Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Дарьин Александр Николаевич

# Синтез управлений при двойных и разнотипных ограничениях

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — доктор
физико-математических наук,
академик РАН А. Б. Куржанский

Москва, 2004 г.

# Оглавление

# Введение

Данная работа посвящена задачам синтеза гарантирующих управлений при неопределенности. Подобные проблемы актуальны в математических моделях высоких технологий. Изучаемые управляемые системы описываются линейными дифференциальными уравнениями, однако задача синтеза при этом нелинейна. Последнее объясняется тем, что синтезирующая стратегия является многозначным отображением, и после ее подстановки в исходные уравнения «просинтезированная» система принимает вид нелинейного дифференциального включения. От *гарантирующего управления* требуется привести систему на заранее заданное *целевое множество*, невзирая на возможное воздействие помех, информация о которых исчерпывается указанием возможных границ изменения. Составляющими частями решения задачи при этом являются *множество разрешимости*, состоящее из всех точек, из которых цель действительно может быть достигнута в любом случае; *функция цены*, равная минимальному гарантированному расстоянию до целевого множества в конечный момент; и, наконец, *синтез управлений* — функция текущего положения, указывающая, какие управляющие воздействия должны выбираться в каждом из возможных положений системы.

К настоящему времени разработан широкий спектр методов для решения подобных задач.

*Альтернированный интеграл*, введенный Л. С. Понтрягиным в статьях [47, 48] и более подробно описанный им в работе [49], позволяет свести вычисление множества разрешимости задачи синтеза гарантирующих управлений к интегрированию многозначных отображений. Этот подход нашел свое отражение в работах Е. Ф. Мищенко, М. С. Никольского, Е. С. Половинкина, Н. Х. Розова.

В теории, разработанной Н. Н. Красовским и его сотрудниками [14, 17–25, 58, 62, 72], предложена формализация дифференциальных игр и подробно исследована их структура. При этом, в частности, указано, каким образом можно построить синтезирующую стратегию управления, удерживающую траекторию системы внутри так называемого «*стабильного моста*» (то есть системы множеств, слабо инвариантной относительно просинтезированной системы) несмотря на действия второго игрока и обеспечивающую таким образом выполнение фазовых ограничений и попадание на целевое множество в требуемый момент времени.

Общим подходом является метод *динамического программирования*, разработанный Р. Беллманом [4] и примененный к игровым задачам Р. Айзексом [3]. Этот метод заключается в погружении исходной задачи в параметризованный класс аналогичных задач. Оптимальные значения минимизируемого функционала, вычисленные для каждого сочетания параметров, образуют функцию цены. При этом набор параметров, образующих позицию системы, должен быть достаточным для того, чтобы можно было сформулировать *принцип оптимальности*, выраженный в виде *полугруппового свойства* для функции цены. Тогда последняя является решением дифференциального уравнения в частных производных, называемого уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (HJBI), а синтезирующая стратегия находится как множество управлений, на которых достигается экстремум в этом уравнении. Поскольку функция цены очень часто бывает не всюду гладкой, используются различные понятия обобщенного решения уравнения Беллмана, например, вязкостные решения, введенные М. Г. Крэндаллом и П.-Л. Лионсом [68, 67, 79], или минимаксные решения, введенные А. И. Субботиным [55, 56]; см. также [59].

Использование соединения перечисленных подходов позволяет расширить рассматриваемый круг задач и построить конструктивную теорию, направленную на решение задач до конца, то есть до практически реализуемого алгоритма, чему посвящены работы А. Б. Куржанского [28, 29, 73–77]. При построении синтезирующей стратегии в качестве слабо инвариантной системы множество может выступать, например, трубка разрешимости, которая ищется как предел альтернированных интегральных сумм. При этом расстояние до нее является верхним вязкостным решением уравнения Беллмана, а в отдельных случаях совпадает с функцией цены. С целью решения задачи до конца используется аппарат *эллипсоидального исчисления* [73]: каждая тугая внутренняя эллипсоидальная аппроксимация трубки разрешимости является слабо инвариантной системой множеств, поэтому синтез управлений, построенный прицеливанием на нее, будет решением задачи. Этот синтез может быть выписан в явном виде через параметры эллипсоидальной аппроксимации, поэтому задача синтеза фактически сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров эллипсоидальной аппроксимации, то есть к эффективному практически реализуемому алгоритму.

Игровым задачам механики посвящена монография Ф. Л. Черноусько и А. А. Меликяна [64].

В принятой теории предполагается, что управление и возмущения принадлежат однотипным классам. Например, *геометрические* ограничения на входные параметры (называемые также *жесткими* или *мгновенными*) означают, что соответствующая величина почти в каждый момент должна находится в заранее заданном непустом множестве. С помощью них учитываются конструктивные возможности управляемого устройства (нельзя отклонять рули более чем на определенный угол, двигатель не может развивать более заданного числа оборотов и т.п.).

Напротив, *интегральные*, или *мягкие*, ограничения позволяют в каждый момент времени выбирать произвольное управляющее воздействие при условии, что интеграл от реализовавшейся траектории управления не превысит заранее заданной величины, называемой *резервом* управления. В терминах мягких ограничений формулируются условия об ограниченности запаса энергии, топлива, сил у управляемого объекта. Системы с интегральными ограничениями на помеху и управление рассматривались в работах [2, 14, 16, 38, 53, 57, 61, 66].

