УДК 517.977

Об управлении при двойном ограничении с зависимостью геометрического ограничения от интегрального

© 2003 г. А. Н. Дарьин

Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова

Рассматривается задача управления, в которой управление стеснено геометрическим и интегральным ограничением, и кроме того геометрическое ограничение нелинейно зависит от текущего резерва по интегральному ограничению. Доказано, что при определенных предположениях оптимальное управление существует и единственно, то есть принцип максимума в некотором смысле является достаточным условием. Показано, что функция цены совпадает с расстоянием до множества разрешимости.

Введение

В данной работе рассматривается задача управления дифференциальным уравнением, когда управление стеснено геометрическим и интегральным ограничением, и кроме того геометрическое ограничение зависит от текущего резерва по интегральному ограничению, причем эта зависимость нелинейная. Это более общая постановка по сравнению с задачей об управлении при двойном ограничении [1, 2]. Она позволяет, например, учитывать не только ограниченность запаса топлива у транспортного средства, но и изменения в его реакции на управляющие воздействия, связанные с уменьшением массы топлива.

Для решения задачи вначале применяется Принцип Максимума Понтрягина, с помощью которого находится управление, максимизирующее линейный функционал, и в частности управление, приводящее систему линейных дифференциальных уравнений на границу множества достижимости в требуемом направлении, то есть фактически строится граница множества достижимости. Доказано, что при определенных предположениях оптимальное управление существует и единственно, то есть принцип максимума в определенном смысле является достаточным условием. Приводится численный алгоритм для одновременного решения прямой и сопряженной системы, а также явное выражение для управления через эти решения. В общем случае аналитическое решение задачи можно получить только в достаточно простых случаях, например для автономной системы (этот случай разобран отдельно). Решив задачу в

[0]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы “Университеты России — Фундаментальные исследования” (грант № УР.3.3.07) и РФФИ (грант № 03-01-00663).

обратном времени, то есть построив множество разрешимости можно указать синтез управлений, используя методы динамического программирования: в работе показано, что функция цены совпадает с расстоянием до множества разрешимости, что избавляет от необходимости решать уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, движения которой описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ \dot{k}(t) = -\|u(t)\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — текущее *положение* системы, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор *управления*, $k(t)$ — текущий *запас энергии* управления.

Управление стеснено геометрическим ограничением

$$\|u(t)\|_{Q(t)} \leqslant \mu(k(t)), \tag{1.2}$$

то есть возможности управления зависят от текущего запаса энергии. Если значение $k^* = \sup\{ k \mid \mu(k) \leqslant 0\}$ конечно, то управление будет автоматически удовлетворять и интегральному ограничению

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)} \, \mathrm{d}t \leqslant k(t_0) - k^*,$$

так как при достижении значения $k(t) = k^*$ единственным возможным значением управления станет нулевой вектор.

Управления $u(\cdot) \in L_2(t)$, почти всюду удовлетворяющие ограничению (1.2), будет называть *допустимыми*, а множество всех допустимых управлений будет обозначать через $\mathfrak{U}$. Очевидно, что одно и то же управление управление может быть допустимым при одном начальном значении $k(t_0)$ и не быть допустимым при другом значении, поэтому множество $\mathfrak{U}$ зависит от $k(t_0)$ — чем больше $k(t_0)$, тем больше управлений включает $\mathfrak{U}$. Далее мы будет считать, что значение $k(t_0)$ фиксировано, причем $\mu(k(t_0)) > 0$.

Предполагается, что матричные функции $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ непрерывно дифференцируемы, а $Q(t)$ и $R(t)$ кроме того положительно определены в каждый момент времени.

Задача 1. Найти допустимое управление $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$, приводящее систему в конечный момент времени t_1 на границу множества достижимости в заранее заданном направлении ℓ, то есть управление, доставляющее максимум функционалу

$$\langle \ell, x(t_1) \rangle = \langle \ell, x(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \ell, A(t)x(t) + B(t)u(t) \rangle \, \mathrm{d}t.$$

В дальнейшем вместо этой задачи будет рассматриваться более общая

Задача 2. Найти допустимое управление $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$, доставляющее максимум интегральному функционалу

$$J(u(\cdot)) = \langle h(\cdot), u(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle h(t), u(t) \rangle \, \mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Задача 1 становится частным случаем задачи 2, если положить $h(t) = B^T(t)s(t)$, где $s(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{s}(t) = -A^T(t)s(t)$, $s(t_1) = \ell$.

2. Принцип максимума

Произведем вначале замену $u(t) \to \mu(k(t))u(t)$, чтобы геометрическое ограничение не зависело от фазовой координаты k. После этой замены получаем задачу об отыскании оптимального управления для нелинейного дифференциального уравнения:

$$\dot{k}(t) = -\mu^2(k(t))\|u(t)\|^2_{R(t)}, \qquad J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \mu(k(t))\langle h(t), u(t) \rangle \, \mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Здесь управление принадлежит эллипсоиду $U = \left\{ \|u(t)\|^2_{Q(t)} \leqslant 1 \right\}$.

