ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 15 № 1 2009

УДК 517.977

О ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ[1]

А. Н. Дарьин, И. А. Дигайлова, А. Б. Куржанский

В настоящей статье рассматривается задача *синтеза импульсных управлений* по результатам доступных наблюдений, подверженных помехам. Схема решения строится на основе методов динамического программирования, в форме аналогов уравнений гамильтонова формализма и решение представляет собой последовательность дельта-функций. В качестве информационного состояния системы рассмотрены множества фазовых векторов, совместимые с априорными данными и текущими измерениями. Модели наблюдения рассмотрены либо как непрерывные, с «неопределёнными» помехами, для которых статистическое описание отсутствует, либо как стохастические, дискретные, поступающие через коммуникационный канал связи в виде пуассоновского потока, с помехами, равномерно распределёнными на заданном множестве. Все результаты получены в рамках операций в конечномерном пространстве. Обсуждаются вычислительные схемы. Приведены примеры численного моделирования.

Введение

Задача синтеза управления по доступным измерениям при наличии шумов — одна из центральных в теории управления. Её изучение восходит к основополагающим статьям Н. Н. Красовского [1, 2], где были предложены как стохастические, так и детерминированные постановки. В данной работе, следующей схеме [3], рассмотрен подход, опирающийся на понятие информационного состояния, элементом которого является «информационное множество» фазовых векторов, совместимых с уравнениями движения, полученными измерениями и ограничениями на неопределённые помехи [4]. В общем случае такой подход предполагает рассмотрение задачи в метрическом пространстве компактных множеств, что требует преодоления определённых аналитических и вычислительных трудностей [5]. В связи со сказанным, в настоящей статье приводится задача управления по неполным данным для линейной системы, на примере которой предложено решение, доведённое до вычислительного алгоритма и просчитанных примеров для систем высокого порядка. В приведённой постановке имеется две особенности. Первая из них состоит в том, что при описании информационного состояния в виде множества рассмотрены два вида помех: «неопределённые» — неизвестные, но ограниченные, при заданным ограничении и отсутствии статистического описания, и «стохастические», когда при том же заданном ограничении дополнительно известно, что помеха случайна, с известной плотностью распределения (или с известным ограничением на эту плотность). Отмечено, что при помехах первого вида информационное множество стягивается в точку лишь в случае, когда реализуется «наилучшая» помеха, тогда как во втором случае, для каждого неизвестного начального условия системы существует свой конечный промежуток, за который многозначная оценка фазового вектора стягивается в малую окрестность точного состояния с заданной вероятностью. Указаны вычислительные схемы, основанные на эллипсоидальных аппроксимациях для неопределённой помехи и полиэдральных для стохастических. Вторая особенность рассматриваемой постановки состоит в том, что задача синтеза управления здесь рассматривается в классе импульсных воздействий. Приводятся условия, когда решение совокупной

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00589), программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4576.2008.1), научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № РНП 2.1.1.1714).

задачи управления достигается при помощи конечного числа импульсов. Полученные результаты допускают обобщение на более сложные модели наблюдений.

1. Задача синтеза импульсных управлений

1.1. Система управления

Рассмотрим задачу о синтезе импульсных управлений с критерием минимума обобщённого функционала типа Майера–Больца

$$J(U(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \to \inf, \tag{1.1}$$

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{1.2}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $U(\cdot) \in BV\left([t_0,t_1];\mathbb{R}^m\right)$ — обобщённое управление, $BV\left([t_0,t_1];\mathbb{R}^m\right)$ — пространство m-мерных функций с ограниченной вариацией (полагаем, что эти функции непрерывны слева). Напомним, что вариацией функции $U(\cdot)$ на отрезке $[t_0,t_1]$ называется число

$$\operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{N} \|U(\tau_{k+1}) - U(\tau_k)\| \,\middle|\, N \in \mathbb{N}, t_0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{N+1} \le t_1 \right\}.$$

Здесь и далее в данной статье $\|\cdot\|$ — евклидова норма (но может быть другой конечномерной нормой). Известные матричные функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ считаем непрерывными, конечный момент времени t_1 — фиксированным, линейную систему (1.2) — вполне управляемой. Терминальную функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ полагаем замкнутой и выпуклой.

Выбирая $\varphi(x) = I(x \mid \mathscr{M})$, а именно как индикаторную функцию[2] целевого множества $\mathscr{M}$, приходим к поиску управления минимальной вариации, приводящего систему в окрестность $\mathscr{M}$ в момент времени t_1.

Управления строятся на основе доступной информации, доставляемой измерениями:

$$y(t) = H(t)x(t) + \xi(t). \tag{1.3}$$

Здесь $\xi(t)$ — помеха, стеснённая ограничением $\xi(t) \in \mathscr{Q}(t) \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, где $\mathscr{Q}(t)$ — выпуклый компакт, непрерывный по t.

Заметим, что в рассматриваемой постановке измерения $y(t)$ — разрывные функции, даже если шумы непрерывны. Это связано с разрывной природой импульсных воздействий. Поэтому разобьём уравнение динамики на две части: одну — содержащую неопределённость, другую — содержащую управление.

Обозначим через $G(t,\tau)$ фундаментальную матрицу однородной системы, т.е. решение уравнения $\partial G(t,\tau)/\partial t = A(t)G(t,\tau)$, $G(\tau,\tau) = I$.

Представив переменную $x(t)$ как сумму

$$x(t) = G(t,t_1)x_1(t) + G(t,t_1)x_2(t), \tag{1.4}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют системе

$$\dot{x}_1(t) = 0, \tag{1.5}$$

$$dx_2(t) = B(t)dU(t), \quad x_2(t_0) = 0, \tag{1.6}$$

[2]Под $I(x \mid A)$ будем понимать индикаторную функцию выпуклого множества A (нуль на множестве A и $+\infty$ вне его).

