Метод динамического программирования в задачах синтеза управлений при разнотипных и двойных ограничениях

А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский

daryin@cs.msu.su, kurzhans@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Задачи

Управляемая система:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v$$

- Нестандартные комбинации ограничений.
- Подход к решению — динамическое программирование.
- Управление ищется в форме синтеза.

Задачи

- Двойное ограничение на управление, геометрическое ограничение на помеху.
- Задача импульсного управления.

Задача с двойным ограничением

Управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v$$

Временной интервал $T = [t_0, t_1]$ фиксирован.

Управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v$$

Временной интервал $T = [t_0, t_1]$ фиксирован.

Двойное ограничение на управление (u):

геометрическое	$+$	интегральное
$u \in \mathcal{P}(t)$		$\int_{t_0}^{t} \|u\|^2_{R(t)} \, \mathrm{d}t \leqslant \nu$

Геометрическое ограничение на помеху (v): $v \in \mathcal{Q}(t)$

Управляемая система

Расширенная система:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)} \end{cases} \qquad (*)$$

Интегральное ограничение = фазовое ограничение на $k(t)$:

$$k(t) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \|u\|^2_{R(t)}\, \mathrm{d}t \leqslant k(t_0) = \nu$$

Управляемая система

Расширенная система:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = B(t)u + v, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)} \end{cases} \qquad (*)$$

Интегральное ограничение =
фазовое ограничение на $k(t)$:

$$k(t) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \|u\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k(t_0) = \nu$$

Классы управлений

$\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ — синтезирующие стратегии

$$\mathcal{U}(t,x,k) : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n,$$

измеримо по t и п.н.с. по (x,k),

$$\mathcal{U}(t,x,k) \subseteq \mathcal{P}(t),$$

$$\mathcal{U}(t,x,k) = \{0\} \quad \text{при} \quad k < 0.$$

Классы управлений

$\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ — синтезирующие стратегии

$$\mathcal{U}(t,x,k) : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n,$$

измеримо по t и п.н.с. по (x,k),

$$\mathcal{U}(t,x,k) \subseteq \mathcal{P}(t),$$

$$\mathcal{U}(t,x,k) = \{0\} \quad \text{при} \quad k < 0.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \underbrace{\operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} B(t)u \\ -\|u\|^2_{R(t)} \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathcal{U} \right\}}_{\mathcal{B}(t,\mathcal{U}(t,x,k))} + \mathcal{Q}(t). \quad (**)$$

Классы управлений

$\mathcal{U}_{\mathrm{OL}} = \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k_0)$ — программные управления

$$u(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \text{измеримо по } t,$$

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \qquad \int_{t_0}^{t_1} \|u\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k_0.$$

Задача

Найти множество разрешимости $\mathcal{W}[t] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и синтез управлений $\mathcal{U}(t,x,k) \in \mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ т.ч. для всех решений дифференциального включения $(**)$, выпущенных из $(x(t),k(t)) \in \mathcal{W}[t]$, выполняется $(x(t_1),k(t_1)) \in \mathcal{M}$.

Схема решения

Задача решается сочетанием следующих подходов:

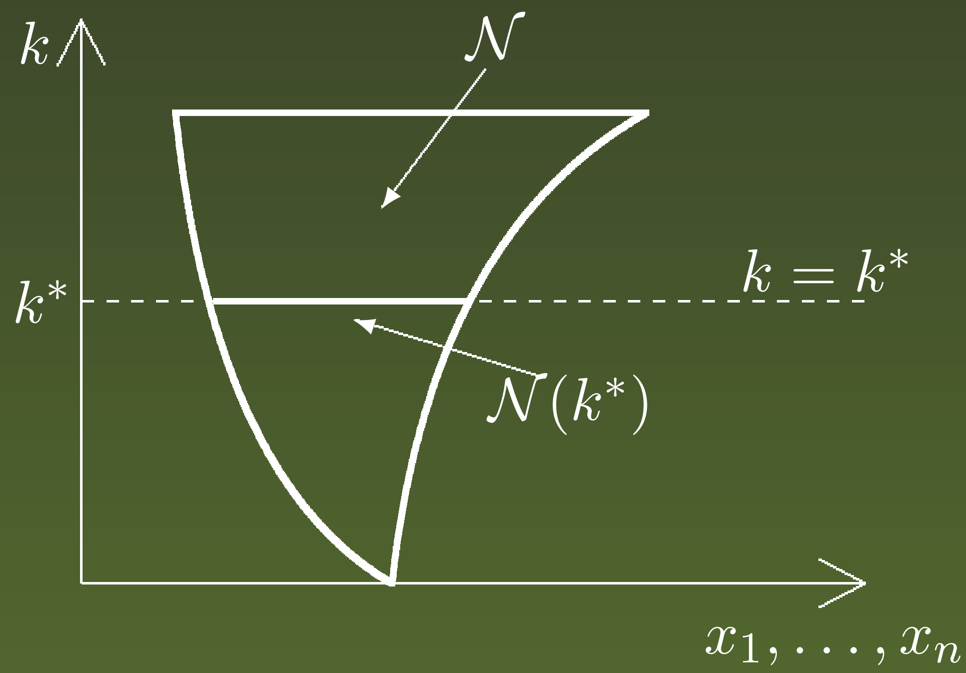
- Альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина (Понтрягин, 1967; Понтрягин, 1980).
- Теория Н. Н. Красовского (Красовский, 1968).
- Негладкое динамическое программирование (Crandall and Lions, 1983; Субботин, 1990).

Подобная комбинация ранее рассматривалась для задач с геометрическим ограничением на управление и помеху с целью применения методов эллипсоидальной аппроксимации для получения эффективного алгоритма решения задачи (Куржанский, 1999).

Сечения множества разрешимости

Для $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{N}(k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, k) \in \mathcal{N}\}$ называется сечением $\mathcal{N}$ на уровне k.

$$\mathcal{N} = \{(x, k) \mid x \in \mathcal{N}(k)\}$$



Сечения множества разрешимости

Сечения целевого множества: $\mathcal{M}(k)$.
Сечения множества разрешимости: $\mathcal{W}[k,t]$.

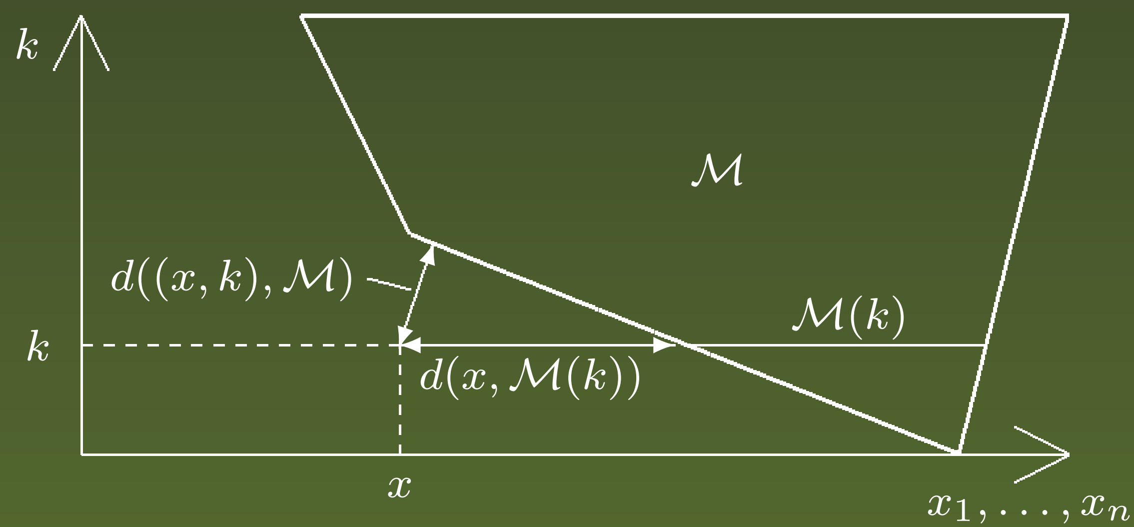
Требования к целевому множеству $\mathcal{M}$:

1. монотонность: $\mathcal{M}(k_1) \subseteq \mathcal{M}(k_2)$ если $k_1 \leqslant k_2$;
2. $\mathcal{M}(k) = \varnothing$ для $k < 0$;
3. $\mathcal{M}(k)$ непрерывно по Хаусдорфу при $\mathcal{M}(k) \neq \varnothing$;
4. $\mathcal{M}(k) \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$.

