(t_1; t_0, \mathcal{M}_0)$ множество достижимости системы (1.1) в момент t_1. Оно совпадает со множеством достижимости дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_0(t) = \left\{ \begin{pmatrix} B(t)u \\ -\|u\|^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \|u\| \leq \mu \right\}, \quad \begin{pmatrix} x(t_0) \\ k(t_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_0,$$

при фазовом ограничении (1.2), которое в свою очередь совпадает [12] со множеством достижимости следующего дифференциального включения с выпуклой правой частью:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(t) = \operatorname{conv} \mathcal{P}_0(t) = \tilde{B}(t) \left\{ \begin{pmatrix} u \\ u^0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \|u\| \leq \mu \\ \|u\|^2 \leq u^0 \leq \mu^2 \end{matrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} x(t_0) \\ k(t_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_0, \tag{5.1}$$

где $\tilde{B}(t) = \operatorname{diag}(B(t), -1)$.

В работе [13] показано, что множество достижимости такого дифференциального включения является единственным решением эволюционного уравнения

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma^{-1} h(\mathcal{X}^*[t+\sigma], (\mathcal{X}^*[t] + \sigma \mathcal{P}(t)) \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+) = 0, \quad \mathcal{X}^*[t_0] = \mathcal{M}_0.$$

Покажем, каким образом множество $\mathcal{X}^*[t]$ связано со множеством достижимости в пространстве переменной x. Для этого рассмотрим сечения начального множества и множества достижимости при постоянных значениях переменной k : $\mathcal{M}_0(k) = \{x \mid (x,k) \in \mathcal{M}_0\}$, $\mathcal{X}^*[k,t] = \{x \mid (x,k) \in \mathcal{X}^*[t]\}$.

Лемма 5.1. *Справедлива следующая формула для сечений множества достижимости:*

$$\mathcal{X}^*[k,t] = \bigcup_{k_0 \geq k} \mathcal{X}(t; t_0, k_0 - k, \mathcal{M}_0(k_0)).$$

Доказательство. В самом деле, управление может выбрать любое начальное значение k, равное или превосходящее текущее. При фиксированном k_0 мы получаем задачу о нахождении множества разрешимости в пространстве $\mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию цены

$$V^*(t,x,k) = \min_{\substack{u(\cdot) \\ \|u(\tau)\| \leq \mu}} \{d^2(x(t_0), \mathcal{M}_0(k(t_0))) \mid x(t) = x,\ k(t) = k\}.$$

Лемма 5.2. *Множество достижимости является множеством уровня функции цены:* $\mathcal{X}^*[t] = \{(x,k) \mid V^*(t,x,k) \leq 0\}$.

Лемма 5.3. *Функция цены равна квадрату расстояния до сечения множества достижимости:* $V^*(t,x,k) = d^2(x, \mathcal{X}^*[k,t])$ *и является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\partial V^* / \partial t + \max_{\|u\| \leq \mu} \{\langle \partial V^* / \partial x, B(t)u \rangle - (\partial V^* / \partial k) \|u\|^2\} = 0$$

с граничным $\partial V^* / \partial t|_{k=0} = 0$ *и начальным* $V^*(t_0, x, k) = d^2(x, \mathcal{M}_0(k))$ *условиями.*

5.2. Разрешимость. Пусть задано выпуклое компактное целевое множество $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. Обозначим через $\mathcal{W}^*(t; t_1, \mathcal{M}_1)$ множество разрешимости системы (1.1) в момент времени t. Оно совпадает со множеством достижимости (в обратном времени) дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(t), \quad \begin{pmatrix} x(t_1) \\ k(t_1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1,$$

при фазовом ограничении (1.2) и может быть найдено [13] как единственное решение эволюционного уравнения $\lim\limits_{\sigma \to 0} \sigma^{-1} h(\mathcal{W}^*[t-\sigma], (\mathcal{W}^*[t] - \sigma \mathcal{P}(t)) \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+) = 0$.

Лемма 5.4. *Сечения множества разрешимости могут быть найдены по следующей формуле:* $\mathcal{W}^*[k,t] = \bigcup_{0 \leq k_1 \leq k} \mathcal{W}(t, k - k_1; t_1, \mathcal{M}(k_1))$.

Рассмотрим функцию цены

$$W^*(t,x,k) = \min_{\substack{u(\cdot) \\ \|u(\tau)\|\le\mu}} \{d^2(x(t_1), \mathcal{M}_1(k(t_1))) \mid x(t) = x,\ k(t) = k\}.$$

Лемма 5.5. *Множество разрешимости является множеством уровня функции цены:* $\mathcal{W}^*[t] = \{(x,k) \mid W^*(t,x,k) \le 0\}$.

Лемма 5.6. *Функция цены равна квадрату расстояния до сечения множества разрешимости:* $W^*(t,x,k) = d^2(x, \mathcal{W}^*[k,t])$ *и является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\partial W^*/\partial t + \min_{\|u\|\le\mu} \{\langle \partial W^*/\partial x, B(t)u\rangle - (\partial W^*/\partial k)\|u\|^2\} = 0$$

с граничным $\partial W^*/\partial t|_{k=0} = 0$ *и начальным* $W^*(t_0,x,k) = d^2(x, \mathcal{M}_0(k))$ *условиями.*

Следствие 5.1. *Синтез управления, обеспечивающий попадание на целевое множество, имеет вид*

$$\mathcal{U}^*(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{\|u\|\le\mu} \left\{ \left\langle \frac{\partial d(x, \mathcal{W}^*[k,t])}{\partial x}, B(t)u \right\rangle - \frac{\partial d(x, \mathcal{W}^*[k,t])}{\partial k} \|u\|^2 \right\}.$$

В силу непрерывности многозначного отображения $\mathcal{W}^*[k,t]$ синтез $\mathcal{U}^*$ является полунепрерывным сверху, следовательно, выполнены условия существования и продолжаемости решений дифференциального включения (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондаренко В.И., Филимонов Ю.М.* // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32. № 1. С. 147–153.
2. *Kalman R.E.* // Proc. 1st IFAC Congress. 1960. V. 1.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.
5. *Kuhn H.W. and Tucker A.W.* // Proc. of 2nd Berkeley Symp. 1951. P. 481–492.
6. *Fan Ky* // Proc. Nat. Acad. of Sci. USA. 1953. V. 39. № 1. P. 42–47.
7. *Демьянов В.Ф.* Минимакс: производные по направлениям. Л., 1974.
8. *Crandall M.G. and Lions P.-L.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. P. 1–41.
9. *Fleming W.H. and Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer-Verlag, 1993.
10. *Понтрягин Л.С.* // Мат. сб. 1980. Т. 112(154). № 3(7). С. 307–330.
11. *Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.* // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 69–100.
12. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
13. *Kurzhanski A.B. and Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston, 1997.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
25.06.2001 г.