перепишем уравнение измерений (1.3) в следующем виде:

$$y_1(t) = H(t)G(t,t_1)x_1(t) + \xi(t) = y(t) - H(t)G(t,t_1)x_2(t).$$

Заметим, что уравнение для $x_2(t)$ не содержит неопределённости, следовательно $x_2(t)$ можем считать полностью известно управляющему устройству. С другой стороны, уравнение для $x_1(t)$ не содержит управления, следовательно траектория $x_1(t)$ непрерывна в случае, если непрерывны шумы $\xi(t)$.

1.2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу синтеза в постановке, предложенной в [3], но теперь в классе импульсных управлений.

Определим вначале *состояние* системы (1.2), (1.3) как тройку $(t, y_{1,t}, x_2)$, где $y_{1,t}$ — история наблюдений $y_1(\tau)$ на промежутке $\tau \in [t_0, t]$.

Задача 1. *Для заданной терминальной функции $\varphi(\cdot)$ построить синтезированное управление вида $U(t, y_{1,t}, x_2)$, минимизирующее функционал $J(U(\cdot))$ при наличии неопределённости $\xi(\cdot)$:*

$$\mathscr{J}(U(\cdot)) = \max_{\xi(\cdot)} J(U(\cdot)).$$

Функция цены равна минимальному значению функционала при фиксированном начальном состоянии:

$$V(t, y_{1,t}, x_2) = \min \mathscr{J}(U(\cdot)).$$

Подобная постановка требует сохранения всей истории измерений $y_1(t)$. Последнее достигается следующим образом. Согласно [3], будем различать две задачи: задачу *гарантированного оценивания* текущего состояния, и задачу *синтеза управления в пространстве таких состояний.*

Пусть измерения поступают на промежутке $[t_0, t_1]$. Тогда под текущим *информационным состоянием* системы будем понимать тройку $\{t, \mathscr{X}_1[t], x_2(t)\}$, где $\mathscr{X}_1[t]$ — *информационное множество* всех фазовых векторов $x_1(t)$, совместимых с моделью системы, доступными измерениями $y_1(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, $t \le t_1$, и ограничениями $\mathscr{Q}$ на неизвестные шумы $\xi(\cdot)$.

Множество $\mathscr{X}_1[t]$ — решение задачи гарантированного оценивания [4, 6]. Здесь

$$\mathscr{X}_1[t] = \bigcap_{\tau \in [t_0, t]} H^{-1}(t)\left(y_1^*(\tau) - \mathscr{Q}(\tau)\right),$$

при заданных измерениях $y_1^*(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$.

Информационное множество может быть описано с помощью своей опорной функции. Для него имеется также и эволюционное уравнение.

Опорная функция[3] множества $\mathscr{X}_1[t]$ вычисляется с использованием методов выпуклого анализа (см. [7, 4, 3]). Заметим, что из уравнения измерения при $t = t_0$ следует включение

$$x_1(t_0) \in H^{-1}(t_0)(y_1^*(t_0) - \mathscr{Q}(t_0)) = \mathscr{X}_1^0.$$

Имеем

$$\rho(\ell \mid \mathscr{X}_1[t]) = \inf_{\lambda(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{t} \left(\langle \lambda(\tau), y_1^*(\tau)\rangle + \rho(-\lambda(\tau) \mid \mathscr{Q}(\tau))\right) d\tau \mid \psi(t) = \ell \right\}, \tag{1.7}$$

где вектор-строка ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot\psi = \lambda(t)H(t)$ при $\psi(t_0) = 0$.

[3]Опорная функция выпуклого множества A есть $\rho(\ell \mid A) = \max\{\langle \ell, x\rangle \mid x \in A\}$.

Если помехи и, следовательно, наблюдения достаточно гладкие, то $\mathscr{X}_1[t]$ может быть получено как решение *эволюционного уравнения*[4] [8]:

$$\lim_{\sigma\to 0+0}\sigma^{-1}h\big(\mathscr{X}_1[t+\sigma],\mathscr{X}_1[t]\cap H^{-1}(t)(y_1^*(t)-\mathscr{Q}(t))\big)=0. \tag{1.8}$$

Замечание 1. *В случае недостаточной гладкости помех множество $\mathscr{X}_1[t]$ является максимальным по включению решением эволюционного уравнения*

$$\lim_{\sigma\to 0+0}\sigma^{-1}h_+\big(\mathscr{X}_1[t+\sigma],\mathscr{X}_1[t]\cap H^{-1}(t)(y_1^*(t)-\mathscr{Q}(t))\big)=0.$$

Таким образом, помимо времени t, информационное состояние включает две составляющие: информационное множество $\mathscr{X}_1[t]$, не зависящее от управления, и вектор $x_2(t)$, которым необходимо управлять так, чтобы сумма $x_2(t)+\mathscr{X}_1[t]$ была приведена в минимальную окрестность целевого множества $\mathscr{M}$, при том что неуправляемая компонента $\mathscr{X}_1[t]$ оценивается по ходу процесса.

Имея информационное состояние вида $\{t,\mathscr{X}_1,x_2\}$ и следуя общей схеме решения задачи *управления по результатам измерений* далее следовало бы приступить к решению задачи управления в *метрическом пространстве* выпуклых компактов [9, 3]. Подобная ситуация может оказаться неизбежной, особенно для нелинейных систем. Она порождает весьма сложные бесконечномерные задачи. Однако цель данной работы состоит в том, чтобы указать на существование более простого решения, полученного в рамках методов конечномерных пространств. Для этого переформулируем задачу 1.

Задача 2. *Пусть задана позиция (информационное состояние) $\{t,\mathscr{X}_1,x_2\}$, $t\in[t_0,t_1]$. Найти синтезированное импульсное управление вида $U(t,\mathscr{X}_1,x_2)$, минимизирующее функционал*

$$\mathscr{J}(U(\cdot))=\max_{\xi(\cdot)}\left\{\operatorname*{Var}_{[t,t_1]}U(\cdot)+\varphi\left(\mathscr{X}_1[t_1]+x_2(t_1+0)\right)\right\},\qquad \varphi(\mathscr{X})=\max_{x\in\mathscr{X}}\varphi(x). \tag{1.9}$$

Минимальные значение функционала (1.9), вычисленные для каждого начального состояния $\{t,\mathscr{X}_1,x_2\}$, образуют функцию цены $\mathscr{V}(t,\mathscr{X}_1,x_2)$.