Используя принцип максимума для систем с закреплённым временем и свободным правым концом [3, Теорема 7], получаем следующее

Утверждение. *Пусть функции $\mu(k)$ и $h(t)$ непрерывно дифференцируемы*[1]*. Для того, чтобы допустимое управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $k(t)$ доставляли максимум функционала* (1.3) *на отрезке $[t_0, t_1]$, необходимо существование такой ненулевой непрерывной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению*

$$\dot{\psi}(t) = -\mu'(k(t)) \left(\langle h(t), u(t) \rangle - 2\psi(t)\mu(k(t))\|u(t)\|^2_{R(t)} \right), \qquad \psi(t_1) = 0, \tag{2.2}$$

что для всех $t \in [t_0, t_1]$ функция

$$\mathcal{H}(\psi, k, t, u) = \mu(k)\langle h(t), u \rangle - \psi\mu^2(k)\|u\|^2_{R(t)}$$

---

[1] Здесь и далее подразумевается, что непрерывная дифференцируемость функции $\mu(k)$ требуется на множестве $\{\, k \mid \mu(k) > 0 \}$

переменной $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$\mathcal{H}(\psi(t), k(t), t, u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), k(t), t). \tag{2.3}$$

2.1. **Следствия из принципа максимума.** Записав функцию Лагранжа для задачи максимизации (2.3), получаем следующее описание оптимального управления:

Лемма 1. *Оптимальное управление, определяемое принципом максимума* (2.3)*, выражается формулой*

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\mu^2(k(t))\psi(t)R(t) + \lambda Q(t)\right)^{-1}\mu(k(t))h(t), \tag{2.4}$$

где $\lambda \geqslant 0$ — множитель Лагранжа, отвечающий ограничению $\|u(t)\|^2_{Q(t)} \leqslant 1$. Оптимальное управление и соответствующий ему множитель Лагранжа одновременно удовлетворяют условию дополняющей нежёсткости $\lambda\left(\|u(t)\|^2_{Q(t)} - 1\right) = 0$. В случае одновременного равенства нулю $h(t)$ и $\psi(t)$ управление может принимать любое значение из U.

Отметим, что управление, удовлетворяющее принципу максимума, будет непрерывным, функция $\psi(t) \neq 0$ на $[t_0, t_1)$, и кусочно непрерывным, если $\psi(t)$ обращается в нуль в конечном числе точек.

Изучим отдельно случаи $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$, т.е. когда геометрическое ограничение активно или неактивно в данный момент времени.
1. Случай $\lambda = 0$ (ограничение неактивно). Из (2.4) получаем

$$u(t) = \frac{1}{2\psi(t)\mu(k(t))}R^{-1}(t)h(t), \tag{2.5}$$

и при подстановке в (2.2) имеем $\dot{\psi}(t) = 0$.
2. Случай $\lambda > 0$. В этом случае из условия дополняющей нежёсткости выводим равенство $\|u(t)\|^2_{Q(t)} = 1$, однозначно определяющее выбор λ.

Лемма 2. *Множитель Лагранжа $\lambda = \lambda(t, k, \psi)$ связан с функцией $\psi(\cdot)$ следующим соотношением:*

$$\dot{\psi}(t) = -2\frac{\mu'(k(t))}{\mu(k(t))}\lambda(t, k(t), \psi(t)). \tag{2.6}$$

Доказательство. Представим выражение для оптимального управления в виде (для краткости опустим зависимость от t):

$$u = \frac{\mu(k)}{2}Q^{-\frac{1}{2}}\left(\mu^2(k)\psi Q^{-\frac{1}{2}}RQ^{-\frac{1}{2}} + \lambda I\right)^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}h.$$

Пусть $s_1, \dots, s_m$ — ортонормированный базис самосопряжённого оператора $Q^{-\frac{1}{2}}RQ^{-\frac{1}{2}}$, а $\nu_1, \dots, \nu_m$ — соответствующие собственные значения: $Q^{-\frac{1}{2}}RQ^{-\frac{1}{2}}s_i = \nu_i s_i$. Разложим вектор $Q^{-\frac{1}{2}}h$ по этому базису: $Q^{-\frac{1}{2}}h = \sum_{i=1}^m q_i s_i$, и подставим это разложение в формулу для управления:

$$u = \frac{\mu(k)}{2} Q^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda} q_i s_i. \tag{2.7}$$

Таким образом, условие $\|u(t)\|^2_{Q(t)} = 1$ принимает вид

$$\frac{\mu^2(k)}{4} \sum_{i=1}^m \frac{q_i^2}{\left(\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda\right)^2} = 1. \tag{2.8}$$

Подставим теперь формулу (2.7) в дифференциальное уравнение для функции ψ:

$$\begin{aligned}\dot\psi = -\mu'(k) \left(\frac{\mu(k)}{2} \sum_{i=1}^m \frac{q_i \left\langle Q^{-\frac{1}{2}}h, s_i \right\rangle}{\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda} - \psi \frac{\mu^3(k)}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\left\langle Q^{-\frac{1}{2}}RQ^{-\frac{1}{2}}q_i s_i, q_i s_i \right\rangle}{\left(\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda\right)^2} \right) = \\ = -\mu'(k) \left(\frac{\mu(k)}{2} \sum_{i=1}^m \frac{q_i^2}{\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda} - \psi \frac{\mu^3(k)}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i q_i^2}{\left(\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda\right)^2} \right) = \\ = -\frac{\mu'(k)\mu(k)}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\lambda q_i^2}{\left(\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda\right)^2} = -\frac{\mu'(k)\mu(k)}{2} \frac{4\lambda}{\mu^2(k)} = -2\frac{\mu'(k)}{\mu(k)}\lambda.\end{aligned}$$

$\square$

Заметим, что соотношение (2.6) верно и при $\lambda = 0$.