Однако на практике возникают ситуации, когда необходимо налагать на управление одновременно несколько ограничений различных типов, а также выбирать для управления и помехи различные классы ограничений. Постановка задачи с двойным (геометрическим и интегральным) ограничением на управление позволяет учесть как конструктивные особенности системы, не позволяющие реализовать сколь угодно большие значения управления, так и конечный объем ресурсов, расходуемых управлением. Такая постановка рассматривалась в статье [33], однако там шла речь о регулярной дифференциальной игре, то есть фактически предполагалось выполненным условие выметания и задача сводилась к чисто программным конструкциям. Несколько другая постановка — задача об успокоении линейной системы при требовании одновременно наименьшей амплитуды и наименьшего расхода энергии управлением — рассматривалось в работах [5, 6, 15]. Отметим, что система с двойным ограничением может быть также проинтерпретирована как система с геометрическим ограничением при стесненных фазовых координатах [27, 30–32].

Выбор разнотипных классов ограничений позволяет отказаться от предположения, что управление и помеха представляют из себя схожие по структуре объекты. Например, стесняя управление двойным ограничением, совершенно необязательно делать то же самое с помехой, о которой может быть известна лишь область возможных ее значений — в этом случае кажется более разумным использовать одно только геометрическое ограничение. Другим примером может быть система, в которой для управления задано множество его возможных значений, а помеха может принимать произвольные значения, но имеет ограниченный резерв: здесь можно принять геометрическое ограничение для управления и интегральное — для помехи.

Целью данной работы было получение теоретического обоснование решения задач синтеза управлений при двойных и неоднотипных ограничениях, так, чтобы в дальнейшем можно было перейти к эффективным численным алгоритмам решения этих задач. При этом построение таких алгоритмов лежит вне тематики работы и будет следующим этапом.

Для достижения поставленной цели используется описанный выше конструктивный подход, основанный на сочетании альтернированного интеграла, экстремальной конструкции и негладкого динамического программирования.

В **первой главе** диссертации рассматривается задача синтеза управлений для линейной системы без неопределенности при наличии двух ограничений на управление — геометрического и интегрального. Ограничения могут задаваться как независимо друг от друга (раздел 1.2), так и с зависимостью геометрического ограничения от резерва управления по интегральному ограничению (раздел 1.3).

В *разделе 1.1* описывается в общем виде задача, которой посвящены последующие два раздела.

Управляемая система задается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — положение системы, $u \in \mathbb{R}^{n_p}$ — управление, $k(t) \in \mathbb{R}^1$— текущий запас энергии управления. Матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $R(t) > 0$ считаются известными.

Предполагается, что управление стеснено двумя ограничениями. Во-первых, оно может принимать значения только из заранее определенного множества:

$$u \in \mu\mathcal{P}(t). \tag{2}$$

Такое ограничение называется геометрическим, или «жестким». В зависимости от способа выбора числа $\mu \geqslant 0$ можно рассматривать различные задачи. В данной работе анализируются два случая: когда $\mu$ — постоянное число (тогда считается $\mu \equiv 1$), и когда оно зависит от текущего резерва ($\mu = \mu(k(t))$).

Во-вторых, управление обязано следить за значением резерва $k(t)$ и не допускать его падения ниже определенного уровня. Это «мягкое», или интегральное ограничение. Сочетание геометрического и интегрального ограничений будем называть *двойным ограничением*. Чтобы обеспечить существование управлений, удовлетворяющих двойному ограничению, предполагается выполненным включение $0 \in \mathcal{P}(t)$.

Используются два класса управлений: программные управления $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$ (измеримые функции $u(t)$) и позиционные стратегии $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ (многозначные отображения $\mathcal{U}(t,x,k)$, полунепрерывные сверху по фазовым переменным). Величина класса допустимых программных управлений зависит от начального резерва $k$, поэтому используется обозначение $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$.

В данной главе преследуются следующие цели: получить необходимые и достаточные условия для программных управлений, приводящих на границу множества достижимости; вычислить функцию цены и построить с ее помощью синтез управлений, гарантирующий попадание на заданное целевое множество; указать способ вычисления множества достижимости.

В *разделе 1.2* рассматривается случай $\mu \equiv 1$. От управления требуется соблюдать фазовое ограничение $k(t) \geqslant 0$, эквивалентного интегральному ограничению для программных управлений

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k(t_0). \tag{3}$$

Для соблюдения этого требования в определение позиционных стратегий добавляется условие $\mathcal{U}(t,x,k) = \{0\}$ при $k < 0$.

Пункт 1.2.2 посвящен исследованию множества достижимости. Основной задачей здесь является следующая:

**Задача 1.1.** *Найти область достижимости $\mathcal{X}_{GI}[t_1] \subseteq \mathbb{R}^n$, то есть множество точек $x$, достижимых системой в конечный момент времени при данном резерве $k_0$ из начала координат или произвольного множества $M_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, а также для произвольного направления $\ell \in \mathbb{R}^n$ указать управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{OL}(k_0)$, обеспечивающее вывод системы в конечный момент времени на границу множества достижимости* *в этом направлении, то есть выполнение равенства*

$$\langle \ell, x(t_1) \rangle = \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_{GI}[t_1]\right). \tag{4}$$

Множество достижимости при двойном ограничении является выпуклым компактом и содержится в пересечении множеств достижимости при геометрическом ограничении $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ и при интегральном ограничении $\mathcal{X}_{\mathrm{I}}$, свойства которых приведены в теореме 1.1. При этом указанное вложение может быть строгим (примеры 1.1 и 1.3 в пункте 1.2.6).