Функция цены

$$V(t,x,k) = \inf_{\mathcal{U}\in\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}} \sup_{\binom{x(\cdot)}{k(\cdot)}\in\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(\cdot)} d(x(t_1),\mathcal{M}(k(t_1))).$$

$$\mathcal{W}[k,t] = \{x\in\mathbb{R}^n \mid V(t,x,k)\leqslant 0\},\quad V(t,x,k)\leqslant d(x,\mathcal{W}[k,t]).$$



Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса

$$V_t + \min_{u\in\mathcal{P}(t)} \max_{v\in\mathcal{Q}(t)} \Big\{ \langle V_x, B(t)u + v\rangle - V_k \|u\|^2_{R(t)} \Big\} = 0,$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad k \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

с краевым условием

$$V_t + \max_{v\in\mathcal{Q}(t)} \langle V_x, v\rangle \Big|_{k=0} = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и начальным условием

$$V(t_1, x, k) = d(x, \mathcal{M}(k)), \quad k \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Оптимальный синтез управлений

$$\mathcal{U}^*(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in \mathcal{P}(t)} \langle V_x, B(t)u \rangle - V_k \|u\|^2_{R(t)}.$$

Эволюционное уравнение

Многозначное отображение $\mathcal{Z}[k,t] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ слабо инвариантно если

$$\mathcal{Z}[k,t] \subseteq W^{+}(k,t,t+\sigma,\mathcal{Z}(\cdot,t+\sigma)).$$

$\mathcal{Z}[k,t]$ слабо инвариантно $\iff$ является решением эволюционного уравнения

$$\lim_{\sigma\downarrow 0} \sigma^{-1} h_{+}\Big(\mathcal{Z}[k,t] + \sigma\mathcal{Q}(t), \bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \big[\mathcal{Z}[\gamma,t+\sigma] - \\ - \sigma\mathcal{P}(t) \cap \mathcal{E}\big(0,(k-\gamma)\sigma R^{-1}(t)\big)\big]\Big) = 0.$$

$\mathcal{W}[k,t]$ — максимальное решение эволюционного уравнения.

Синтез управлений

Пусть $\mathcal{Z}[k,t]$ — слабо инвариантное многозначное отображение с опорной функцией, непрерывно дифференцируемой по t и k. Тогда

$$\min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max_{v\in\mathcal{Q}(t)}\frac{\mathrm{d}d^2(x,\mathcal{Z}[k,t])}{\mathrm{d}t}\leqslant 0.$$

$$\operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)}\langle \ell_0, B(t)u\rangle + \|u\|^2_{R(t)}\frac{\partial\rho(\ell_0\mid\mathcal{Z}[k,t])}{\partial k}$$

называется экстремальной стратегией для $\mathcal{Z}[k,t]$.

$$\ell_0=\arg\max_{\ell}\langle \ell, x\rangle-\rho(\ell\mid\mathcal{Z}[k,t])-\frac{1}{4}\|\ell\|^2.$$

Синтез управлений

Экстремальная стратегия $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t, x, k)$ принадлежит $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ и является решением исходной задачи:

$$d(x(t_1), \mathcal{Z}[k(t_1), t_1]) \leqslant d(x(t), \mathcal{Z}[k(t), t])$$

$$x(t) \in \mathcal{Z}[k(t), t] \quad \Longrightarrow \quad x(\tau) \in \mathcal{Z}[k(\tau), \tau],\ \tau \geqslant t,$$

в частности, $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$.

Программные множества разрешимости

Максиминное М.Р. $W^+(k, t, t_1; \mathcal{M}(\cdot))$ состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, т.ч. для любой помехи $v(\cdot)$ существует $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$, т.ч. $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$. (помеха известна заранее)

Минимаксное М.Р. $W^-(k, t, t_1; \mathcal{M}(\cdot))$ состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, т.ч. существует $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$, для которого $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$ для любой помехи $v(\cdot)$. (нет информации о помехе)

Здесь $x(\cdot)$ — траектория $(**)$, выпущенная из позиции (t, x, k) при управлении $u(\cdot)$ и помехе $v(\cdot)$.

Программные множества разрешимости

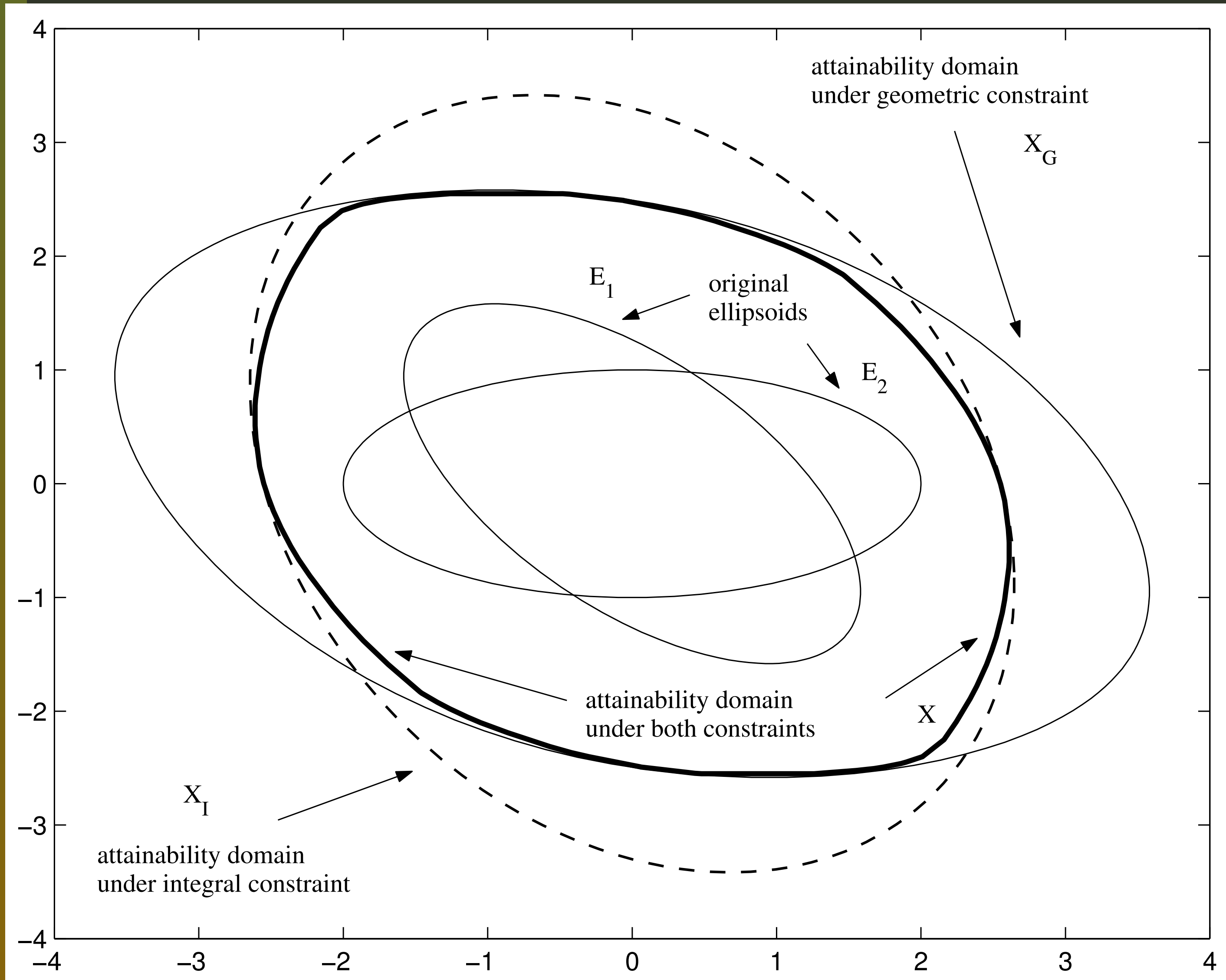
$$W^+[k,t] = \Big[\bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \mathcal{M}(\gamma) - \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t,t_1;k-\gamma) \Big] \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$W^-[k,t] = \bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \Big[\Big(\mathcal{M}(\gamma) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Big) - \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t,t_1;k-\gamma) \Big].$$

Здесь $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$ — множество достижимости при двойном ограничении:

$$\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t,t_1;k) = \left\{ \int_t^{t_1} B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\middle|\; u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k) \right\}.$$

Пример $\mathcal{X}_{\mathbf{GI}}$



Оценка для $\mathcal{X}_{\mathbf{GI}}$

$\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t, t+\sigma; \delta) \subseteq \mathcal{X}_{\mathrm{G}}(t, t+\sigma) \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}(t, t+\sigma; \delta)$, где

$$\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \int_t^{t+\sigma} B(\tau)\mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \mathcal{X}_{\mathrm{I}} = \mathcal{E}\left(0, \delta \int_t^{t+\sigma} R^{-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

$$h(\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}, \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}) = O(\sigma^2)$$

при предположениях:

1. $0 \in \operatorname{int} \mathcal{P}(t)$;
2. $\rho(\ell \mid \mathcal{P}(t))$ и $R(t)$ непрерывны по Липшицу.