Следствие. *Пусть функция $\mu(k)$ неубывающая (невозрастающая). Тогда, поскольку $\lambda \geqslant 0$, то переменная ψ неотрицательна и не возрастает (неположительна и не убывает).*

В случае наличия нескольких различных собственных значений ν_i аналитическое решение уравнения (2.8) относительно λ сводится к поиску корня многочлена высокой степени. Если же собственное значение только одно, то есть $Q^{-\frac{1}{2}}RQ^{-\frac{1}{2}} = \nu I$, то значение λ находится в явном виде:

$$\lambda(t, k(t), \psi(t)) = \mu(k(t)) \left(\tfrac{1}{2}\|h(t)\|_{Q^{-1}(t)} - \nu\mu(k(t))\psi(t) \right). \tag{2.9}$$

Приведенные выше рассуждения предполагают, что функция $\mu(k(t))$ всюду положительна. Следующая лемма дает условие, при котором это действительно так.

Лемма 3. *Пусть функция $\mu(k)$ дифференцируема, в правой окрестности точки k^* строго возрастает и имеет порядок малости не менее $\frac{1}{2}$, то есть $\mu(k-k^*) = O\left((k-k^*)^{\frac{1}{2}}\right)$. Тогда её значение вдоль любой траектории системы положительно: $\mu(k(t)) > 0$.*

Доказательство. Если функция $\mu(k)$ всюду положительна, то утверждение тривиально. Пусть теперь это не так, то есть число k^* конечно. В начальный момент значение $\mu(k_0)$ положительно. Запишем производную функции μ в силу системы:

$$\dot{\mu}(k(t)) = -\mu'(k(t))\mu^2(k(t))\|u(t)\|^2_{R(t)}.$$

Это уравнение должно иметь единственное решение при начальном условии $\mu(k(\theta)) = 0$ для произвольного $\theta \in [t_0, t_1]$. Считая управление и матрицу $R(t)$ достаточно гладкими функциями, для единственности решения будет достаточно потребовать, чтобы функция $f(\mu) = \mu'(k(t))\mu^2(k(t))$ была непрерывной по Липшицу. По теореме об обратной функции существует функция $\kappa(\mu)$, определенная и дифференцируемая в правой окрестности точки $\mu = 0$. Если функция $\mu(k)$ имеет порядок малости r, то $\kappa(\mu)$ может быть представлена в виде $\kappa(\mu) = \mu^{\frac{1}{r}} g(\mu)$, где функция $g(\mu) > 0$ дифференцируема при $\mu > 0$, поэтому производная $\kappa'(\mu)$ имеет порядок малости не более $\frac{1}{r} - 1$. С другой стороны, по теореме о производной обратной функции $\kappa'(\mu) = \frac{1}{\mu'(\kappa(\mu))}$, поэтому функция $f(\mu)$ будет иметь порядок малости не менее $3 - \frac{1}{r}$, то есть условие Липшица будет выполняться при $r \geqslant \frac{1}{2}$, что как раз присутствует в предположениях о функции μ. □

3. Существование решения

Опишем вначале свойства множества допустимых программных управлений (таких, которые не нарушают геометрического ограничения):

$$\mathfrak{U} = \left\{ u(\cdot) \;\middle|\; \|u(t)\|^2_{Q(t)} \leqslant \mu(k(t)),\ t \in [t_0, t_1] \right\}.$$

Напомним, что функция $k(\cdot)$ определяется здесь уравнением (2.1) и, вообще говоря, зависит от управления $u(\cdot)$.

Лемма 4. *Пусть функция $\mu(k)$ вогнута и монотонно возрастает. Тогда множество допустимых управлений $\mathfrak{U}$ является выпуклым.*

Доказательство. Пусть некоторое управление $u(\cdot)$ является выпуклой комбинацией двух допустимых управлений: $u = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2$, $\alpha \in [0,1]$, $u_i \in \mathfrak{U}$. Покажем, что в этом случае и управление $u(\cdot)$ является допустимым.

Обозначим через $k_i(\cdot)$ траектории переменной k, отвечающие управлением $u_i(\cdot)$. Тогда

$$\dot{k}(t) = -\|\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)\|^2_{R(t)} \geqslant -\alpha\|u_1(t)\|^2_{R(t)} - (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{R(t)} = \\ = \alpha\dot{k}_1(t) + (1-\alpha)\dot{k}_2(t),$$

откуда легко видеть, что

$$k(t) \geqslant \alpha k_1(t) + (1-\alpha)k_2(t).$$

Последнее означает, что функция $u(\cdot) \to k(t)$ является вогнутой. В силу вогнутости и монотонности функции $\mu(k)$ имеем

$$\mu(k(t)) \geqslant \alpha\mu(k_1(t)) + (1-\alpha)\mu(k_2(t)) \geqslant \\ \geqslant \alpha\|u_1(t)\|^2_{Q(t)} + (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{Q(t)} \geqslant \|\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)\|^2_{Q(t)} = \|u(t)\|^2_{Q(t)}.$$

Последнее верно для всех $t \in [t_0, t_1]$, поэтому $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$. □

Следствие. *При выполнении условий леммы множество достижимости в задаче 1 является выпуклым.*

Условия неубывания и вогнутости функции $\mu(k)$ существенны; невыполнение хотя бы одного из них может привести к невыпуклости множества достижимости.