Теорема 1.3 дает необходимое и достаточное условие в форме принципа максимума для управлений, приводящих на границу множества достижимости в фиксированном опорном направлении. Поскольку множество достижимости является выпуклым компактом, то этого достаточно, чтобы найти все его точки. Важно отметить, что в отличие от задачи с чисто геометрическим ограничением управление здесь может принимать произвольные значения из $\mathcal{P}(t)$.

В пункте 1.2.3 рассматривается задача 1.1 в обратном времени, то есть задача разрешимости:

**Задача 1.2.** *Найти область разрешимости $\mathcal{W}_{GI}[t_0] \subseteq \mathbb{R}^n$, то есть множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, стартуя из которых система может достигнуть в конечный момент заданное целевое множество $M_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ при данном резерве $k_0$, а также указать управление, обеспечивающее включение $x(t_1) \in M_1$.*

Решение задачи 1.2 дается теоремой 1.5 в виде необходимого и достаточного условия оптимальности управления. При этом множество разрешимости может быть найдено по формуле

$$\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}(t_0, k_0; t_1, M_1) = M_1 - \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_0, k_0; t_1). \tag{5}$$

Применению к рассматриваемым задачам метода динамического программирования посвящен пункт 1.2.4. Для этого задачи 1.1 и 1.2 переформулируются в терминах оптимизации расстояния до начального или целевого множества и вводится соответствующая функция цены, которая является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (теоремы 1.8 для задачи достижимости и 1.9 для разрешимости). Для задачи разрешимости оно имеет вид[1]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, B(t)u \right\rangle - \frac{\partial V}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0$$

с начальным условием $V(t_1, x, k) = d^2(x, M_1)$. Вследствие того, что имеется фазовое ограничение $k(t) \geqslant 0$, помимо начального условия у этого уравнения есть также и краевое условие вида

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{k=0} = 0,$$

означающее, что при нулевом резерве управление уже не может влиять на траекторию системы.

Множество разрешимости легко найти, зная функцию цены: это ее множество уровня [73]. Если же множество разрешимости найдено, например из (5), то можно не решая уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана вычислить функцию цены: она равна квадрату расстояния до множества разрешимости (теорема 1.9). То же самое относится и ко множеству достижимости и соответствующей функции цены (теорема 1.6).

В пункте 1.2.5 описывается способ вычисления множества достижимости при двойном ограничении, основанный на методах эллипсоидальной аппроксимации [73]. Построено параметризованное семейство эллипсоидов, дающее в пересечении в точности множество достижимости.

В *разделе 1.3* рассматривается задача, в которой управление стеснено геометрическим ограничением, нелинейно зависящим от текущего резерва:

$$u \in \mu(k(t))\mathcal{P}(t). \tag{6}$$

Интегральное ограничение при этом задается неявно. А именно, если существует конечная точка $k^* = \sup\{k \mid \mu(k) \leqslant 0,\ k < k(t_0)\}$, то автоматически выполнено фазовое ограничение $k(t) \geqslant k^*$, эквивалентное, в свою очередь, интегральному. (Добавление явного интегрального ограничения ничего существенно не изменяет, приводя лишь к появлению дополнительного условия трансверсальности).

При ограничении (6) система (1) фактически становится нелинейной, поскольку

[1] Уравнение не содержит матрицы $A(t)$: линейным преобразованием специального вида можно привести исходную систему к такому виду, что $A(t) \equiv 0$ (см. пункт 1.1.1). То же самое относится и к другим рассматриваемым задачам.

после замены $u \to \mu(k)u$ принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \mu(k(t))B(t)u, \\ \dot{k}(t) = -\mu^2(k(t))\|u\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{7}$$

В связи с возможностью такой замены удобно кроме классов управлений $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$ и $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ с ограничением (6) использовать классы управлений $\mathcal{U}'_{\mathrm{OL}}$ и $\mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$, заданные с геометрическим ограничением вида $u \in \mathcal{P}(t)$.

Задача 1.7 о нахождении множества достижимости $\mathcal{X}_{\mathrm{G(I)}}[t_1]$ дословно повторяет задачу 1.1 (с той лишь разницей, что множество допустимых программных управлений $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$ теперь определено с учетом ограничения (6)). Впрочем, более удобным оказывается вместо нее рассматривать задачу о максимизации произвольного линейного непрерывного функционала:

**Задача 1.8.** *Найти допустимое управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{OL}$, доставляющее максимум интегральному функционалу*

$$J(u(\cdot)) = \langle h(\cdot), u(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle h(t), u(t) \rangle \,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Для решения этой задачи вначале применяется принцип максимума Л. С. Понтрягина (теорема 1.15). Далее в теореме 1.17 полученные соотношения конкретизируются для случая эллипсоидального множества $\mathcal{P}(t)$.

В пункте 1.3.3 доказывается существование решения задачи 1.8 (теорема 1.23). Доказательство основывается на трех леммах, в которых утверждается соответственно выпуклость, ограниченность и замкнутость множества допустимых управлений $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$.