Альтернированные суммы

Пусть $\mathcal{T} = \{t = \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}, \tau_m = t_1\}$ — разбиение $[t, t_1]$; $\sigma_i = \tau_i - \tau_{i-1} > 0$.

$$W^+_{\mathcal{T}}[k, \tau_m] = W^-_{\mathcal{T}}[k, \tau_m] = \mathcal{M}(k),$$
$$W^+_{\mathcal{T}}[k, \tau_{i-1}] = W^+(k, \tau_{i-1}, \tau_i; W^+_{\mathcal{T}}[\cdot, \tau_i]),$$
$$W^-_{\mathcal{T}}[k, \tau_{i-1}] = W^-(k, \tau_{i-1}, \tau_i; W^-_{\mathcal{T}}[\cdot, \tau_i]).$$

$$W^+_{\mathcal{T}}[k, \tau_0] = \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k, t], \qquad W^-_{\mathcal{T}}[k, \tau_0] = \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k, t]$$

— верхняя и нижняя альтернированные суммы. (множество разрешимости в задаче коррекции движения)

Верхний и нижний интеграл

Предположение: для любого разбиения $\mathcal{T}$, $k \geqslant 0$ и $t \in [t_0, t_1]$ множества $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t]$ и $\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k,t]$ выпуклые.

Если для некоторого $k \geqslant 0$ существует предел по Хаусдорфу $\mathcal{I}^+[k,t]$ верхних (нижних) сумм

$$\lim_{\operatorname{diam}\mathcal{T}\to 0} h(\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t], \mathcal{I}^+[k,t]) = 0,$$

то это предел называется верхним (нижним) альтернированным интегралом.

$$\mathcal{I}^+[k,t] = \bigcap_{\mathcal{T}} \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t], \quad \mathcal{I}^-[k,t] = \bigcup_{\mathcal{T}} \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k,t].$$

Альтернированный интеграл

$$\mathcal{I}^-[k,t] \subseteq \mathcal{W}[k,t] \subseteq \mathcal{I}^+[k,t].$$

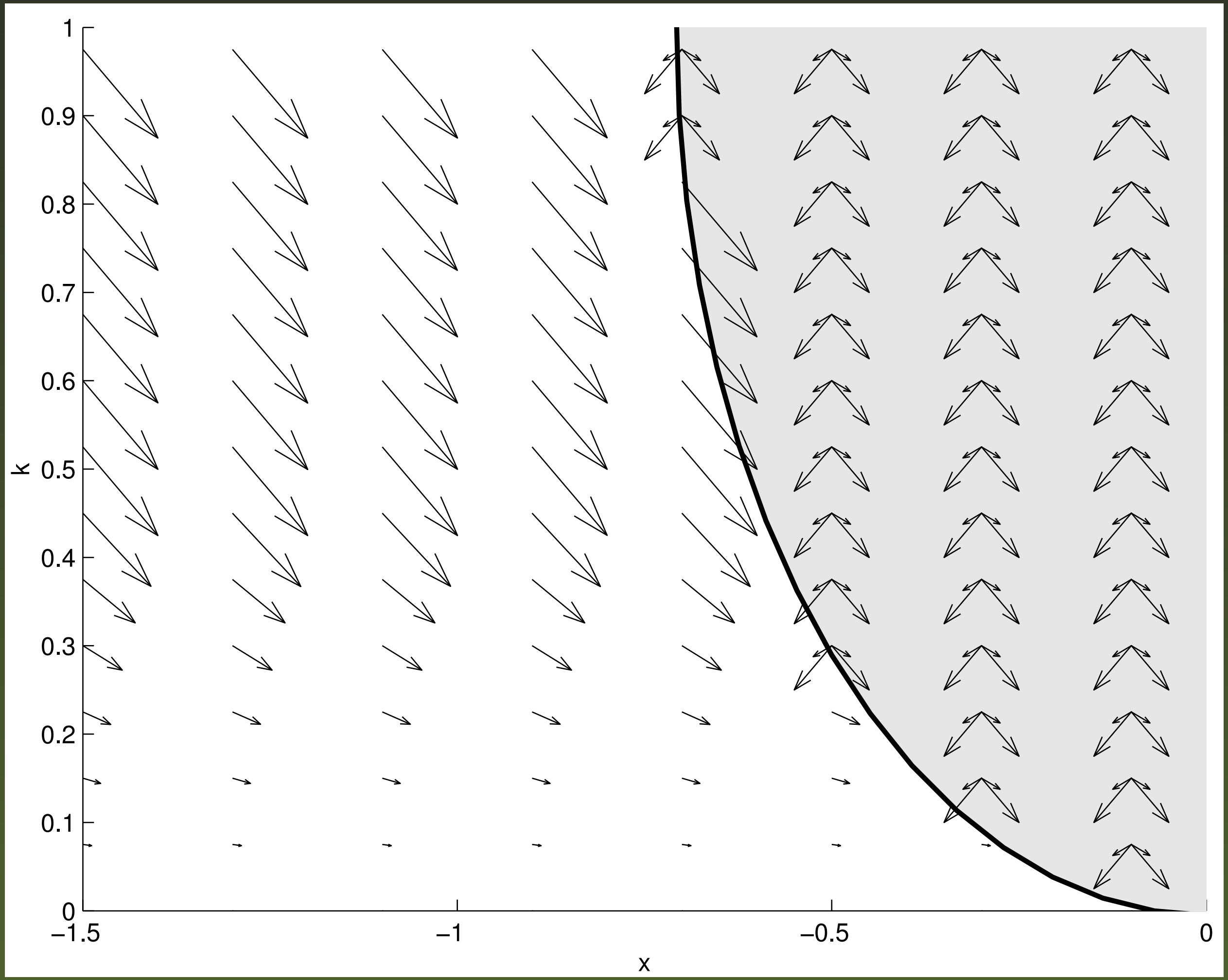
Если верхний и нижний альтернированный интегралы существуют и совпадают, то $\mathcal{I}[k,t] = \mathcal{I}^+[k,t] = \mathcal{I}^-[k,t]$ называется альтернированным интегралом.

$$\mathcal{W}[k,t] = \mathcal{I}[k,t].$$

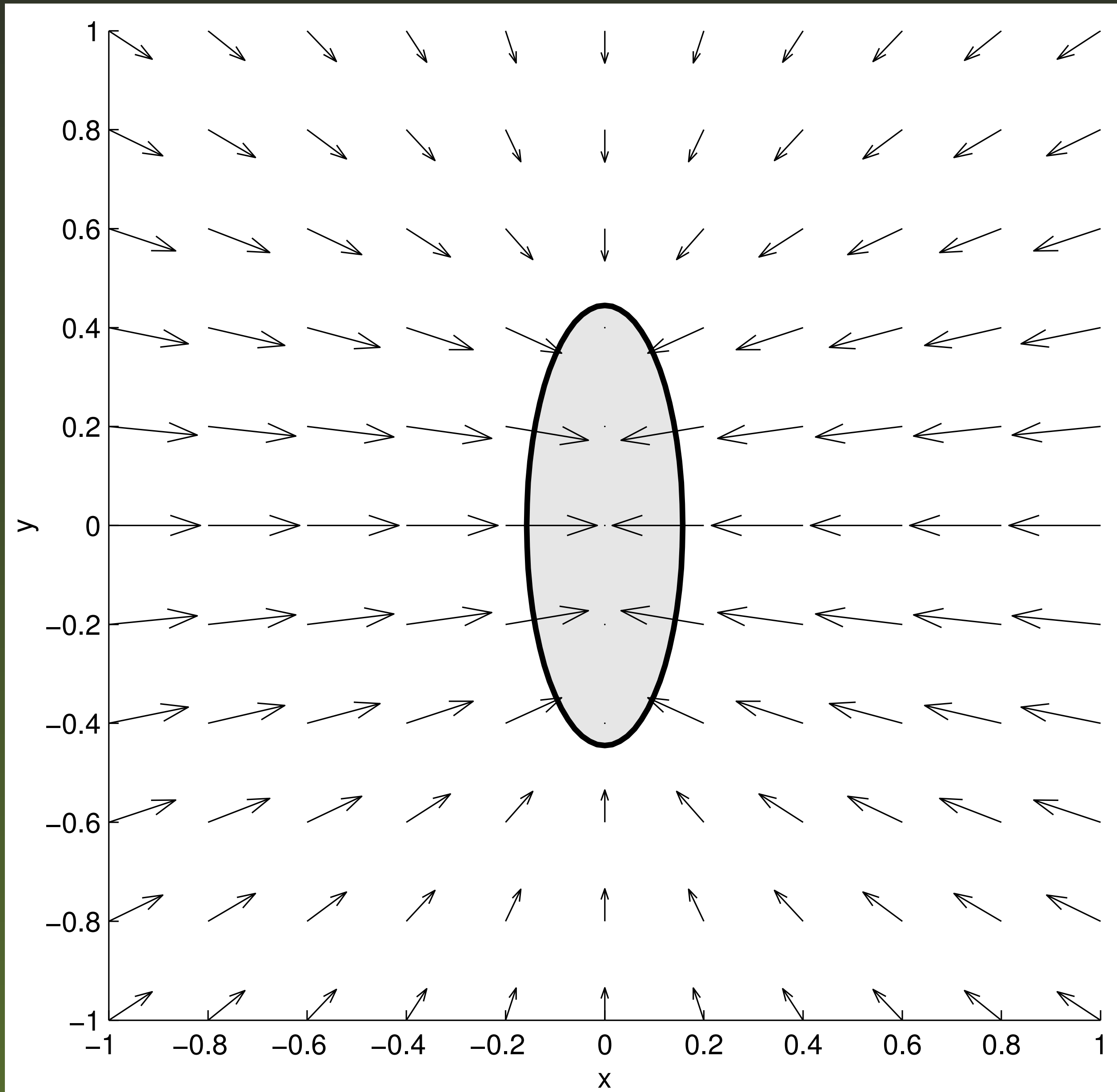
Отображения $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$, $\mathcal{W}$ обладают полугрупповым свойством:

$$\mathcal{I}(k,t,t_1;\mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{I}(k,t,\tau,\mathcal{I}(\cdot,\tau,t_1;\mathcal{M}(\cdot))),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant t_1.$$

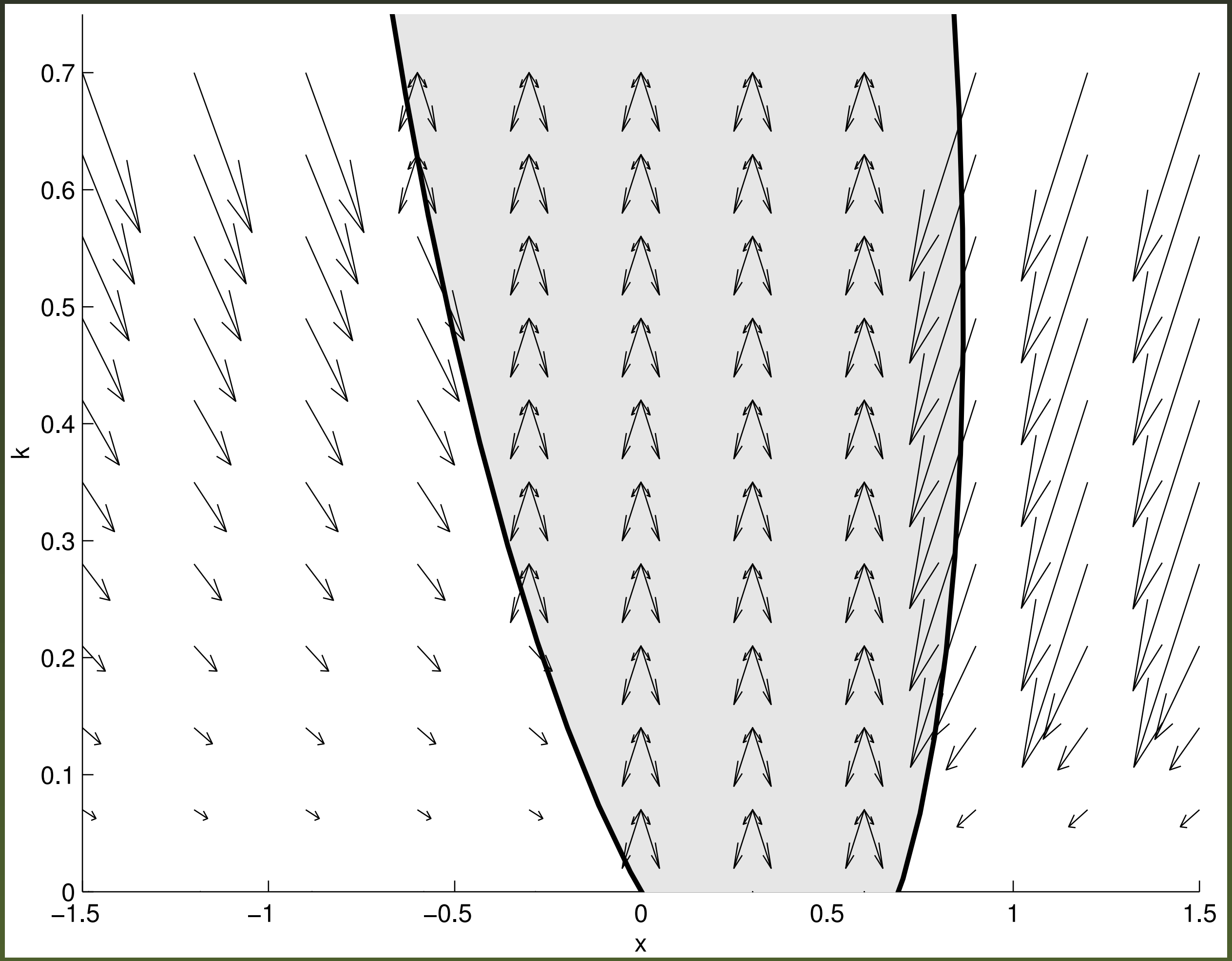
Пример синтеза управлений



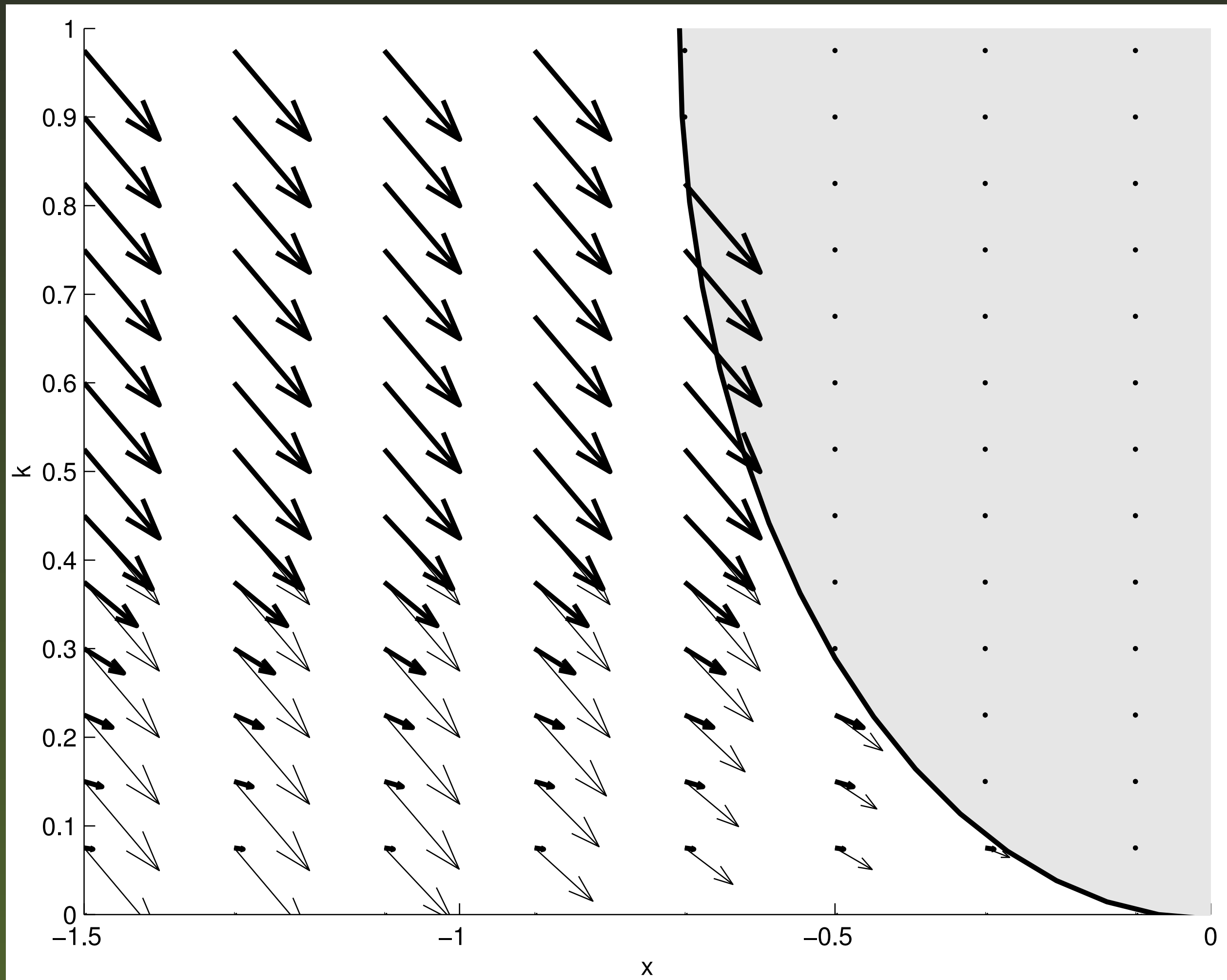
Пример синтеза управлений



Пример синтеза управлений



Пример синтеза управлений



Задача импульсного управления

Релейное управление

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$|u| \leqslant \mu$$

Задача быстродействия:

$$x(0) = x_0 \qquad x(\theta) = 0 \qquad \theta \to \min$$

$$u_0(t) = \mu \cdot \operatorname{sign} h_0(t)$$

Импульсное управление

$$\mathrm{d}x = Ax\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}U(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = u \text{ — generalized derivative}$$

$$\operatorname{Var} U \leqslant \mu$$

Задача быстродействия:

$$x(0) = x_0 \qquad x(\theta) = 0 \qquad \theta \to \min$$

$$u_0(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta(t - t_i) \qquad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leqslant \mu$$

$$t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leqslant \theta$$

Задача

Задача 1. Минимизировать

$$J(U(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \to \inf,$$

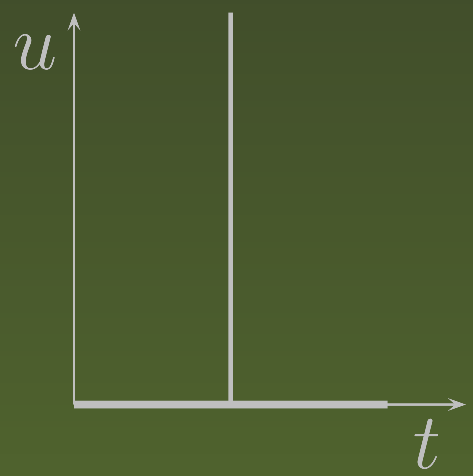
по функциям $U(\cdot) \in BV([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$ при условии

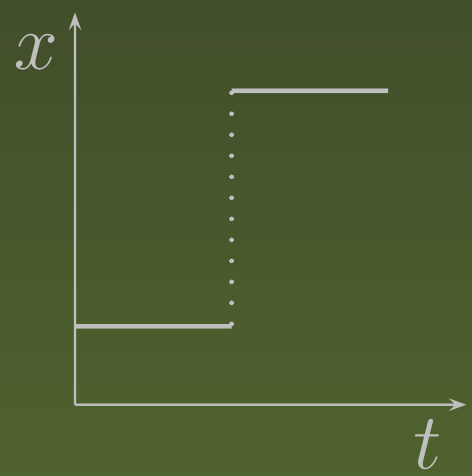
$$\mathrm{d}x(t) = A(t)x(t)\,\mathrm{d}t + B(t)\,\mathrm{d}U(t), \quad t \in [t_0,t_1],$$

$$x(t_0-0) = x_0.$$

Важный частный случай:
$\varphi(x) = \delta(x \mid \{x_1\})$: переход из (t_0, x_0) в (t_1, x_1).