1.3. Решение Задачи 2

Обозначим через $V(t,x;t_1,\varphi(\cdot))$ функцию цены для задачи синтеза импульсного управления (см. [10, 11]) «из заданной точки», а именно

$$V(t,x)=V(t,x;t_1,\varphi(\cdot))=\min_{U(\cdot)}\Big\{\operatorname*{Var}_{[t,t_1]}U(\cdot)+\varphi(x(t_1+0))\;\Big|\;x(t)=x,\ dx(\tau)=B(\tau)dU(\tau)\Big\}. \tag{1.10}$$

Оценим минимальное значение функционала $\mathscr{V}(t,\mathscr{X}_1,x_2)$ для задачи 2. С этой целью заметим, что информационное множество $\mathscr{X}_1[t_1]$ в конечный момент времени t_1 обязательно будет подмножеством начального информационного множества $\mathscr{X}_1[t]$. Следовательно, если в (1.9) заменить $\mathscr{X}_1[t_1]$ на $\mathscr{X}_1[t]$, то значение $\mathscr{J}(U(\cdot))$ только увеличится, поскольку максимум будет браться по большему множеству. Имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(t,\mathscr{X}_1,x_2)&=\min_{U(\cdot)}\mathscr{J}(U(\cdot))\le\\ &\le\min_{U(\cdot)}\left\{\operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]}U(\cdot)+\varphi\left(\mathscr{X}_1+x_2+\int_t^{t_1+0}B(\vartheta)dU(\vartheta)\right)\right\}=V(t,x_2;t_1,\boldsymbol{\varphi}(\cdot)),\end{aligned}$$

[4] Здесь под $h(A,B)$ понимается хаусдорфово расстояние между двумя компактами: $h(A,B)=\max\{h_+(A,B),h_-(A,B)\}$, $h_+(A,B)=\min\{\varepsilon\mid A\subseteq B+\varepsilon\mathscr{B}_1\}$, $h_-(A,B)=h_+(B,A)$.

где
$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \max_{z\in\mathscr{X}_1} \varphi(x+z). \tag{1.11}$$

В частности, если $\varphi(x) = I(x \mid \mathscr{M})$, то
$$\boldsymbol{\varphi}(x) = I(x \mid \mathscr{M} \dot{-} \mathscr{X}_1).$$

Здесь под $\dot{-}$ понимается геометрическая разность (Минковского) двух выпуклых множествам:
$$A \dot{-} B = \{x \mid B + x \subseteq A\}.$$

Функция цены $V(t,x)$ — решение следующего вариационного неравенства типа Гамильтона–Якоби–Беллмана [11]:
$$\min\{H_1(t,x,V_t,V_x),\ H_2(t,x,V_t,V_x)\} = 0, \tag{1.12}$$

с начальным условием
$$V(t_1,x) = V(t_1,x;t_1,\varphi(\cdot))$$

и гамильтонианами
$$H_1(t,x,V_t,V_x) = V_t, \quad H_2(t,x,V_t,V_x) = \min_{u\in S(0)} \langle V_x, B(t)u\rangle + 1.$$

Здесь $S(0)$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

Согласно (1.12), для любой позиции (t,x) есть две возможности: либо $H_1 = 0$, и можем выбрать управление $dU(t) = 0$, либо $H_1 > 0$. В последнем случае гарантировано, что $H_2 = 0$, и управление имеет скачок в направлении $-B'(t)V_x$. Величина скачка выбирается таким образом, чтобы после него опять стало $H_1 = 0$.

Приведём теперь строгое определение траекторий синтезированной системы. Поскольку управление входит лишь в уравнение (1.6), можем считать многозначную функцию $\mathscr{X}_1[t]$ известной (отметим, что это делается уже после того как построен синтез управлений).

Введём дополнительное ограничение на управление:
$$\left\|\frac{dU}{dt}\right\| \leq \mu.$$

Это неравенство следует интерпретировать как ограничение на обобщённую производную функции U, при этом имеется в виду конечномерная норма, использованная в определении вариации $\operatorname{Var} U(\cdot)$ m-мерной функции U. Тогда можно перейти от управления $U(t)$ к его производной $u(t)$, которая уже не будет содержать дельта-функций. Получаем задачу минимизации функционала
$$\mathscr{J}_\mu(u(\cdot)) = \max_{\xi(\cdot)} \left\{ \int_t^{t_1} \|u(\tau)\|\,d\tau + \varphi\left(\mathscr{X}_1[t_1] + x_2(t_1+0)\right) \right\}. \tag{1.13}$$
в силу системы $\dot{x}_2(t) = B(t)u(t)$, $x_2(t) = x_2$, при ограничении $\|u(t)\| \leq \mu$.

Минимальное значение функционала (1.13) обозначим $\mathscr{V}_\mu(t,\mathscr{X}_1,x_2)$. Рассуждая аналогичным образом, получаем оценку
$$\mathscr{V}_\mu(t,\mathscr{X}_1,x_2) \leq V_\mu(t,x_2;t_1,\boldsymbol{\varphi}(\cdot)),$$

где V_μ — функция цены в задаче управления с двойным ограничением [10]:
$$V_\mu(t,x) = V(t,x;t_1,\varphi(\cdot)) = \min_{\|u(\cdot)\|\leq\mu} \left\{ \int_t^{t_1} \|u(\tau)\|\,d\tau + \varphi(x(t_1+0)) \;\Big|\; x(t) = x,\ \dot{x}(\tau) = B(\tau)u(\tau) \right\}.$$

Она является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial t} + \min_{\|u\|\le\mu}\left\{\left\langle \frac{\partial V_\mu}{\partial x}, B(t)u\right\rangle + \|u\|\right\} = 0 \tag{1.14}$$

с краевым условием $V_\mu(t_1, x) = \varphi(x)$. Кроме того, $V_\mu(t,x) \to V(t,x)$ при $\mu \to \infty$.