Если в случае выполнения теоремы о существовании решения принципу максимума удовлетворяет только одно управление, то это управление очевидно является оптимальным. Таким образом, в условиях этой теоремы принцип максимума в совокупности с единственностью решения прямой и двойственной системы является достаточным условием оптимальности. Если существует несколько пар $\{u(t), \psi(t)\}$, удовлетворяющих принципу максимума, то в силу существования решения и необходимости принципа максимума среди этих пар будет оптимальное управление. Следовательно, при выполнении условий теоремы о существовании решения для нахождения оптимального управления достаточно перебрать все решения системы из принципа максимума.

В пункте 1.3.4 доказана теорема о единственности решения задачи 1.8 при некоторых предположениях на функцию $\mu(\cdot)$ и при выполнении *условия общности положения*, заключающегося в том, что для всех чисел $\delta > 0$ выполнено

$$\int_{t_1-\delta}^{t_1} \|h(t)\|^2 \, \mathrm{d}t > 0.$$

Пункт 1.3.5 посвящен отысканию оптимального управления. Для этого отрезок времени $T = [t_0, t_1]$ разделяется на два подмножества: в первом геометрическое ограничение неактивно, и соответствующий множитель Лагранжа $\lambda = 0$; во втором, напротив, геометрическое ограничение активно, и $\lambda > 0$.

В случае автономной управляемой системы с монотонной функцией $\mu(k)$ в начале траектории $\lambda = 0$, а затем, начиная с некоторого момента $\theta$ и до конечного момента $\lambda > 0$. Для эллипсоидального геометрического ограничения $\mathcal{P}$ можно аналитически найти момент $\theta$, и, следовательно, оптимальную траекторию управления.

В общем случае таких моментов переключения может быть сколь угодно много, и найти их аналитически не представляется возможным, однако задачу нахождения оптимальной траектории можно свести к решению одномерного нелинейного уравнения для начального значения сопряженной переменной $\psi$. После решения этого уравнения каким-либо численным методом мы получаем полные начальные условия задачи Коши для прямой и двойственной системы, и, следовательно, можем найти оптимальную траекторию.

В пункте 1.3.6 решается задача 1.9 о синтезе управлений, в которой требуется указать позиционную стратегию $\mathcal{U} \in \mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$, при которой решения дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \mu(k)B(t)u \\ -\mu^2(k)\|u\|^2_{R(t)} \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}(t, x, k) \right\},$$

выпущенные из произвольной точки $(x(t_0), k(t_0)) = (x_0, k_0)$, оказываются в конечный момент на минимально возможном расстоянии от целевого множества $\mathcal{M}(k(t_1))$, а также найти это расстояние $V(t, x, k)$ для каждой точки $(t, x, k) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Функция цены $V(t, x, k)$ является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, \mu(k)B(t)u \right\rangle - \mu^2(k) \frac{\partial V}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0$$

с начальным условием $V(t_1, x, k) = d(x, \mathcal{M}(k))$ и равна расстоянию от текущей позиции до множества разрешимости.

Во **второй главе** диссертации рассматривается задача синтеза гарантирующих управлений при двойном ограничении в случае наличия в системе неопределенности, стесненной геометрическим ограничением.

Рассматривается линейная управляемая система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{9}$$

В отличие от (1), здесь присутствует заранее неизвестная помеха $v$, на которую наложено геометрическое ограничение $v \in \mathcal{Q}(t)$. Управление, как и раньше, стеснено двойным ограничением: геометрическим (2) и интегральным (3). Здесь матрицу $A(t)$ также можно считать нулевой, а матрицу $C(t)$ — единичной (заменив множество $\mathcal{Q}(t)$ на $C(t)\mathcal{Q}(t)$).

Как и в первой главе, рассматриваются два класса управлений: программные управления $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$ и позиционные стратегии $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$. Поскольку в системе есть неизвестная помеха, то использование позиционных стратегий дает существенно больше возможностей, чем применение программных управлений.

Состояние системы (9) описывается парой $(x, k) \in \mathbb{R}^{n+1}$, что позволяет сформулировать принцип оптимальности [4] для данной задачи. Следовательно, целевое множество и множество разрешимости должны рассматриваться как подмножества $\mathbb{R}^{n+1}$; однако по ряду причин удобнее работать со множествами в пространстве $\mathbb{R}^n$, для чего вводится понятие *сечения*.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $(x, k)$ задано множество $\mathcal{N}$. Будем называть сечениями множества $\mathcal{N}$ значения следующего многозначного отображения: $\mathcal{N}(k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, k) \in \mathcal{N}\}$. Само множество $\mathcal{N}$ однозначно восстанавливается по своим сечениям, поскольку является графиком многозначного отображения $\mathcal{N}(k)$. При этом выпуклость всех множеств $\mathcal{N}(k)$ не означает выпуклости множества $\mathcal{N}$. Этот факт позволяет в некоторых случаях ослабить требование выпуклости целевого множества (и, следовательно, множества разрешимости) до требования выпуклости всех его сечений.