Идеальная схема





Функция цены

Минимальное значение $J(U(\cdot))$ при фиксированной начальной позиции $x(t_0 - 0) = x_0$ называется функцией цены:

$$V(t_0, x_0) = V(t_0, x_0; t_1, \varphi(\cdot)).$$

Вычисление функции цены

Задача разбивается на две части:

- найти оптимальное $x_1 = x(t_1 + 0)$
- найти оптимальное $U(\cdot)$ для перевода из (t_0, x_0) в (t_1, x_1)

$$V(t_0, x_0) = \inf_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \left\{ \varphi(x_1) + \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle p, x_1 - X(t_1, t_0)x_0 \rangle}{\|B'(\cdot)X'(t_1, \cdot)p\|_{C[t_0, t_1]}} \right\}.$$

$X(t, \tau)$ — решение

$$\partial X(t, \tau)/\partial t = A(t)X, \quad X(\tau, \tau) = I.$$

Вычисление функции цены II

$$X(t_1,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t_1} X(t_1,t)B(t)\,\mathrm{d}U(t)=x_1$$

$$\langle p, x_1 - X(t_1,t_0)x_0\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle B'(t)X'(t_1,t)p,\,\mathrm{d}U(t)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \left[\max_{t\in[t_0,t_1]} B'(t)X'(t_1,t)p\right]\cdot \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot)$$

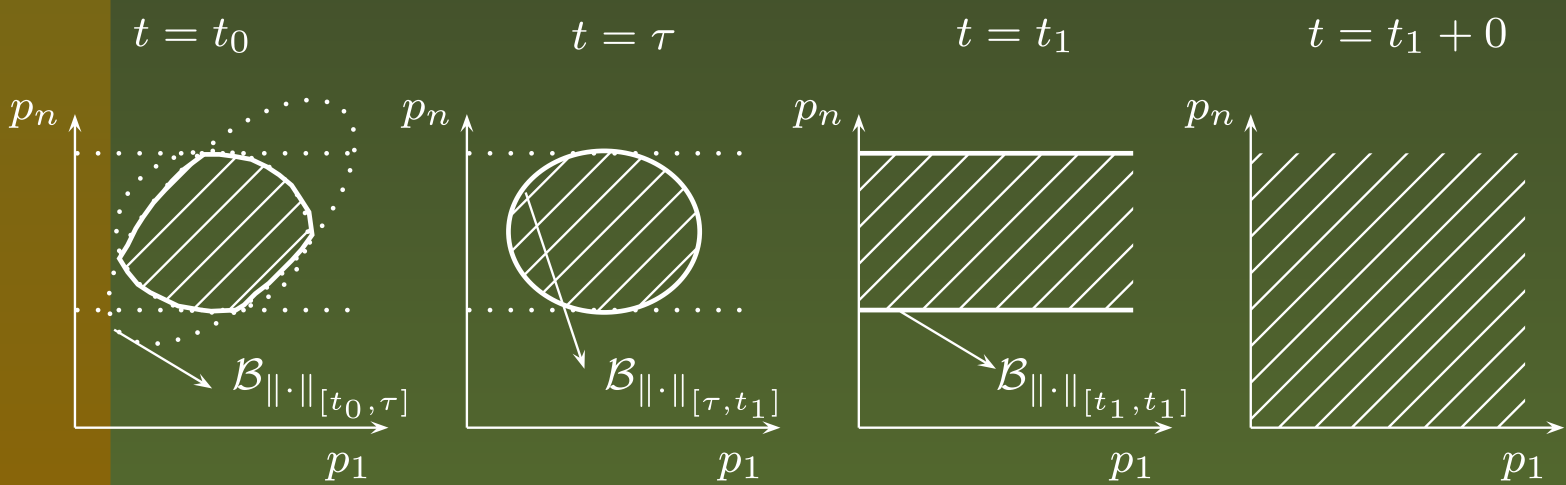
$$\inf \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} \frac{\langle p, x_1 - X(t_1,t_0)x_0\rangle}{\|B'(\cdot)X'(t_1,\cdot)p\|_{C[t_0,t_1]}}$$

Двойственная задача

Функция цены является выпуклой, сопряжённая к ней равна

$$V^*(t_0,p) = \varphi^*(X'(t_0,t_1)p) + \delta\Big(X'(t_0,t_1)p \;\Big|\; \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{[t_0,t_1]}}\Big)$$

где $\|p\|_{[t_0,t_1]} = \|B'(t)X'(t_1,\cdot)p\|_{C[t_0,t_1]}$.