Определим стратегию управления $\mathscr{U}_\mu(t, \mathscr{X}_1, x_2)$ как множество минимизаторов в (1.14):

$$\mathscr{U}_\mu(t,\mathscr{X}_1,x_2) = \begin{cases} \{0\}, & \|\zeta\| < 1; \\ [0, -\mu\zeta], & \|\zeta\| = 1; \\ \{-\mu\zeta/\|\zeta\|\}, & \|\zeta\| > 1, \end{cases} \quad \zeta = \zeta(t,\mathscr{X}_1,x_2) = B^T(t)\frac{\partial V_\mu}{\partial x}(t, x_2; t_1, \boldsymbol{\varphi}(\cdot)). \tag{1.15}$$

Стратегия (1.15) удовлетворяет, вследствие полунепрерывности сверху функции $\mathscr{U}_\mu$ как по x_2, так и по $\mathscr{X}_1$, модификации теоремы существования и продолжаемости траекторий дифференциального включения [12]

$$\dot{x}_2(t) \in B(t)\mathscr{U}_\mu(t, \mathscr{X}_1[t], x_2(t)), \qquad x_2(t_0) = 0. \tag{1.16}$$

Определение 1. *Функция ограниченной вариации $x_2(t)$ является траекторией синтезированной системы, если найдётся последовательность траекторий дифференциального включения $x_2(t;\mu_n)$, $\mu_n \to \infty$, слабо* сходящаяся к $x_2(t)$.*

1.4. Вычисление функции цены $V(t,x)$

Укажем, каким образом может быть вычислена функция цены $V(t,x)$ [10]. Эта функция представима в виде

$$V(t,x) = \inf_{x_1\in\mathbb{R}^n}\{\varphi(x_1) + W(t,x;t_1,x_1)\}, \tag{1.17}$$

где $W(t,x;t_1,x_1)$ — минимальная вариация импульсного управления, переводящего систему вида (1.6) из состояния (t,x) в состояние (t_1,x_1). Она может быть найдена по формуле [13]

$$W(t,x;t_1,x_1) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\frac{\langle p, x_1 - x\rangle}{\|B^T(\cdot)p\|_{C[t,t_1]}}. \tag{1.18}$$

Введём норму в пространстве $\mathbb{R}^n$ соотношением

$$\|p\|_{[t,t_1]} = \left\|B^T(\cdot)p\right\|_{C[t,t_1]} = \max_{\tau\in[t,t_1]}\left\|B^T(\tau)p\right\| \tag{1.19}$$

(аксиомы нормы выполняются как следствие полной управляемости исходной системы). Тогда можно записать (1.18) в виде

$$W(t,x;t_1,x_1) = \sup_{p\in\mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}}\langle p, x_1 - x\rangle, \tag{1.20}$$

где $\mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}$ — единичный шар в указанной норме. Имеем из (1.17), (1.20)

$$V(t,x) = \inf_{x_1\in\mathbb{R}^n}\sup_{p\in\mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}}\{\varphi(x_1) + \langle p, x_1 - x\rangle\}.$$

Применяя здесь теорему о минимаксе [14] для перестановки inf и sup, получаем

$$V(t,x) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\left[\langle p,x\rangle - \varphi^*(p) - I\left(p \mid \mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}\right)\right] = \sup\left[\langle p,x\rangle - \varphi^*(p) \;\middle|\; p\in\mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}\right]. \tag{1.21}$$

Здесь φ^* — сопряжённая по Фенхелю для φ [7]. Несложно проверить, что функция (1.21) удовлетворяет вариационному неравенству (1.12).

Замечание 2. *Для вычисления* (1.21), *заменим максимум по* $[t, t_1]$ *в* (1.19) *на максимум по конечному числу моментов времени и условие* $\left\|B^T(\tau)p\right\| \leq 1$ *(для каждого из этих моментов) на конечное число линейных неравенств типа* $\left\langle \ell_i, B^T(\tau)p \right\rangle \leq 1$ *(для векторов* ℓ_i, $i = \overline{1, N}$, *из единичной сферы). Тогда приходим к конечномерной задаче оптимизации с конечным числом линейных ограничений (см. [11]), для решения которой существуют эффективные алгоритмы [15].*

Суммируя сказанное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Верхней оценкой минимального значения функционала* $\mathscr{J}(U(\cdot))$ *в задаче 2 является функция цены* $V(t, x)$ *обычной задачи импульсного управления* (1.10), *с терминальным функционалом* (1.11). *В свою очередь, функция цены* $V(t, x)$ *есть решение вариационного неравенства типа ГЯБ* (1.12).

Последнее позволяет построить синтез управлений, если вычислена функция цены $V(t, x)$. При этом число импульсов в реализации синтезированного управления будет зависеть от поведения помехи.

Замечание 3. *Описанное решение требует непрерывного пересчёта функции цены для задачи импульсного управления по ходу процесса на основе оценки* $\mathscr{X}_1$ *и значения вектора* x_2. *Однако можно предложить схему, когда пересчёт осуществляется лишь в некоторые моменты времени* τ_i, *например, когда размер информационного множества* $\mathscr{X}_1[t]$ *уменьшается по сравнению с предыдущим таким моментом в определённое количество раз. При этом, вычислив функцию цены в момент времени* τ_i *с терминальным функционалом*

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = I\left(x \mid \mathscr{M} \dot{-} \mathscr{X}_1[\tau_i]\right),$$

далее на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ *будем полагать ее неизменной.*

Замечание 4. *Известно [13, 16], что если неопределённость в системе отсутствует, то существует оптимальное управление, которое может быть представлено в виде суммы не более чем* n *импульсов.*

Однако в рассматриваемой здесь задаче как множество $\mathscr{X}_1[t]$, *так и функционал* $\boldsymbol{\varphi}(x)$ *изменяются по ходу процесса. Следовательно необходимое число импульсных воздействий не может быть указано заранее и может превышать* n.