Лемма 5. *Пусть функция $\mu(k)$ непрерывна. Тогда множество $\mathfrak{U}$ замкнуто в топологии $L_2(T)$.*

Доказательство. Пусть $u_i(\cdot)$ — последовательность допустимых управлений, сходящаяся к функции $u(\cdot)$ в пространстве $L_2(T)$. Из последовательности $\{u_i(\cdot)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{i_k}(\cdot)\}$, сходящуюся к $u(\cdot)$ почти всюду, поэтому можно считать, что $\{u_i(\cdot)\} \underset{\text{п.в.}}{\to} u(\cdot)$. Пусть $k_i(\cdot)$ — траектории переменной $k(t)$, соответствующие управлениям $u_i(\cdot)$. Тогда

$$k_i(t) = k(t_0) - \int_{t_0}^{t} \|u_i(\tau)\|^2_{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = k(t_0) - \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2_{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \\ - \int_{t_0}^{t} \|u_i(\tau) - u(\tau)\|^2_{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - 2\int_{t_0}^{t} \left\langle R^{\frac{1}{2}}(\tau)(u_i(\tau) - u(\tau)), R^{\frac{1}{2}}(\tau)u(\tau)\right\rangle \mathrm{d}\tau = \\ = k(t) - I_1 - 2I_2 \to k(t),$$

так как $I_1 \to 0$ по условию сходимости $u_i(\cdot)$ к $u(\cdot)$, а для I_2 справедлива оценка

$$|I_2| \leqslant \left[I_1 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2_{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Таким образом, поскольку функция $\mu(k)$ непрерывна, то в пределе получаем

$$\|u_i(t)\|_{Q(t)} \leqslant \mu(k_i(t)) \quad \Longrightarrow \quad \|u(t)\|_{Q(t)} \leqslant \mu(k(t)).$$

$\square$

Лемма 6. *Пусть функция $\mu(\cdot)$ ограничена сверху. Тогда множество $\mathfrak{U}$ ограничено в метрике $L_p(T)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство. Обозначим через M_μ верхний предел функции $\mu(\cdot)$ и через $M_{Q^{-1}}$ константу, ограничивающую сверху норму $Q^{-1}(t)$. Тогда для допустимого управления $u(\cdot)$ очевидно $\|u(\cdot)\|_{L_\infty(T)} \leqslant M_{Q^{-1}}^{\frac{1}{2}} M_\mu$. Используя эту оценку, получаем $\|u(\cdot)\|_{L_p(T)} \leqslant M_{Q^{-1}}^{\frac{1}{2}} M_\mu \cdot (t_1 - t_0)^{1/p}$. $\square$

Следствие. *Множество достижимости в задаче 1 ограничено.*

Теорема 1 (о существовании решения)**.** *Пусть функция $\mu(k)$ вогнута и не убывает на множестве $\{k \mid \mu(k) \geqslant 0\}$. Тогда существует управление $u^*(\cdot) \in \mathfrak{U}$, доставляющее максимум линейному непрерывному функционалу $J(u(\cdot))$.*

Доказательство. Множество $\mathfrak{U}$ слабо компактно, так как оно является выпуклым (лемма 4), замкнутым (лемма 5) и ограниченным (лемма 6, $M_\mu = \mu(k(t_0))$) в метрике $L_2(T)$. Функционал $J(u(\cdot))$ слабо полунепрерывен сверху (как вогнутый и полунепрерывный сверху). Слабо полунепрерывный сверху функционал достигает верхней грани на слабо компактном множестве, следовательно множество оптимальных управлений $\mathfrak{U}^*$ непусто и выпукло. $\square$

Следствие. *При выполнении условий теоремы в задаче 1 существует управление $u(\cdot)$, приводящее систему на границу множества достижимости в заданном направлении ℓ. Множество достижимости при этом является непустым выпуклым компактом.*

3.1. **О достаточности принципа максимума.** Если выполнены условия теоремы о существовании решения и $u^*(\cdot)$ — единственное управление, удовлетворяющее принципу максимума вместе с некоторой функцией $\psi(\cdot)$, то $u^*(\cdot)$ — оптимальное управление. В самом деле, поскольку оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума, а такое управление всего одно, то оно совпадает с $u(\cdot)$.

Таким образом, в условиях применимости теоремы о существовании решения принцип максимума в совокупности с единственностью решения прямой и двойственной системы является достаточным условием оптимальности. Очевидно, что при этом стоит учитывать и условия теоремы о единственности решения, приведенной в следующем параграфе — ведь если оптимальных управлений много, то решение системы из принципа максимума тоже будет не единственным.

Если существует несколько пар $\{u(t), \psi(t)\}$, удовлетворяющих принципу максимума, то в силу существования решения и необходимости принципа максимума среди этих пар будет оптимальное управление. Таким образом, при выполнении условий теоремы о существовании решения для нахождения оптимального управления достаточно перебрать все решения системы из принципа максимума.