Вычисление сопряжённой функции

$$V(t_0,x_0)=\inf_{x_1\in\mathbb{R}^n}\left\{\varphi(x_1)+\sup_{p\in\mathbb{R}^n}\frac{\langle p,x_1-X(t_1,t_0)x_0\rangle}{\|B'(\cdot)X'(t_1,\cdot)p\|_{C[t_0,t_1]}}\right\}.$$

$$V(t_0,x_0)=\inf_{x_1\in\mathbb{R}^n}\left\{\varphi(x_1)+\sup_{p\in\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{[t_0,t_1]}}}\langle p,x_1-X(t_1,t_0)x_0\rangle\right\}.$$

$$V(t_0,x_0)=\sup_{p\in\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{[t_0,t_1]}}}\inf_{x_1\in\mathbb{R}^n}\{\varphi(x_1)+\langle p,x_1\rangle-\langle p,X(t_1,t_0)x_0\rangle\}.$$

$$V(t_0,x_0)=\sup_{p\in\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{[t_0,t_1]}}}\{-\varphi^*(-p)-\langle p,X(t_1,t_0)x_0\rangle\}.$$

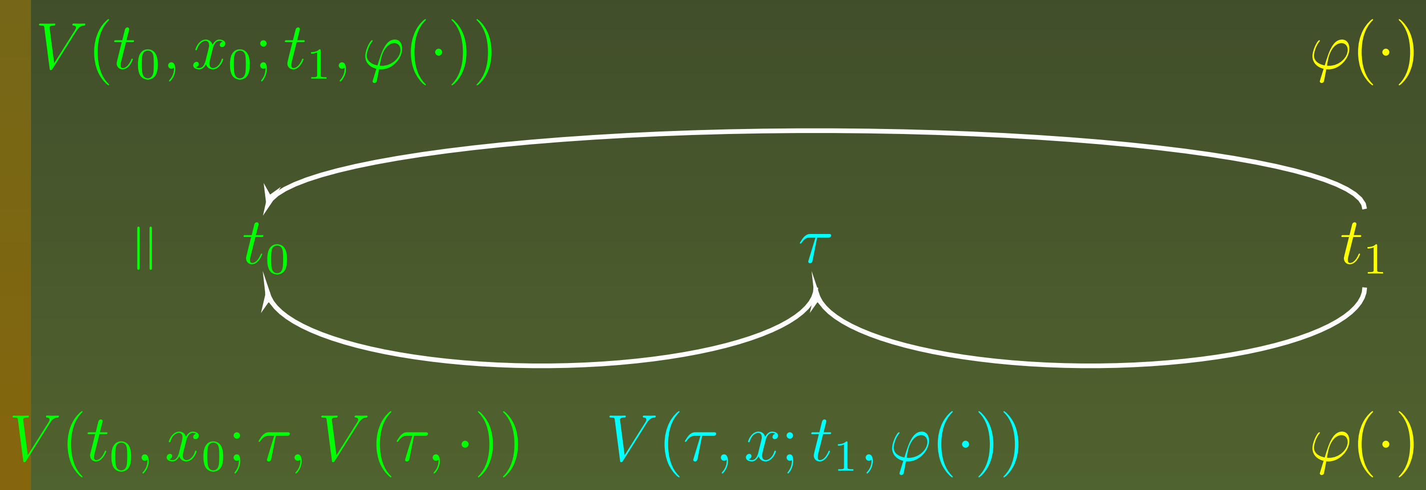
$$V(t_0,x_0)=\sup_{p\in\mathbb{R}^n}\left\{\varphi^*(p)-\langle p,X(t_1,t_0)x_0\rangle-\delta\left(p\;\middle|\;\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{[t_0,t_1]}}\right)\right\}.$$

Принцип оптимальности

Функция цены $V(t, x; t_1, \varphi(\cdot))$ удовлетворяет принципу оптимальности

$$V(t_0, x_0; t_1, \varphi(\cdot)) = V(t_0, x_0; \tau, V(\tau, \cdot; t_1, \varphi(\cdot))),$$

где $\tau \in [t_0, t_1]$.



Принцип оптимальности II

В общем случае $V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)) \leqslant \varphi(x)$, так как

$$V^*(t_1, p) = \varphi^*(p) + \delta(\,B(t_1)p \mid \mathcal{B}_1).$$

Например, если $\varphi(x) = \delta(\,x \mid \{x_1\})$ и $B(t_1) = I$, то

$$V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \|x - x_1\|.$$

Однако, в силу принципа оптимальности,

$$V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)) = V(t_1, x; t_1, V(t_1, \cdot; t_1, \varphi(\cdot))).$$

Уравнение Беллмана

Функция цены является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\min\left\{H_1(t,x,V_t,V_x),\ H_2(t,x,V_t,V_x)\right\} = 0,$$

$$V(t_1,x) = V(t_1,x;t_1,\varphi(\cdot)).$$

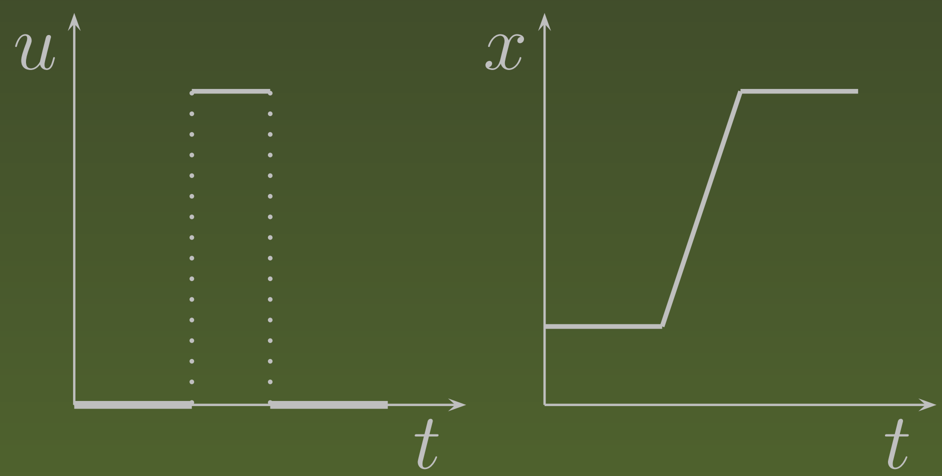
$$H_1(t,x,\xi_t,\xi_x) = \xi_t + \langle \xi_x, A(t)x\rangle,$$

$$H_2(t,x,\xi_t,\xi_x) = \min_{u\in S_1}\langle \xi_x, B(t)u\rangle + 1 = -\left\|B^T(t)\xi_x\right\| + 1.$$

Структура управления

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
H_1(t,x)=0 \arrow[d] & (t,x) \arrow[l] \arrow[r] & H_2(t,x)=0 \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{ждать}\\ dU(t)=0\end{array} & & \begin{array}{c}\text{выбрать направление скачка}\\ d=-B'(t)V_x\end{array} \arrow[d] \\
& & \begin{array}{c}\text{выбрать величину скачка}\\ \min\alpha\geqslant 0 : H_1(t,x+\alpha d)=0\end{array} \arrow[d] \\
& & \begin{array}{c}\text{скачок}\\ U(\tau)=\alpha\cdot d\cdot\chi(\tau-t)\end{array}
\end{tikzcd}
$$

Реалистичная схема



Дополнительное ограничение

Введём ограничение на норму управления, $u(t) \in \mathcal{B}_\mu$, и рассмотрим соответствующую задачу:

Задача 2. Минимизировать

$$J_\mu(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\| \, \mathrm{d}t + \varphi(x(t_1)) \to \inf,$$

по функциям $u(\cdot) \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ при условии

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\|u(t)\| \leqslant \mu.$$

Функция цены

Минимальное значение $J_\mu(U(\cdot))$ при фиксированной начальной позиции $x(t_0) = x_0$ называется функцией цены:

$$V_\mu(t_0, x_0) = V_\mu(t_0, x_0; t_1, \varphi(\cdot)).$$

Функция цены в задаче 2 является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (Г–Я–Б)

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial t} + \min_{u \in \mu \mathcal{B}_1} \left\{ \left\langle \frac{\partial V_\mu}{\partial x}, A(t)x(t) + B(t)u \right\rangle + \|u\| \right\} = 0,$$

$$V_\mu(t_1, x) = \varphi(x).$$

Вычисление функции цены

Функция цены задачи 2 равна

$$V_\mu(t,x) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\Big\{\langle p, X(t_1,t_0)x_0\rangle -$$

$$-\,\mu\int_t^{t_1}\left(\|B'(\tau)X'(t_1,\tau)p\| - 1\right)_+ \mathrm{d}\tau - \varphi^*(p)\Big\},$$

а её сопряжённая по переменной x —

$$V_\mu^*(t,p) = \varphi^*(p) + \mu\int_t^{t_1}\left(\|B'(\tau)X'(t_1,\tau)p\| - 1\right)_+ \mathrm{d}\tau.$$

Сходимость V_μ

При $\mu \to \infty$

$$V_\mu(t,x) \to V(t,x), \quad V_\mu^*(t,x) \to V^*(t,x).$$

При некоторых предположениях

$$0 \leqslant V_\mu(t,x) - V(t,x) = O(\mu^{-1}).$$

Уравнение Г–Я–Б для задачи 1 может быть формально получено в пределе при $\mu \to \infty$ для уравнения Г–Я–Б для задачи 2.