Пусть задано такое непустое целевое множество $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, что 1) $\mathcal{M}(k_1) \subseteq \mathcal{M}(k_2)$, если $k_1 \leqslant k_2$; 2) $\mathcal{M}(k) = \varnothing$ при $k < 0$; 3) $\mathcal{M}(k)$ непрерывно при тех $k$, где $\mathcal{M}(k) \neq \varnothing$; 4) множества $\mathcal{M}(k)$ являются выпуклыми компактами. Класс отображений $\mathbb{R} \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$, обладающих свойствами 1)–4), обозначим через $\mathfrak{M}$. Часть результатов будет приведена для более узкого класса множеств $\mathfrak{M}'$, получаемого заменой свойства 4) на более сильное: 4') множество $\mathcal{M}$ является выпуклым.

В *разделе 2.2* ставится основная задача второй главы:

**Задача 2.1.** *Указать множество разрешимости $\mathcal{W}[t_0] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, а также позиционную стратегию управления $\mathcal{U}(t,x,k) \in \mathcal{U}_{CL}$, такие, что все траектории дифференциального включения*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} B(t)u \\ -\|u\|^2_{R(t)} \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}(t,x,k) \right\} + \mathcal{Q}(t) \times \{0\}, \tag{10}$$

*начинающиеся в точке $(t, x(t), k(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $(x(t), k(t)) \in \mathcal{W}[t]$, в конечный момент удовлетворяют включению $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$.*

Взятие выпуклой оболочки в (10) не увеличивает возможностей управлению, поскольку оно добавляет исключительно точки, неэффективные с точки зрения управления (в них расходуется большее количество ресурсов). Отметим, что, в отличие от исходной системы (9), дифференциальное включение (10) нелинейно из-за наличия функции $\mathcal{U}(t,x,k)$. Таким образом, рассматривается задача нелинейного синтеза для системы с исходно линейной структурой.

*Раздел 2.3* показывает, как в случае выпуклого множества $\mathcal{M}$ можно получить одно из возможных решений задачи 2.1, вообще не учитывая интегрального ограничения. В самом деле, если конечная точка траектории принадлежит целевому множеству $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$, то ограничение $k(t) \geqslant 0$ выполнено автоматически в силу свойства 2) класса $\mathfrak{M}$. Это позволяет рассматривать задачу 2.1 как задачу о синтезе управлений в условиях неопределенности при геометрических ограничениях [73, 29]. Если $\mathcal{U}'(t,x,k)$ — синтез управлений, построенный таким способом, то управление

$$\mathcal{U}(t,x,k) = \begin{cases} \mathcal{U}'(t,x,k), & k \geqslant 0; \\ \{0\}, & k < 0. \end{cases}$$

является решением задачи 2.1.

Однако у такого подхода есть существенные недостатки. В частности, если синтез $\mathcal{U}'(t,x,k)$ обладает экстремальными свойствами, например, минимизирует расстояние до целевого множества, то синтез $\mathcal{U}(t,x,k)$ уже не будет экстремальным в таком смысле. Кроме того, при этом предполагается выпуклость целевого множества $\mathcal{M}$, а не только его сечений $\mathcal{M}(k)$. Поэтому последующие разделы посвящены решению задачи 2.1 с учетом ее специфики, то есть наличия интегрального ограничения.

*Раздел 2.4* посвящен построению аналога альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина для данной задачи, следуя работам [48, 1, 40]. Для этой цели вначале определяются множества программной разрешимости — максиминное $W^+$ и минимаксное $W^-$. Эти множества представляют собой грубые оценки множества разрешимости $\mathcal{W}$ решаемой задачи сверху и снизу соответственно, поскольку они состоят из тех состояний систему, из которых целевое множество достижимо при заранее известной или, соответственно, неизвестной помехе.

Лемма 2.3 дает явные выражения для множеств программной разрешимости через сечения целевого множества и множество достижимости при двойном ограничении, изученное, в разделе 1.2. Используя эти формулы, строятся альтернированные интегральные суммы. Для этого на отрезке $[t, t_1]$ вводится разбиение $\mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i=0}^m$. Точки этого разбиения можно интерпретировать как *моменты коррекции*. В конечный момент интегральные суммы совпадают с целевым множеством. На каждом шаге выбирается ближайший слева момент коррекции и строятся для него программные множества разрешимости. Затем каждое из этих множеств принимается за новое целевое множество, выбирается предыдущий момент коррекции, снова строятся программные множества разрешимости, и так продолжается до тех пор, пока мы не оказываемся в самой левой точке разбиения со множествами, обозначаемыми $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k, t]$ и $\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k, t]$ — это интегральные суммы, соответствующие разбиению $\mathcal{T}$. (Отметим, что это подмножества $\mathbb{R}^n$, то есть их можно рассматривать как сечения множеств $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[t]$ и $\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[t]$).

Если при стремлении диаметра разбиения $\mathcal{T}$ к нулю существуют хаусдорфовы пределы интегральных сумм $\mathcal{I}^+[k, t]$ и $\mathcal{I}^-[k, t]$, то последние называются соответственно верхним и нижним альтернированным интегралом. Если они к тому же совпадают между собой и равны $\mathcal{I}[k, t]$, то это множество называется альтернированным интегралом и совпадает со множеством разрешимости.

В случае выпуклого целевого множества (пункт 2.4.3) классические теоремы о существовании альтернированного интеграла гарантируют существование $\mathcal{I}[k, t]$ при определенных предположениях о непустоте внутренности сечений интегральных сумм (теорема 2.6).