4. Единственность решения

Для доказательства единственности решения предположим, что два различных управления являются оптимальными. Следующая лемма позволяет построить управление, которое, как будет показано позже, является "более оптимальным". По сути дела это усиленный вариант леммы про выпуклость множества допустимых управлений, поскольку гарантируется допустимость не только тех управлений которые лежат на отрезке от $u_1(\cdot)$ до $u_2(\cdot)$, но и допустимость управлений вблизи этого отрезка.

Лемма 7. *Пусть*

(1) *функция $\mu(k)$ вогнута и не убывает;*
(2) *$u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — допустимые кусочно-непрерывные управления;*
(3) *ограниченная кусочно-непрерывная функция $w(\cdot)$ обладает тем свойством, что $w(t) = 0$, когда $u_1(t) = u_2(t)$.*

Тогда управление $u(t) = \alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t) + \beta(t)w(t)$ также будет допустимым для всех $\alpha \in (0,1)$ и некоторой положительной кусочно-непрерывной функции $\beta(\cdot)$ (вообще говоря, зависящей от α).

Доказательство. Докажем вначале неравенство

$$\|u(t)\|^2_{S(t)} \leqslant \alpha\|u_1(t)\|^2_{S(t)} + (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{S(t)} \tag{4.1}$$

для произвольной положительно определенной матрицы $S(t)$. При $u_1(t) = u_2(t)$ имеет место $w(t) = 0$, $u(t) = u_1(t) = u_2(t)$ и (4.1) очевидно выполняется в виде равенства. Если же $u_1(t) \neq u_2(t)$, то

$$\|\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)\|^2_{S(t)} < \alpha\|u_1(t)\|^2_{S(t)} + (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{S(t)}$$

в силу строгой выпуклости функции $u \to \|u\|^2_{S(t)}$. Из непрерывности этой функции следует, что при малых значениях $\beta(t)$ будет выполняться и неравенство (4.1), причем функцию $\beta(\cdot)$ можно выбрать кусочно-непрерывной.

Пусть теперь $k(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ — траектории переменной k, соответствующие управлениям $u(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$. Тогда, используя (4.1), получаем

$$\dot{k}(t) = -\|u(t)\|^2_{R(t)} \geqslant -\alpha\|u_1(t)\|^2_{R(t)} - (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{R(t)},$$

что после интегрирования дает $k(t) \geqslant \alpha k_1(t) + (1-\alpha)k_2(t)$. Поскольку функция $\mu(k)$ вогнутая и неубывающая, то

$$\mu(k(t)) \geqslant \mu(\alpha k_1(t) + (1-\alpha)k_2(t)) \geqslant \alpha\mu(k_1(t)) + (1-\alpha)\mu(k_2(t)) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha\|u_1(t)\|^2_{Q(t)} + (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{Q(t)} \geqslant \|u(t)\|^2_{Q(t)},$$

то есть $u(t)$ в каждый момент времени удовлетворяет геометрическому ограничению и, следовательно, является допустимым управлением. □

Определение. Будем говорить, что задача максимизации интегрального функционала удовлетворяет *условию общности положения*, если для всех $\delta > 0$ выполнено

$$\int_{t_1-\delta}^{t_1} \|h(t)\|^2 \,\mathrm{d}t > 0.$$

В задаче 1 выполнение условия общности положения для всех направлений ℓ из единичной сферы эквивалентна полной управляемости системы на любом отрезке $[t_1-\delta, t_1]$.

Лемма 8. *Если выполнено условие общности положения, функции $\mu(k)$ и $h(t)$ непрерывно дифференцируемы, и производная функции $\mu(k)$ всюду положительна, то $\psi(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1)$.*

Доказательство. Ранее было доказано, что функция $\psi(t)$ невозрастающая. Покажем, что она положительна в левой окрестности точки t_1. Пусть это не так, то есть найдется число $\delta > 0$, такое, что $\psi(t) = 0$, $t \in T_\delta = [t_1-\delta, t_1]$. Поскольку выполнено условие общности положения, то $\|h(t)\| > 0$ на подмножестве T_δ ненулевой меры. Поскольку на T_δ принцип максимума превращается в

$$\langle h(t), u(t)\rangle = \max_{u\in U}\langle h(t), u\rangle > 0,$$

то производная функции $\psi(t)$ отрицательна:

$$\dot{\psi}(t) = -\mu'(k(t_1))\langle h(t), u(t)\rangle < 0.$$

Интегрируя это неравенство на T_δ, получаем $\psi(t_1-\delta)>0$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, $\psi(t)>0$ при всех $t<t_1$. □

Теорема 2 (о единственности решения)**.** *Пусть*

(1) *выполнено условие общности положения;*
(2) *функция $h(\cdot)$ непрерывно дифференцируема;*
(3) *функция $\mu(\cdot)$ вогнута, возрастает, непрерывно дифференцируема и в точке $\mu(k)=0$ имеет порядок малости не менее $\frac{1}{2}$.*

Тогда существует ровно одно управление, доставляющее максимум функционалу (1.3).

Доказательство. Условия теоремы гарантируют существование решения. По лемме 3 получаем $\mu(k(t))>0$, $t\in[t_0,t_1]$, а условие общности положения в силу леммы 8 и принципа максимума дает $u(t)=0$ при $h(t)=0$. Следовательно, существует множество ненулевой меры $T_0\subseteq T$, на котором $h(t)\neq 0$ и $u_1(t)\neq u_2(t)$.