Синтез управлений

Оптимальный синтез управлений в задаче 2 состоит из минимизаторов в уравнении Г–Я–Б:

$$\mathcal{U}_\mu^*(t,x) = \begin{cases} \{0\}, & \|\zeta\| < 1; \\ [0, -\mu\zeta], & \|\zeta\| = 1; \\ \left\{-\mu\dfrac{\zeta}{\|\zeta\|}\right\}, & \|\zeta\| > 1, \end{cases} \qquad \zeta = B'(t)\frac{\partial V_\mu}{\partial x}$$

(в тех точках, где $V_\mu(t,x)$ дифференцируема по x).

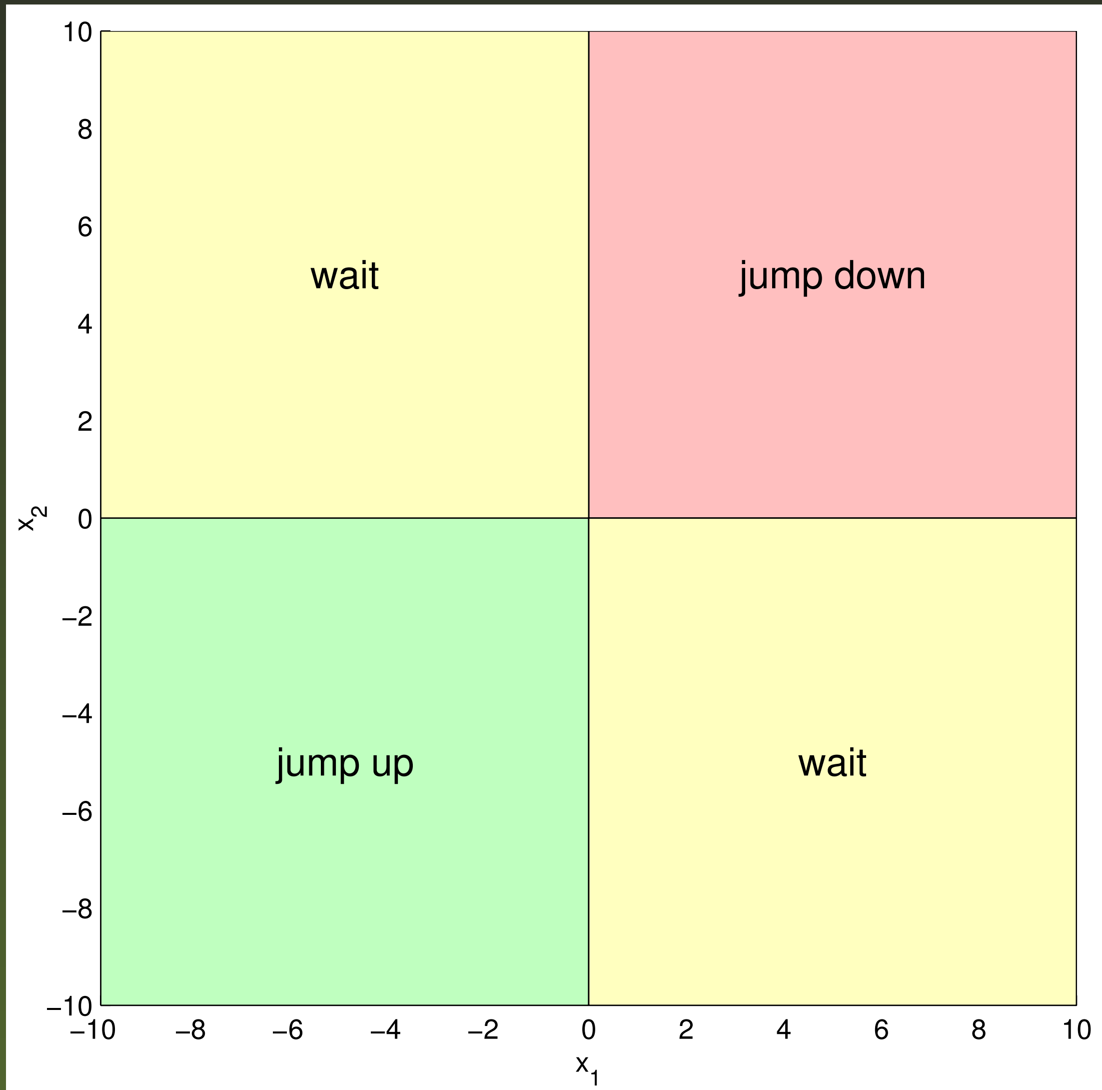
Пример: Задача

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1(t) = x_2(t)\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}x_2(t) = -x_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}U(t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{\pi}{2},$$

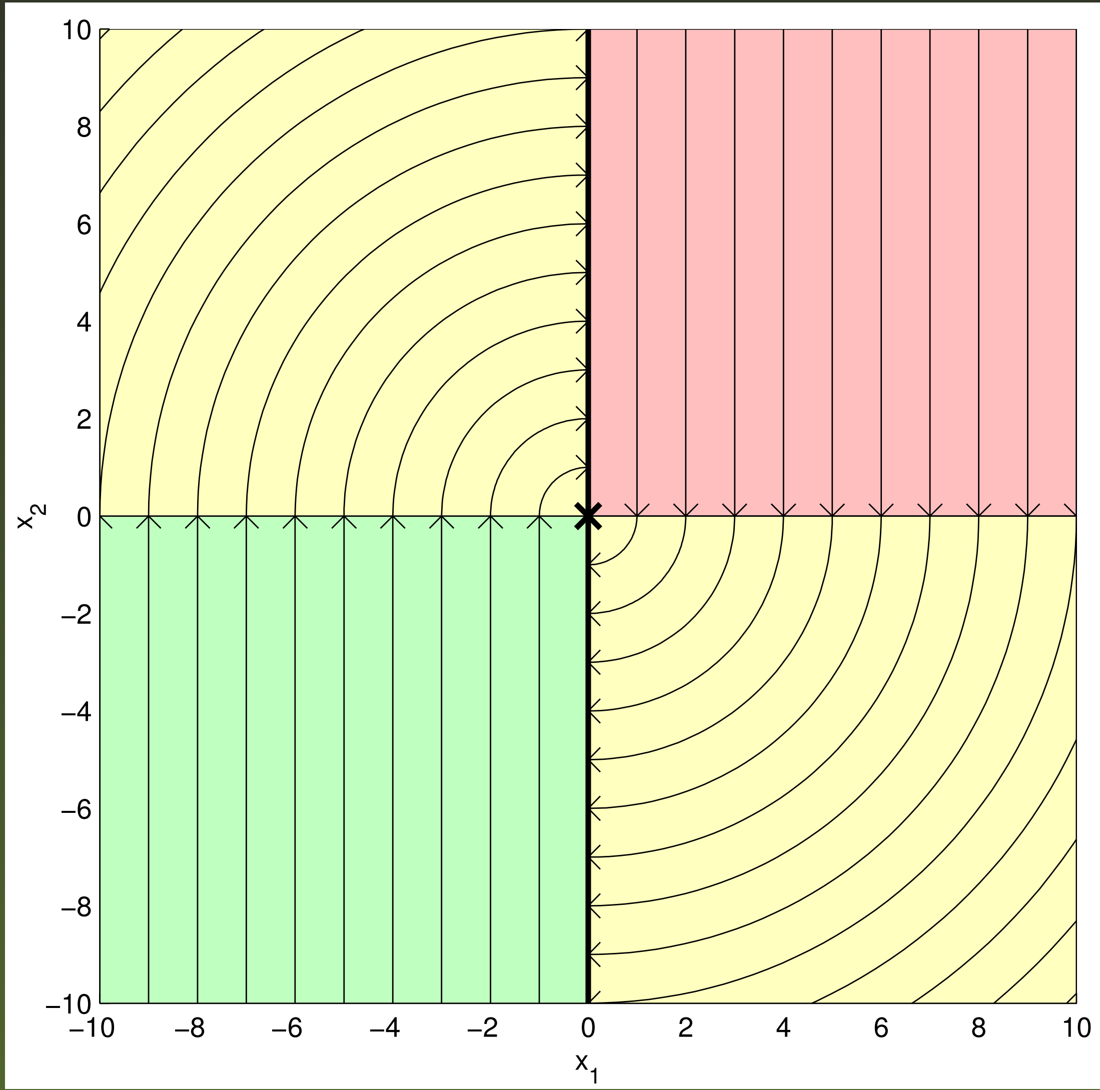
$$\operatorname*{Var}_{[0,\frac{\pi}{2}]} U(\cdot) \to \inf,$$

$$x_1(0-0) = x_1^0, \quad x_2(0-0) = x_2^0, \quad x_1(\tfrac{\pi}{2}+0) = 0, \quad x_2(\tfrac{\pi}{2}+0) = 0.$$