Но если воспользоваться схемой предыдущего замечания, т.е. пересчитывать информационное множество лишь в моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_m$, *то можно гарантировать существование реализации управления из не более, чем из* $m \cdot n$ *импульсов.*

Для завершения решения Задачи 2 требуется вычислить терминальную функцию $\boldsymbol{\varphi}(x)$. Последняя является индикаторной функцией выпуклого множества $\mathscr{M} \dot{-} (\mathscr{X}_1[\tau_i] + x_2(\tau_i))$. Следовательно, ему необходимо дать надлежащее описание.

Задание множества в виде выпуклой оболочки набора точек или значениями его опорной функции на некоторой сетке направлений требуется чрезвычайно большого объёма информации в случае высоких размерностей, при том, что соответствующие вычисления несут высокую вычислительную нагрузку. Для преодоления этих трудностей оценим информационное множество внешним множеством простой структуры, а именно эллипсоидом.

1.5. Эллипсоидальные аппроксимации

Эллипсоид [17] $\mathscr{E}(r, R)$ с центром $r \in \mathbb{R}^n$ и матрицей конфигурации $R \geq 0$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — выпуклое множество, опорная функция которого имеет вид

$$\rho(p \mid \mathscr{E}(r, R)) = \langle p, r \rangle + \langle p, Rp \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Собственные векторы матрицы R являются направлениями осей эллипсоида, а соответствующие собственные числа — квадратами длин полуосей. Если матрица R невырождена, то

$$\mathscr{E}(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle x - r, R^{-1}(x - r) \right\rangle \leq 1\}.$$

Заметим, что для описания одного эллипсоида в n-мерном пространстве требуется порядка $\frac{n^2}{2}$ чисел.

Предположим, что множества $\mathscr{Q}(t)$ и $\mathscr{M}$ — эллипсоиды:

$$\mathscr{Q}(t) = \mathscr{E}(q(t), Q(t)), \qquad \mathscr{M} = \mathscr{E}(m, M)$$

с известными параметрами $q(t), m \in \mathbb{R}^n$ и $Q(t), M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

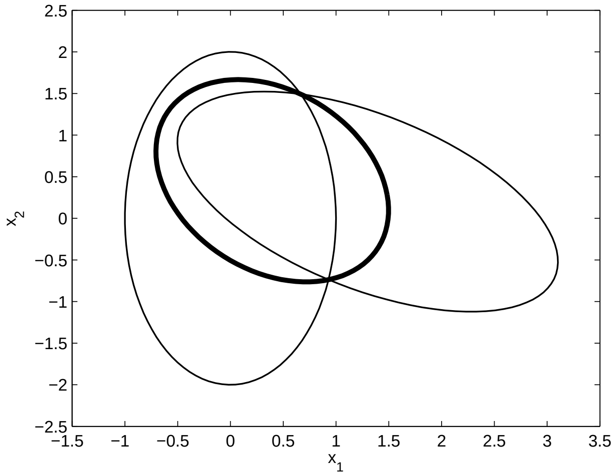

Рис. 1. Эллипсоидальная аппроксимация пересечения двух эллипсоидов

Представим оценку $\mathscr{X}_1[t]$ через его внешнюю эллипсоидальную аппроксимацию $\mathscr{Y}_+(t) = \mathscr{E}(\eta(t), Y(t))$. Для её построения перейдём к дискретному аналогу (1.8) и применим формулу построения внешней аппроксимации пересечения двух эллипсоидов (см. [18, 19]). Пример эллипсоида, найденного по этой формуле, приведён на рис. 1. В результате получаем:

$$Y(t + \Delta t) = \alpha Z^{-1},$$
$$\eta(t + \Delta t) = Z^{-1}(\pi W_1 q_1 + (1 - \pi) W_2 q_2),$$

где

$$Z = \pi W_1 + (1 - \pi) W_2,$$
$$W_1 = Y^{-1}(t), \quad W_2 = H^T(t) Q^{-1}(t) H(t),$$
$$q_1 = \eta(t), \quad q_2 = H^{-1}(t)(y(t) - q(t)),$$
$$\alpha = 1 - \pi(1 - \pi) \left\langle q_2 - q_1, W_2 Z^{-1} W_1 (q_2 - q_1) \right\rangle,$$

где параметр π находится численно из уравнения

$$\alpha(\det Z)^2 \operatorname{tr}(Z^{-1}(W_1 - W_2)) - \eta(\det Z)^2 \big(2 \langle \eta(t+\Delta t), W_1 q_1 - W_2 q_2 \rangle + \langle \eta(t+\Delta t), (W_2 - W_1)\eta(t+\Delta t) \rangle - \langle q_1, W_1 q_1 \rangle + \langle q_2, W_2 q_2 \rangle\big) = 0.$$

Далее находим внутреннюю эллипсоидальную аппроксимацию множества $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \dot{-} \mathscr{Y}_+(t)$, а именно $\mathscr{M}'_- = \mathscr{E}\,(m', M')$ с параметрами

$$m' = m - \eta(t), \qquad M' = \left(1 - \left(\frac{\langle \ell, M\ell \rangle}{\langle \ell, Y\ell \rangle}\right)^{\frac{1}{2}}\right) M + \left(1 - \left(\frac{\langle \ell, Y\ell \rangle}{\langle \ell, M\ell \rangle}\right)^{\frac{1}{2}}\right) Y,$$

где ℓ — «хорошее» направление [17].