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — различные оптимальные управления. Они удовлетворяют принципу максимума и, как отмечалось ранее, непрерывны (так как $\psi(t)>0$, $t\in[t_0,t_1)$). Выберем произвольное число $\alpha\in(0,1)$ и рассмотрим управление

$$u(t)=\alpha u_1(t)+(1-\alpha)u_2(t)+\beta(t)w(t),\qquad w(t)=\begin{cases}0, & u_1(t)=u_2(t);\\ h(t), & u_1(t)\neq u_2(t).\end{cases}$$

По лемме 7 такое управление допустимо при малой положительной функции $\beta(\cdot)$. Покажем, что на этом управлении значение функционала больше, чем на $u_i(\cdot)$:

$$J(u(\cdot))-J(u_i(\cdot))=\int\limits_{\{\,t\ \mid\ u_1(t)\neq u_2(t)\}}\beta(t)\|h(t)\|^2\,\mathrm{d}t\geqslant\int\limits_{T_0}\beta(t)\|h(t)\|^2\,\mathrm{d}t>0.$$

Следовательно, управления $u_i(\cdot)$ не являются оптимальными. Получено противоречие с предположением о существовании двух оптимальных управлений, следовательно, оптимальное управление единственно. □

Ясно, что если условие общности положения не выполнено, то в конце траектории $\psi(t)=0$, $h(t)=0$ и оптимальное управление может принимать любые значения, укладывающиеся в геометрическое ограничение (так как эти значения уже не влияют на значение функционала), то есть оптимальное управление заведомо не единственное.

Однако если условие общности положения не выполняется в точке t_1, но все-таки оно выполнено в другой точке $\theta\in[t_0,t_1)$, то управление будет единственно с точностью до “хвоста” на отрезке $[\theta,t_1]$.

5. Нахождение оптимальной траектории и управления

5.1. **Точки переключения между $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$.** Так как уравнения системы существенно отличаются в случаях $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$, то для аналитического решения задачи желательно каким-либо найти те точки, в которых значение λ меняется с нулевого на положительное и обратно. Из формулы (2.5) видно, что $\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда

$$2\psi(t)\mu(k(t)) \geqslant \left\|R^{-1}(t)h(t)\right\|_{Q(t)}. \tag{5.1}$$

Правая часть полностью определяется параметрами задачи, поэтому для определения положения точек переключения необходимо исследовать поведение левой части.

Если в некоторый момент времени $\psi(t) < 0$, то заведомо $\lambda > 0$, поскольку правая часть (5.1) неотрицательна. Например, если функция $\mu(k)$ невозрастающая, то $\psi(t) < 0$ всюду, и, следовательно, геометрическое ограничение всегда активно.

Лемма 9. *Пусть функция $\mu(k)$ является неубывающей. Тогда левая часть* (5.1)*, то есть функция $\varphi(t) = \psi(t)\mu(k(t))$, является невозрастающей, $\varphi(t_1) = 0$.*

Доказательство. Пусть функция $\mu(k)$ неубывающая. Тогда функция $\psi(t)$ невозрастающая и неотрицательная; поскольку $k(t)$ монотонно убывает, то $\mu(k(t))$ не возрастает. Функция $\psi(t)$ является невозрастающей как произведение двух неотрицательных невозрастающих функций. □

5.2. **Решение задачи для автономной системы.** Рассмотрим автономную систему ($h(t) \equiv h$, $Q(t) \equiv Q$, $R(t) \equiv R$) с неубывающей функцией $\mu(k)$. В этом случае правая часть (5.1) постоянна, а левая не возрастает. Следовательно, в начале траектории $\lambda = 0$, а затем $\lambda > 0$ до конца временнóго интервала, то есть существует только одна точка переключения с $\lambda = 0$ на $\lambda > 0$, а обратного переключения произойти не может.

Обозначим этот момент переключения через θ. Неизвестное начальное значение ψ обозначим ψ_0. Запишем на отрезке $[t_0, \theta]$ уравнения (2.1) и (2.2) при условии $\lambda = 0$, а на отрезке $[\theta, t_1]$ — при $\lambda > 0$.

Пусть найдены траектории $k(t)$ и $\psi(t)$ для всех θ и ψ_0. Тогда из условия $\psi(t_1) = 0$ находим ψ_0 (это значение будет в общем случае зависеть от θ), а затем из условия переключения в точке θ — сам момент θ.

Поскольку в начале траектории $\lambda = 0$, то $\psi(t) = \psi(t_0) = \psi_0$, и производная

$$\dot{k}(t) = -\frac{1}{(2\psi_0)^2}\|h\|^2_{R^{-1}} \tag{5.2}$$

не зависит от времени, то момент переключения может быть выражен через ψ_0:

$$\theta = t_0 + \frac{(2\psi_0)^2}{\|h\|^2_{R^{-1}}} \left(k_0 - \mu^{-1} \left(\frac{\|R^{-1}h\|_Q}{2\psi_0} \right) \right),$$

где μ^{-1} — функция, обратная к $\mu(k)$. Если получается $\theta < t_0$, то всюду $\lambda > 0$, а в случае $\theta > t_1$ всюду $\lambda = 0$.