В *разделе 2.5* рассматривается задача синтеза гарантирующих управлений. Вначале исследуется вопрос о построении такого управления, которое минимизировало бы в конечный момент расстояние от конца траектории до сечения целевого множества, то есть $d(x(t_1), \mathcal{M}(k(t_1)))$. В связи с этим вводится соответствующая функция цены, которая является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, B(t)u + v \right\rangle - \frac{\partial V}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0,$$
$$t_0 \leqslant t < t_1, \quad k > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Как и в первой главе, помимо начального условия $V(t_1, x, k) = d(x, \mathcal{M}(k))$ у этого уравнения имеется также и краевое условие

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, v \right\rangle \Big|_{k=0} = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

означающее невозможность для управления принимать какие-либо действия при исчерпании резерва. Если найдена функция цены, то управление может быть найдено как множество элементов, на которых достигается минимум в уравнении HJBI. Однако в отличие от задачи без неопределенности, здесь функция цены не обязательно равна расстоянию до сечения множества разрешимости, а только лишь не превосходит последнее (теорема 2.7).

Чтобы избежать необходимости вычислять функцию цены, применена модифицированная экстремальная конструкция. В теореме 2.9 доказано, что множество достижимости при двойном ограничении отличается от пересечения множеств достижимости при интегральном и при геометрическом ограничениях на величину второго порядка малости относительно длины отрезка времени, поэтому многозначное отображение $\mathcal{Z}[k, t]$, слабо инвариантное относительно дифференциального включения (10), будет удовлетворять уравнению эволюционного типа [65]

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} \sigma^{-1} h_+ \left( \mathcal{Z}[k,t] + \sigma \mathcal{Q}(t), \bigcup_{0 \leqslant \gamma \leqslant k} \mathcal{Z}[\gamma, t+\sigma] - \sigma \mathcal{P}(t) \cap \mathcal{E}\left(0, (k-\gamma)\sigma R^{-1}(t)\right) \right) = 0,$$

в которое не входит операция вычисления множества достижимости при двойном ограничении.

Теорема 2.12 утверждает, что если слабо инвариантное отображение достаточно гладкое, то квадрат расстояния до него удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\min_{u \in \mathcal{P}(t)} \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \frac{\mathrm{d} d^2(x(t), \mathcal{Z}[k(t), t])}{\mathrm{d}t} \leqslant 0. \tag{11}$$

Стратегией $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t, x, k)$, экстремальной к $\mathcal{Z}[k, t]$, называется позиционная стратегия, состоящая из элементов, на которых здесь достигается минимум. Из (11) следует, что если начальная точка принадлежит $\mathcal{Z}[k, t_0]$, то и все траектории системы останутся в этом слабо инвариантном множестве. Поскольку множество разрешимости является слабо инвариантным, то стратегия $\mathcal{U}_{\mathcal{W}}(t, x, k)$ представляет собой решение задачи 2.1.

**Третья глава** диссертации посвящена задаче об управлении системой с неоднотипными ограничениями: управление здесь стеснено геометрическим, а помеха — интегральным ограничением.

Рассматривается линейная управляемая система вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v(t), \\ \dot{k}(t) = -\|v(t)\|^2_{S(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{12}$$

На управление наложено только геометрическое ограничение $u \in \mathcal{P}(t)$, а помеха должна обеспечивать выполнение фазового ограничения $k(t) \geqslant 0$, эквивалентного интегральному ограничению

$$\int_{t_0}^{t_1} \|v(t)\|^2_{S(t)} \, \mathrm{d}t \leqslant k_0. \tag{13}$$

В *разделе 3.1* показывается, что, если управлению недоступна информация о текущем значении $k(t)$, то система может быть преобразована так, что ее вид аналогичен (12), но при этом уже известно значения $k(t)$, а матрица $C(t) \equiv I$. Кроме того, как и в предыдущих главах, матрицу $A(t)$ можно считать нулевой.

В *разделе 3.2* приводится постановка основной задачи:

**Задача 3.1.** *Для данного целевого множества* $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ *найти* множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ *и позиционную стратегию управления* $\mathcal{U}(t, x, k) \in \mathcal{U}_{CL}$, *такую, что все его траектории дифференциального включения*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(t, x, k) \times \{0\} + \begin{pmatrix} v(t) \\ -\|v(t)\|^2_{S(t)} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

*выпущенные из любой начальной позиции* $(t, x, k)$, $t \in T$, $(x, k) \in \mathcal{W}[t]$, *достигали бы целевое множество* $\mathcal{M}$ *в момент времени* $t_1$, *какова бы ни была измеримая помеха* $v(t)$, *удовлетворяющая ограничению* (13).

Поскольку множество разрешимости здесь как правило является невыпуклым, то как и в предыдущей главе мы будем работать с его сечениями, обозначаемыми $\mathcal{W}[k, t]$, и сечениями целевого множества $\mathcal{M}(k)$.