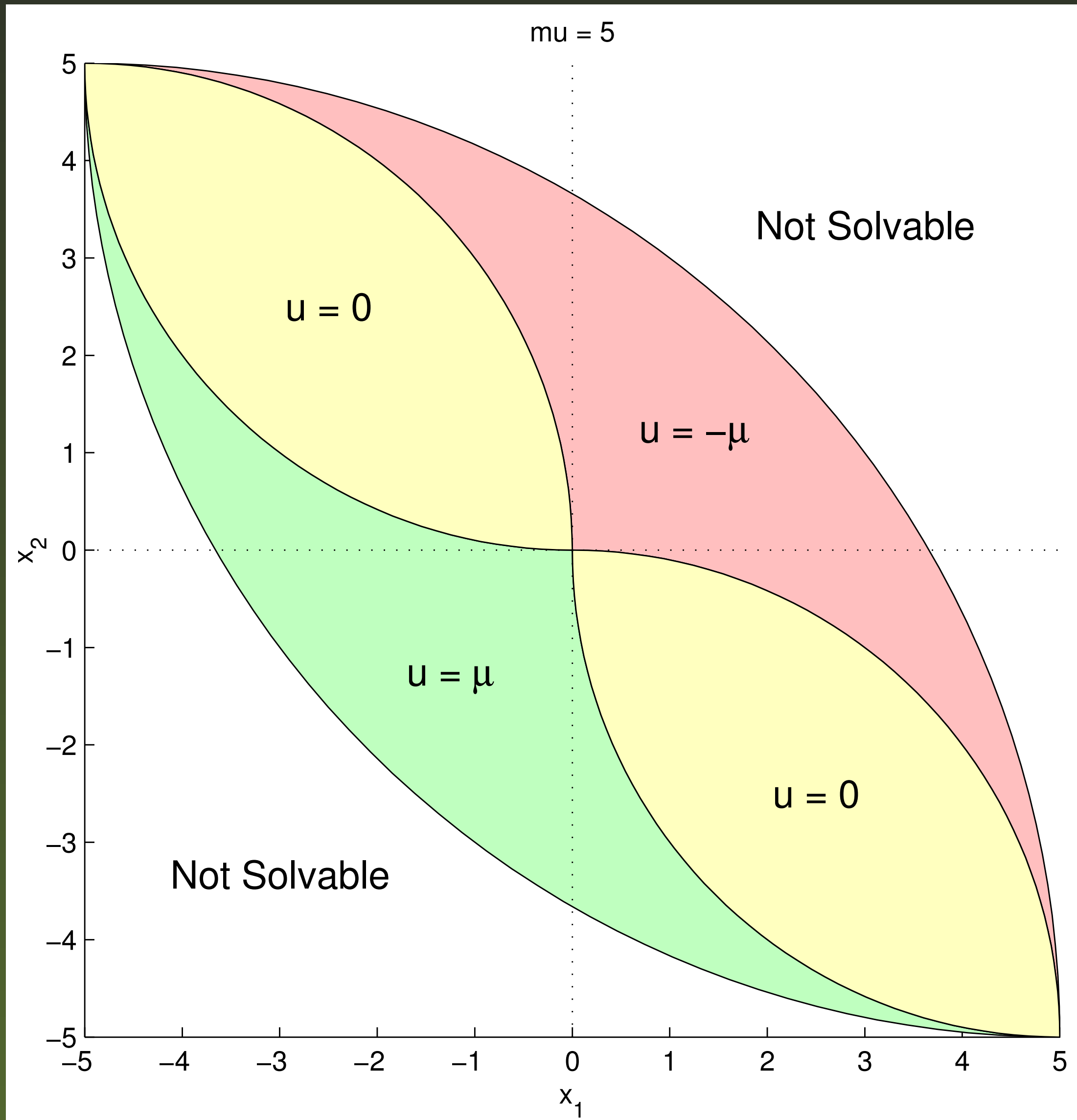
Пример: Идеальное управление



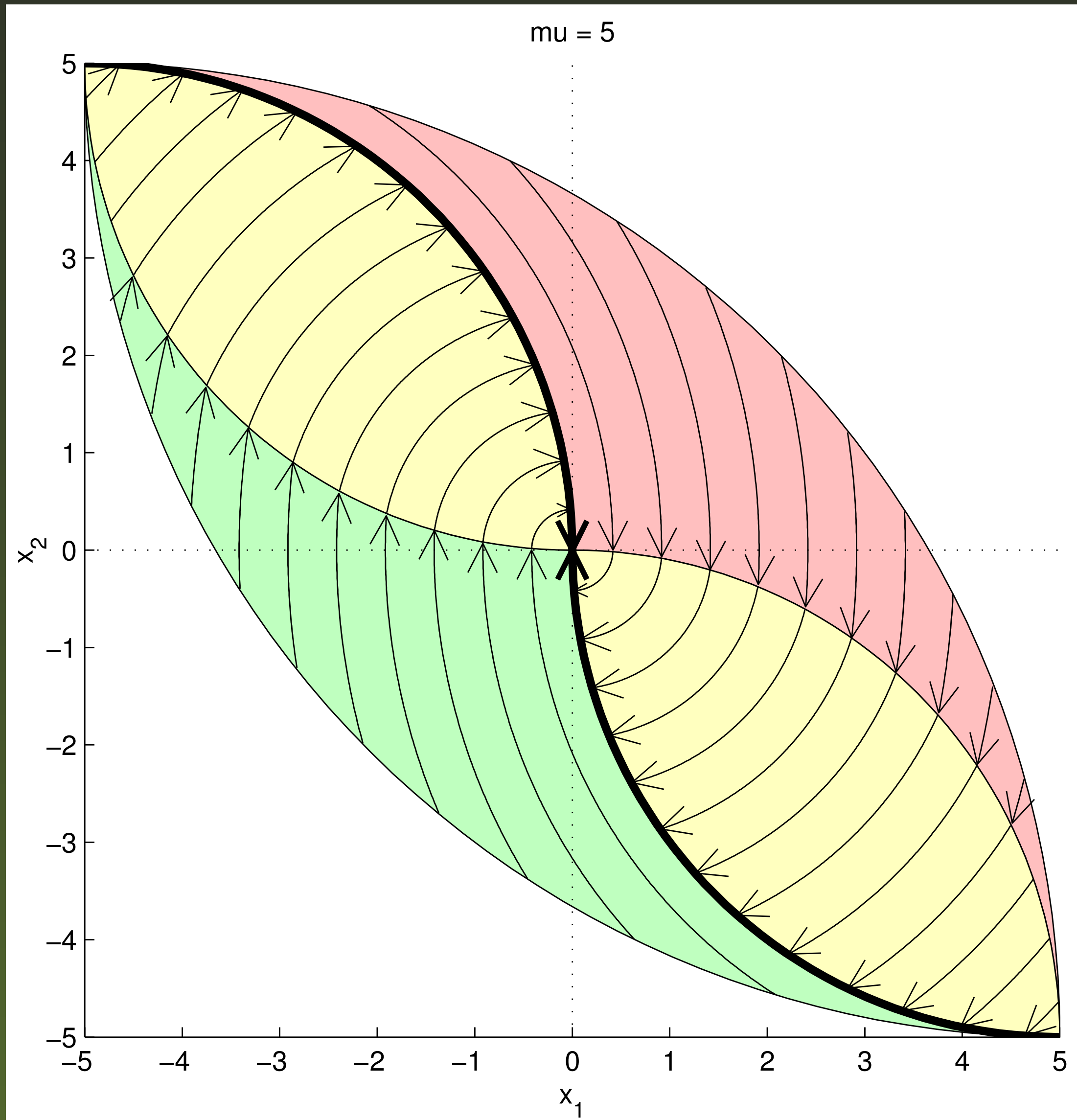
Пример: Идеальные траектории



Пример: Реалистичное управление



Пример: Реалистичные траектории



Пример: Сходимость