Наконец, используем эллипсоид $\mathscr{E}\,(m', M')$ в качестве целевого множества для функции цены в задаче синтеза импульсного управления. Для этого выберем в качестве терминальной функции опорную функцию множества $\mathscr{M}'_-$, а именно положим

$$\boldsymbol{\varphi}^*(p) = \left\langle p, m' \right\rangle + \left\langle p, M'p \right\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

2. Синтез управлений при коммуникационных ограничениях

Возвращаясь к системе (1.5), (1.6), при $t \in [t_0, \vartheta]$, положим, что измерения поступают в дискретные моменты времени, согласно уравнению

$$y(\tau_i) = Hx_1(\tau_i) + \xi(\tau_i), \qquad i = \overline{1,k},$$

где $y(\tau_i), x_1(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k \le \vartheta$ и помехи $\xi(\tau_i)$ для каждого момента времени i равномерно распределены на множестве

$$\mathscr{Q} = \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta_\ell| \le \nu,\ \ell = \overline{1,n}\}.$$

Кроме того, моменты поступления измерений τ_i будем считать случайными, распределёнными по пуассоновскому закону[5] [20] с заданным параметром λ.

Задача 3. *Найти интервал времени длины $\vartheta - t_0$ и управляющую стратегию $U = U(t, \mathscr{X}_1, x_2)$, удовлетворяющие условию $\operatorname*{Var}_{[t_0,\vartheta]} U(\cdot) \le \mu$, так, чтобы задача синтеза импульсного управления, в заданном классе наблюдений, при условии*

$$\min_U \|x_1(\vartheta) + x_2(\vartheta)\| \le \gamma \tag{2.22}$$

была разрешима с вероятностью $P^0 \ge 1 - \varepsilon$, где γ и $\varepsilon > 0$ заданы заранее.

Чтобы обеспечить выполнение неравенства (2.22), должно выполняться включение

$$x_2(\vartheta) + \mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq \gamma\mathscr{C}(0),$$

где $\mathscr{C}(0)$ — единичный куб $\mathbb{R}^n$ с центром 0.

Для этого должен существовать такой вектор x_1^*, для которого

$$x_2(\vartheta) = -x_1^*, \qquad \mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq x_1^* + \mathscr{C}(0)$$

Таким образом, задача 3 при заданных γ и ε может быть разбита на две:

[5]Как правило для моделирования передачи коммуникационных сигналов в дискретном времени используется именно пуассоновское распределение.

Задача 4. *Найти ϑ, которое обеспечивает включение $\mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq \gamma\mathscr{C}(0)+x_1^*$ для некоторого x_1^* с вероятностью $P^0 \geq 1-\varepsilon$.*

Задача 5. *Обеспечить выполнение условия $x_2(\vartheta) = -x_1^*$.*

При фиксированных x_1^* и ϑ, вторая задача может быть решена методом, предложенным в работе [11]. Поэтому остановимся подробнее на Задаче 4.

Для неизвестных $x_1(t) = c = \text{const}$ и $\mathscr{Q} = -\mathscr{Q}$ будем иметь

$$c \in \bigcap_{i=1}^{k} H^{-1}(y(t_i)+\mathscr{Q}) = c^* + \mathscr{R}(k,\vartheta), \qquad \mathscr{R}(k,\vartheta) = \bigcap_{i=1}^{k} H^{-1}(\xi^*(t_i)+\mathscr{Q}), \quad \vartheta > t_k,$$

где $\xi^*(t_i)$ — реализовавшаяся в i-й момент времени помеха наблюдения $\xi(t_i)$, c^* — истинное значение параметра c, $\mathscr{R}(k,\vartheta)$ — ошибка после k измерений.

Дальнейшей целью будет добиться выполнения включения

$$\mathscr{R}(k,\vartheta) \subseteq \gamma\mathscr{C}(0) \tag{2.23}$$

с заданной заранее вероятностью $P_0 > 1-\epsilon$.

Используя схему статей [21, 22], можно получить решение этой задачи в явном виде. У куба $\mathscr{Q}$ имеется 2^n вершин. Тогда, если помеха $\xi(t_i)$, $i=\overline{1,k}$, пробежит по малым окрестностям $\mathscr{D}(v_m,\sigma)$ всех вершин[6] v_m, $m = \overline{1,2^n}$, то получим

$$\mathscr{R}(k,\vartheta) \subset \mathscr{D}(0,\sigma)$$

и объём $V_{\mathscr{R}}(k,\vartheta)$ множества $\mathscr{R}(k,\vartheta)$ устремится к нулю при малых σ, а именно:

$$V_{\mathscr{R}}(k,\vartheta) \leq (2\sigma)^n \to 0.$$

Замечание 5. *Отметим, что тот же вывод остаётся справедливым, если помеха ξ пробежит лишь через окрестности $n+1$ вершин, образующих симплекс: $v_1 = (-\nu,-\nu,\ldots,-\nu)$, $v_2 = (\nu,-\nu,-\nu,\ldots,-\nu)$, $v_3 = (-\nu,\nu,-\nu,\ldots,-\nu)$, и т.д., $v_{n+1} = (-\nu,-\nu,\ldots,-\nu,\nu)$.*

Для каждой из вершин v_j, $j=\overline{1,n+1}$, вероятность включения $\xi(t_i) \in \mathscr{R}(k,\vartheta)\cap\mathscr{D}(v_j,\sigma)$ после k измерений равна $P(\sigma,k,v_j) = 1-(1-\sigma^n\nu^{-n})^k$, а вероятность аналогичных включений для всех вершин симплекса равна

$$P(\sigma,k) = (1-(1-\sigma^n\nu^{-n})^k)^{n+1}.$$

При фиксированном n видно, что $\lim_{k\to\infty} P(\sigma,k) = 1$ для произвольного $\sigma > 0$.