Решение задачи 3.1 ведется по той же схеме, что и во второй главе. В *разделе 3.3* производится построение альтернированного интеграла. Непосредственному применению стандартной схемы мешает то, что помеха не содержится ни в каком множестве и, соответственно, непонятно, какое множество должно участвовать в операции геометрической разности, входящей в выражение для программных множеств разрешимости. В диссертации указанная трудность преодолевается, вычислив множество разрешимости при каждом возможном значении переменной $k$ в конечный момент (при этом множество возможных значений интеграла от помехи является эллипсоидом $\sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t,t_1)$) и взяв затем пересечение этих множеств (поскольку помеха имеет возможность выбрать наихудшее для управления значение $k(t_1)$):

$$W^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \left( \mathcal{M}(\gamma) - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t,t_1) \right\}.$$

В *разделе 3.4* вводится функция цены для экстремальной переформулировки задачи 3.1 и доказывается, что при предположении о ее гладкости она является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u\in\mathcal{P}(t)} \max_{v\in\mathbb{R}^n} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, u+v \right\rangle - \|v\|_S^2 \frac{\partial V}{\partial k} \right\} = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad k>0$$

с граничным условием $\partial V/\partial t + \min_{u\in\mathcal{P}(t)} \langle \partial V/\partial x, u\rangle\big|_{k=0} = 0$ и начальным условием $V(t_1,x,k) = d^2(x,\mathcal{M}(k))$, и не превосходит квадрата расстояния до сечения множества разрешимости (теорема 3.17).

Если $\mathcal{Z}[k,t]$ — слабо инвариантное многозначное отображение, то экстремальной стратегией к нему будет

$$\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)} \left\langle \frac{\partial d^2(x,\mathcal{Z}[k,t])}{\partial x}, u \right\rangle.$$

Эта стратегия гарантирует, что траектории системы, начинающиеся в трубке $\mathcal{Z}$, в последующие моменты не выходят за ее пределы (теорема 3.19).

В *разделе 3.5* подробно рассматривается случай одномерного пространства переменной $x$ (фазовое пространство системы (12) при этом двухмерное, потому что кроме $x$ имеется переменная $k$). Получены явное выражение для альтернированного интеграла (теорема 3.22). Доказано, что функция цены принадлежит классу функций вида $(d(x,[a,b])+h)^2$, т.е. определяется всего тремя параметрами (при этом $[a,b]=\mathcal{W}[k,t]$, если $h=0$).

Чтобы проиллюстрировать полученные теоретические результаты, в разделах 1.2.6, 1.3.7, 2.6 и 3.6 собраны примеры к соответствующим главам.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [8–10, 69].

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Борисовичу Куржанскому за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы. Особо следует отметить, что для автора первым источником знаний по используемым в диссертации подходам были лекции А. Б. Куржанского по курсу «Динамическое программирование и процессы управления».

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы «Университеты России — Фундаментальные исследования» (грант № УР.3.3.07), РФФИ (грант № 03-01-00663) и гранта Президента России по поддержке ведущих научных школ (№ НШ-1889.2003.1).

# Основные обозначения

В этом разделе собраны обозначения, используемые в работе.

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | — | множество вещественных чисел |
| $\mathbb{R}^n$ | — | $n$-мерное евклидово пространство |
| $\langle x, y\rangle$ | — | скалярное произведение векторов $x$ и $y$ |
| $\\|x\\|$ | — | евклидова норма вектора $x$, равная $\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ |
| $\\|x\\|_A$ | — | (полу)норма вектора $x$, равная $\langle x, Ax\rangle^{\frac{1}{2}}$ для положительно (неотрицательно) определенной матрицы $A$ |
| $A^T$ | — | транспонированная матрица $A$ |
| $I$ | — | единичная матрица, размерность которой ясна из контекста |
| $\mathcal{B}_r^n$ | — | $n$-мерный шар радиуса $r$ с центром в начале координат, равный $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \\|x\\| \leqslant r\}$ (если размерность понятна из контекста, обозначается также $\mathcal{B}_r$) |
| $\mathcal{E}\left(q, Q\right)$ | — | эллипсоид с центром в точке $q$ и матрицей конфигурации $Q$: $$\mathcal{E}\left(q, Q\right) = \left\{ x \;\middle|\; \langle \ell, x - q\rangle \leqslant \\|\ell\\|_Q,\ \forall \ell \in \mathbb{R}^n \right\}.$$ |
| $f^*(\cdot)$ | — | сопряженная (по Фенхелю) функция к $f(\cdot)$: $$f^*(\ell) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle \ell, x\rangle - f(x)\}$$ |
| $\operatorname{conv} f(\cdot)$ | — | выпуклая замкнутая оболочка функции $f(x)$, равная $f^{**}(x)$ |
| $\rho\left(\ell \mid A\right)$ | — | опорная функция множества $A$ в направлении $\ell$: $$\rho\left(\ell \mid A\right) = \sup_{x \in A} \langle \ell, x\rangle.$$ |
| $\operatorname{cl} A$ | — | замыкание множества $A$ |
| $\operatorname{int} A$ | — | внутренность множества $A$ |
| $\operatorname{ri} A$ | — | относительная внутренность выпуклого множества $A$ |
| $\operatorname{diam} A$ | — | диаметр множества $A$: $$\operatorname{diam} A = \sup_{x \in A} \\|x\\|.$$ |
| $\operatorname{meas} A$ | — | мера Лебега множества $A$ |
| $\operatorname{pr}_A x$ | — | проекция точки $x$ на множество $A$ |
| $A + B$ | — | алгебраическая сумма множеств $A$ и $B$: $$A + B = \{x = a + b \mid a \in A, b \in B\}$$ |