5.3. **Численное отыскание траекторий.** Дифференциальные уравнения для $k(t)$ и $\psi(t)$ достаточно сложны, так как в каждый момент необходимо определять значение множителя Лагранжа λ и по нему управление, после чего подставлять в уравнения (2.1) и (2.2). При наличии двух и более собственных чисел матрицы $Q^{-\frac{1}{2}}RQ^{-\frac{1}{2}}$ аналитическое нахождение значения λ не представляется возможным, так как оно будет корнем многочлена степени $2m$, где m — количество собственных значений.

Однако основной трудностью является одновременный учёт начальных условий для k и ψ, задаваемых на разных концах временно́го интервала. В связи с этим предлагается следующий *алгоритм численного решения* задачи:

(1) Выбрать начальное приближение $\psi_0 = \psi(t_0)$.
(2) Численно решить дифференциальные уравнения (2.1) и (2.2) (используя произвольный метод для численного решения ОДУ, например, метод Эйлера или Рунге–Кутты). При этом на каждом шаге значение множителя Лагранжа λ ищется как приближённое решение уравнения (2.8). В результате получится некоторое значение $\psi_1(\psi_0) = \psi(t_1)$.
(3) Повторяя первые эти шаги необходимое число раз, найти все решения уравнения $\psi_1(\psi_0) = 0$; обозначим их через ψ_0^i.
(4) Из управлений, соответствующих начальным значениям ψ_0^i, выбрать то, на котором значение функционала (1.3) наибольшее.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы о существовании решения. Тогда указанный алгоритм находит оптимальное управление.*

Доказательство. Пусть $\bar{\psi}(t)$ — траектория переменной ψ, соответствующая оптимальному управлению $u(\cdot)$. Тогда число $\bar{\psi}(t_0)$ является решением уравнения $\psi_1(\psi_0) = 0$ в силу того, что принцип максимума требует $\bar{\psi}(t_1) = 0$. Следовательно, значение $\bar{\psi}(t_0)$ и соответствующие ему траектории $\psi(t)$ и управления будут найдены алгоритмом. □

6. Примеры

6.1. **Одномерная автономная система.** Приведём формулировку задачи в этом примере. Требуется отыскать максимум интеграла

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T \mu(k(t))u(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

при условии $u(t) \leqslant 1$, а также функцию $u(\cdot)$, на которой этот максимум реализуется. Здесь $k(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{k}(t) = -\mu^2(k(t))u^2(t), \quad k(0) = k_0.$$

Для определенности выберем $\mu(k) = k$, что соответствует в исходной задаче (1.1) ограничению $\|u(t)\|_{Q(t)} \leqslant k(t)$.

Воспользуемся изложенной выше схемой решения задачи для автономной системы. Пусть начальное значение ψ равно ψ_0, тогда переключение с $\lambda = 0$ на $\lambda > 0$ происходит в момент

$$\theta = (2\psi_0)^2\left(k_0 - \frac{1}{2\psi_0}\right), \tag{6.2}$$

а если $2\psi_0 k_0 < 1$, то с самого начала $\lambda > 0$, и тогда мы полагаем $\theta = 0$.

Найдём функцию $k(t)$. До момента θ она удовлетворяет уравнению (5.2), а после — уравнению $\dot{k}(t) = -k^2(t)$, поэтому

$$k(t) = \begin{cases} k_0 - \dfrac{t}{(2\psi_0)^2}, & 0 \leqslant t \leqslant \theta; \\ \dfrac{k(\theta)}{k(\theta)(t-\theta)+1}, & \theta < t \leqslant T. \end{cases}$$

После момента θ функция $\psi(t)$ — решение уравнения $\dot{\psi}(t) = -(1 - 2k(t)\psi(t))$, поэтому

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_0, & 0 \leqslant t \leqslant \theta; \\ (k(\theta)(t-\theta)+1)(\psi_0\,(k(\theta)(t-\theta)+1) - (t-\theta)), & \theta < t \leqslant T. \end{cases}$$

Исходя из требования $\psi(T) = 0$, получаем значение

$$\psi_0 = \frac{T-\theta}{k(\theta)(T-\theta)+1}. \tag{6.3}$$

Решая уравнения (6.2) и (6.3), находим θ и ψ_0:

$$\theta = T\frac{\sqrt{k_0T}-1}{\sqrt{k_0T}}, \qquad \psi_0 = \frac{\sqrt{k_0T}}{2k_0} \qquad \text{в случае } k_0T > 1, \text{ и}$$

$$\theta = 0, \qquad \psi_0 = \frac{T}{k_0T+1} \qquad \text{в случае } k_0T < 1.$$

Оптимальное управление и значение функционала (6.1):

$$u^*(\cdot) = \begin{cases} \dfrac{2\psi_0}{4\psi_0^2k_0 - t}, & t \in [0,\theta]; \\ 1, & t \in [\theta, T]; \end{cases}, \qquad J(u^*(\cdot)) = \begin{cases} \ln(k_0T+1), & k_0T < 1; \\ \sqrt{k_0T} + \ln 2 - 1, & k_0T \geqslant 1. \end{cases}$$

На рисунке 1 представлено управление в исходных координатах, то есть функция $k(t)u(t)$ (пунктиром показан график $k(t)$). В одномерном случае эта функция всегда будет иметь такой вид: константа на тех участках, где $\lambda = 0$, и в точности $\mu(k(t))$ в противном случае.