Следовательно, необходимо выбрать число $\sigma = \sigma^0$ достаточно малым для обеспечения (2.23) и число $k = k^0$, гарантирующее

$$P(\sigma^0,k^0) \geq 1-\delta. \tag{2.24}$$

Тогда очевидно, что $\mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq x_1^*(\vartheta)+\mathscr{D}(0,\sigma^0)$ для некоторого вектора $x_1^*(\vartheta)$, который может быть определён из формулы[7] 1.2)

$$\rho(\ell \mid \mathscr{X}_1[\tau_k]) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{k}\Big\langle \ell^{(i)}, y^*(\tau_i)\Big\rangle + \rho(-\ell^{(i)} \mid \mathscr{Q}) \;\Big|\; \ell^{(i)} \in \mathbb{R}^n, i=\overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k}\ell^{(i)} = \ell\Big\}.$$

[6]Здесь мы рассматриваем n-мерные кубы как окрестности $\mathscr{D}(v_m,\sigma)$ с центром v_m и рёбрами длины 2σ.

[7]Далее в замечании 6 мы укажем как найти $x_1^*(\vartheta)$ из этих соотношений.

(дискретного аналога формулы (1.7) для $\rho(\ell \mid \mathscr{X}_1[\vartheta])$).

Однако для того чтобы поступило k^0 измерений, интервал времени должен быть достаточно большим. Из свойств пуассоновского распределения с частотой λ вытекает, что вероятность $P(k, \vartheta - t_0)$ поступления k измерений на интервале $[t_0, \vartheta]$ даётся соотношением [20]

$$P(k, \vartheta - t_0) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda(\vartheta - t_0))^j}{j!} \exp(-\lambda(\vartheta - t_0)).$$

Тогда, что для любого k будем иметь

$$P(k, \vartheta - t_0) \to 1, \quad \vartheta \to \infty. \tag{2.25}$$

Подводя итог рассуждениям, заметим, что интервал наблюдений $[t_0, \vartheta^0]$, гарантирующий $P^0 \geq 1 - \varepsilon$, определяется из неравенства

$$P^0 = P(k^0, \vartheta - t_0)P(\sigma^0, k^0) \geq P(k^0, \vartheta^0 - t_0)(1 - \delta) \geq 1 - \varepsilon.$$

Это неравенство имеет решение ϑ^0 при $\delta < \varepsilon$ (вследствие (2.25)).

Наконец, при $\delta = \varepsilon/2$ значение ϑ^0 определяется соотношением

$$P(k^0, \vartheta^0 - t_0) \geq 2(1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon)^{-1} > 1 - \varepsilon. \tag{2.26}$$

Теорема 2. *Задача 3 разрешима на интервале, не меньшем числа $\vartheta^0 - t_0$, определяемого из* (2.26)*, при числе k^0 из* (2.24) *и достаточно большом значении ограничения μ на управление U, обеспечивающем разрешимость уравнения $x_2(\vartheta^0) = -x_1^*(\vartheta)$.*

Замечание 6. *Рассмотрим систему неравенств*

$$\langle e^{(i)}, z\rangle \leq \rho(e^{(i)} \mid \mathscr{X}_1[\tau_k])$$

для всех ортов $\pm e^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$. Решение

$$\mathscr{Z}(n, k) \supseteq \mathscr{X}_1[\vartheta], \quad \vartheta \geq \tau_k,$$

этой системы представляет собой прямоугольный параллелепипед с центром $z_1^* = z^*(n, k)$. Он аппроксимирует $\mathscr{X}_1[\tau_k]$ внешним образом и может быть использован вместо информационного множества, так что

$$\mathscr{Z}(n, k) - z^* \supseteq \mathscr{R}(k, \vartheta), \quad \vartheta \geq \tau_k$$

и

$$\mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq z^* + (\mathscr{Z}(n, k) - z^*) \subseteq z^* + \mathscr{D}(0, \sigma^0).$$

3. Примеры

3.1. Синтез импульсных управлений по результатам измерений

Здесь представлены результаты численного моделирования разработанных ранее законов управления для описанной ниже линейной системы.

Задача состоит в отыскании синтеза импульсных управлений по результатам измерений, останавливающего колебания системы

$$\begin{cases} m_1\ddot{w}_1 &= k_2(w_2 - w_1) - k_1 w_1, \\ m_i\ddot{w}_i &= k_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - k_i(w_i - w_{i-1}), \\ m_N\ddot{w}_N &= -k_N(w_N - w_{N-1}) + u, \end{cases}$$

описывающей многозвенную колебательную механическую систему или эквивалентную ей электрическую цепь.

Целью управления является перевод системы в окрестность состояния равновесия за данное конечное время.

В численных экспериментах использовались следующие значения параметров: $m_i = 1$, $k_i = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi N$, $w_i^0 = \dot{w}_i^0 = 5$, $r(t) = 0$, $R(t) = \mathrm{diag}(10^{-4}I, 10^4 I)$ (т.е. смещения w измеряются со сравнительно малой ошибкой $\pm 0{,}01$, тогда как скорости $\dot{w}$ измеряются с большой ошибкой ± 100), $h = 2N$, $\Delta t = 0{,}1$ для эллипсоидального фильтра, $p(t) = 0$, $P(t) = 1$, $m = 0$, $M = I$.

Использовалось наихудшая помеха ($\xi(t) \equiv 0$), приводящая к наибольшему возможному размеру информационного множества.

На рис. 2 показана зависимость диаметра эллипсоидального информационного множества от модельного времени $t - t_0$. Отметим что этот график одинаков для любого размера цепи N.

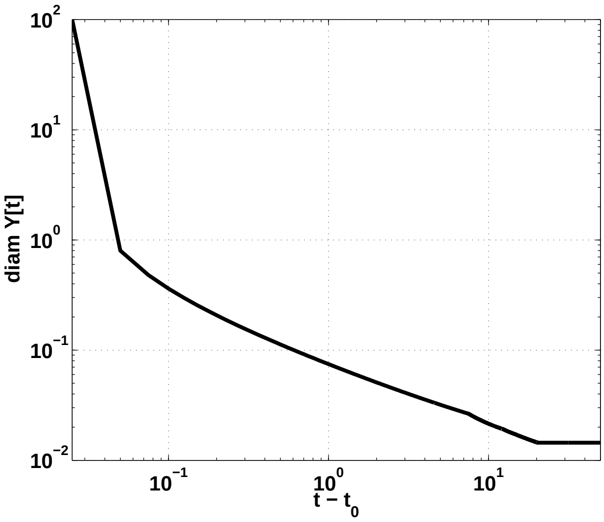

Рис. 2. Диаметр эллипсоидального информационного множества в зависимости от времени $(t - t_0)$

Рис. 3 демонстрирует реализовавшееся импульсное управление для $N = 5$. Заметив, что размерность системы в данном случае $n = 2N = 10$, а число отдельных импульсов (оно равно 13) здесь больше, чем n.