6.2. **Одномерная неавтономная система.** Для иллюстрации работы приведенного выше численного алгоритма решения задачи была выбрана система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (1+\sin t)u(t), \\ \dot{k}(t) = -k^2(t)u^2(t), \end{cases}$$

На рисунке 2 приведен график управления в исходных координатах при выборе параметров $T = 6\pi$, $k_0 = \pi/12$.

6.3. **Двухмерная система.** На рисунке 3 представлена трубка достижимости следующей двухмерной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \\ \dot{k}(t) = -k^2(t)u^2(t). \end{cases}$$

7. Метод динамического программирования. Функция цены

Рассмотрим задачу попадания траекторий системы линейных дифференциальных уравнений на целевое множество $\mathcal{M} = \{(x,k) \mid x \in \mathcal{M}(k),\ k \in \mathbb{R}\}$, и в связи с этим функцию цены

$$V(t,x,k) = \min_{u(\cdot)\in\mathfrak{U}} d\left(x(t_1), \mathcal{M}(k(t_1))\right).$$

Эта функция является минимаксным (вязкостным) решением [4] уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\|u\|^2_{Q(t)} \leqslant 1} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, \mu(k) B(t) u \right\rangle - \mu^2(k) \frac{\partial V}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0 \tag{7.1}$$

с начальным условием $V(t_1, x, k) = d(x, \mathcal{M}(k))$ и краевым условием $V(t, x, k)|_{\mu(k)=0} = d(x, \mathcal{M}(k))$. Вычислим функцию цены, используя сопряженную задачу:

$$V(t, x, k) = \min_{u(\cdot) \in \mathfrak{U}} \max_{\|\ell\| \leqslant 1} \left\langle x + \int_t^{t_1} B(t) u(t) \, \mathrm{d}t, \ell \right\rangle - \rho \left(\ell \mid \mathcal{M}(k(t_1)) \right).$$

Функция $u(\cdot) \to k(t_1)$ вогнута (см. лемму 4). Если множество $\mathcal{M}$ выпукло, то функция $k \to \rho \left(\ell \mid \mathcal{M}(k) \right)$ вогнута и монотонна, если $\mathcal{M}(k_1) \subseteq \mathcal{M}(k_2)$. Следовательно, функция $u(\cdot) \to \rho \left(\ell \mid \mathcal{M}(k(t_1)) \right)$ также вогнута. Получаем, что выражение под знаком минимакса вогнуто по ℓ и выпукло по $u(\cdot)$, поэтому минимакс можно заменить на максимин [5], откуда

$$V(t, x, k) = \max_{\|\ell\| \leqslant 1} \langle x, \ell \rangle - \rho \left(\ell \mid \mathcal{W}[k, t] \right) = d \left(x, \mathcal{W}[k, t] \right), \tag{7.2}$$

где $\mathcal{W}[k, t] = \{ x \mid (x, k) \in \mathcal{W}[t] \}$ — сечение множества разрешимости при постоянном значении k.

Таким образом, оптимальный синтез управления может быть найден исходя из (7.1) и (7.2):

$$\mathcal{U}(t, x, k) = \operatorname*{Arg\,min}_{\|u\|^2_{Q(t)} \leqslant 1} \left\{ \left\langle \frac{\partial d \left(x, \mathcal{W}[k, t] \right)}{\partial x}, \mu(k) B(t) u \right\rangle - \mu^2(k) \frac{\partial d \left(x, \mathcal{W}[k, t] \right)}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\}.$$

В силу непрерывности многозначного отображения $\mathcal{W}[k, t]$ синтез является полунепрерывным сверху, следовательно, выполнены условия существования и продолжаемости [6] решений дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \mu(k) B(t) u \\ -\mu^2(k) \|u\|^2_{R(t)} \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}(t, x, k) \right\}. \tag{7.3}$$

(Взятие выпуклой оболочки здесь носит чисто технический характер и в следеланных предположениях не прибавляет возможностей управлению.)

В заключение отметим, что данный подход можно распространить и на системы с неопределенностью, в которых помеха стеснена геометрическим ограничением: формула (7.2) остается верной, так что для решения соответствующей задачи необходимо построить множество разрешимости или его аппроксимацию.

Автор благодарит А. Б. Куржанского за постановку задачи и ценные замечания.

Список литературы

1. Красовский Н. Н. К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления // *ПММ.* 1965. Т. 29.
2. Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. Нелинейный синтез управления при двойных ограничениях // *Дифференц. уравнения.* 2001. Т. 27. № 11.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1961.
4. Субботин А. И. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби.* М.: Наука, 1991.
5. Fan Ky. Minimax theorems // *Proc. Nat. Acad. of Sci. USA.* 1953. V. 39. № 1.
6. Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М.: Наука, 1985.

Сведения об авторах

А. Н. Дарьин. 119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ, ф-т ВМиК.
Тел. +7 (095) 939-51-35 (р), +7 (095) 965-34-49 (д), +7 (902) 633-12-59 (м)
e-mail: a.daryin@mtu-net.ru

Рис. 1. Пример 6.1. График управления в исходных координатах

Рис. 2. Пример 6.2. График управления в исходных координатах

Рис. 3. Пример 6.3. Трубка достижимости

Список иллюстраций