3.2. Управление по результатам измерений при коммуникационных ограничениях

На рис. 4 показано математическое ожидание диаметра информационного множества $\mathscr{R}(k, \vartheta)$ в задаче с коммуникационными ограничениями для различных размерностей n.

4. Выводы

Статья посвящена *синтезу импульсных управлений по результатам измерений* при неопределённости, стеснённой геометрическим ограничением. Реализации управлений состоят из суммы δ-функций. Рассмотрены два вида помех: непрерывные, не имеющие статистического описания, и дискретные, когда коммуникационные сигналы, содержащие измерения с помехой, поступают в пуассоновские моменты времени. Для обоих случаев указана схема решения и приведены примеры численного моделирования.

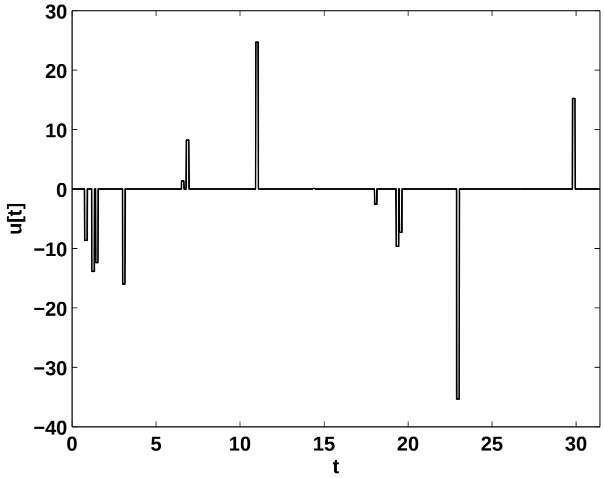

Рис. 3. Аппроксимация реализовавшегося импульсного управления при $N = 5$

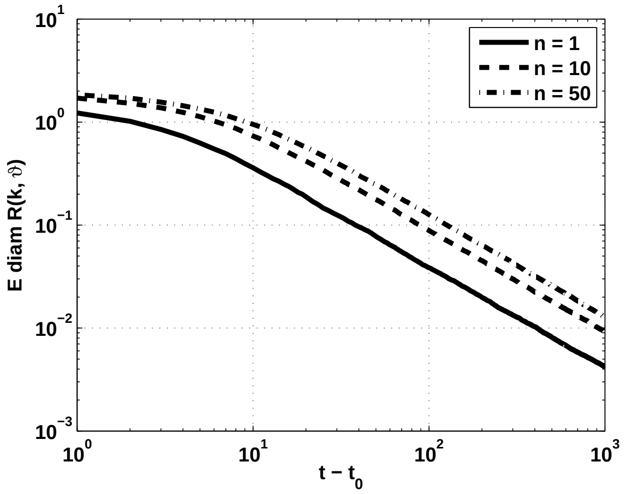

Рис. 4. Диаметр информационного множества для задачи с пуассоновскими моментами измерений, в зависимости от прошедшего времени $(\vartheta - t_0)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н.** К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // ПММ. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
2. **Красовский Н. Н.** Теория оптимальных управляемых систем // Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. Наука, 1968. С. 179–244.
3. **Куржанский А. Б.** О синтезе управлений по результатам наблюдений // ПММ. 2004. № 4.
4. **Куржанский А. Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
5. **Helton J. W., James M. R.** Extending H^∞ Control to Nonlinear Systems. Philadelphia: SIAM, 1999.
6. **Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E.,** Eds. Bounding Approach to System Identification. London: Plenum Press, 1996.
7. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
8. **Kurzhanski A. B., Filippova T. F.** On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Ser. PSCT 17. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 122–188.

9. **James M. R., Baras J. S.** Partially observed differential games, infinite-dimensional Hamilton–Jacobi–Isaacs equations and nonlinear H^∞ control // SIAM Journal on Control an Optimization. 1996. V. 34. N. 4. P. 1342–1364.
10. **Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В.** Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 11. С. 1491–1500.
11. **Kurzhanski A. B., Daryin A. N.** Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. P. 213–227.
12. **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
13. **Красовский Н. Н.** Об одной задаче оптимального регулирования // ПММ. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.
14. **Fan Ky**. Minimax theorems // Proc. Nat. Acad. of Sci. USA. 1953. V. 39. N. 1. P. 42–47.
15. **Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V.** Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Ser. Studies in Applied Mathematics 15. SIAM, 1994.
16. **Neustadt L. W.** Optimization, a moment problem and nonlinear programming // SIAM Journal on Control. 1964. V. 2. N. 1. P. 33–53.
17. **Kurzhanski A. B., Vályi I.** Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.
18. **Kurzhanskiy A. A., Varaiya P.** Ellipsoidal toolbox. `http://code.google.com/p/ellipsoids/`, 2005.
19. **Ros L., Sabater A., Thomas F.** An ellipsoidal calculus based on propagation and fusion // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 202. V. 32. N. 4.
20. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 2-е изд., 1967.
21. **Kurzhanski A. B.** Identification: a theory of guaranteed estimates // From Data to Model / Ed. Willems J. C. Springer, 1989. P. 135–214.
22. **Ustyuzhanin A. M.** On the problem of matrix parameter identification // Problems of Control and Information Theory. 1986. V. 15. N. 4. P. 265–273.