$A \dot{-} B$ — геометрическая разность (Минковского) множеств $A$ и $B$:

$$A \dot{-} B = \{\, x \mid x + B \subseteq A \}$$

$h_+(X,Y)$ — хаусдорфово полурасстояние между компактами $X$ и $Y$:

$$h_+(X,Y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \|x - y\| = \min \{\, r \geqslant 0 \mid X \subseteq Y + B_r \},$$
$$h_-(X,Y) = h_+(Y,X).$$

$h(X,Y)$ — хаусдорфово расстояние между компактами $X$ и $Y$:

$$h(X,Y) = \max \{ h_+(X,Y),\, h_-(X,Y) \}.$$

$d(x,A)$ — евклидово расстояние от точки $x$ до множества $A$:

$$d(x,A) = h_+(\{x\}, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

$\nabla f(x)$ — градиент функции $f(\cdot)$, взятый в точке $x$

$\dot{x}(t)$ — полная производная по времени

$x[\tau_1, \tau_2]$ — сужение функции $t \to x(t)$ на отрезок $[\tau_1, \tau_2]$

$a \vee b$ — максимальное из чисел $a$ и $b$

$a \wedge b$ — минимальное из чисел $a$ и $b$

# Глава 1

# Задачи управления при двойном ограничении

## 1.1 Введение

В этой главе мы рассмотрим задачу об управлении линейной системой без неопределенности в условиях двойного ограничения на управляющие воздействия. Управляемая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — *положение* системы, $u \in \mathbb{R}^{n_p}$ — *управление*, $k(t) \in \mathbb{R}^1$— текущий *запас энергии* управления. Матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $R(t)$ являются известными параметрами системы и обладают достаточной гладкостью, кроме того матрица $R(t)$ положительно определена.

Считается, что управление стеснено геометрическим, или «жестким» ограничением, то есть способно принимать значение только из определенного множества:

$$u \in \mu\mathcal{P}(t), \tag{1.2}$$

где $\mu$ — некоторое неотрицательное число. Мы будем изучать два основных способа выбора $\mu$: как постоянное значение и как функцию от резерва $k(t)$.

Кроме геометрического, управление подчиняется также интегральному, или «мягкому» ограничению, смысл которого заключается в том, что управление обладает конечным запасом энергии, и управляющие воздействия должны быть выбраны так, чтобы уложиться в этот запас. Более четкая формулировка интегрального ограничения будет дана чуть ниже, вместе со способами выбора значений $\mu$.

Для того, чтобы гарантировать существование допустимых управлений, удовлетворяющих и геометрическому, и интегральному ограничениям, мы предположим, что множество $\mathcal{P}(t)$ содержит начало координат. Важным частным случаем геометрического ограничения (1.2) является эллипсоидальное ограничение вида

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}\left(0, P^{-1}(t)\right) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{n_p} \;\middle|\; \|u\|^2_{P(t)} \leqslant 1 \right\}. \tag{1.3}$$

Управление $u$ может принадлежать одному из следующих двух классов:

1. *программные управления* $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$ — измеримые функции $u(\cdot) : T \to \mathbb{R}^{n_p}$, гарантирующие существование, единственность и продолжаемость на весь отрезок $T$ решения системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ \dot{k}(t) = -\|u(t)\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1.4}$$
а также обеспечивающие выполнение геометрического ограничения (1.2) и соответствующего интегрального ограничения;

2. *позиционные стратегии* $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ — многозначные отображения $\mathcal{U}(\cdot,\cdot,\cdot) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^{n_p}$, гарантирующие существование и продолжаемость на отрезок $T$ решений дифференциального включения[1]
$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} A(t)x(t) + B(t)u \\ -\|u\|^2_{R(t)} \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}(t,x,k) \right\}, \tag{1.5}$$
а также удовлетворяющие геометрическому ограничению $\mathcal{U}(t,x,k) \in \mu\mathcal{P}(t)$ и соответствующему интегральному ограничению.

В данном случае, в отсутствие неопределенности, возможность решения задачи не зависит от того, какие стратегии управления используются — программные или позиционные, то есть множества достижимости и разрешимости для обоих этих классов управлений совпадают [73].

В данной главе преследуются следующие цели:

[1] Операция взятия выпуклой оболочки в правой части (1.5) появляется их чисто технических соображений и не увеличивает возможностей управления, так как добавляет только такие точки, которые не являются оптимальными.

1. вычислить функцию цены и построить с ее помощью синтез управлений, гарантирующий попадание на заданное целевое множество;

2. получить необходимые и достаточные условиям для программных управлений, приводящих на границу множества достижимости;

3. указать способ вычисления множества достижимости.

**Постоянное значение** $\mu$ (раздел 1.2). Пусть значение $\mu$ зафиксировано, положительно и не меняется с течением времени. Поскольку можно переобозначить $\mu\mathcal{P}(t) \to \mathcal{P}(t)$, то можно считать, что $\mu = 1$.

В этом случае будем требовать от программных управлений соблюдения фазового ограничения

$$k(t) \geqslant 0, \tag{1.6}$$

эквивалентного интегральному ограничению

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k(t_0),$$

а позиционные стратегии будем определять таким образом, что $\mathcal{U}(t,x,k) = \{0\}$ при $k < 0$ — это обеспечивает выполнение фазового ограничения (1.6).

Вообще говоря, можно было бы рассматривать фазовое ограничение немного более общего вида по сравнению с (1.6): $k(t) \geqslant k_1$, однако в данных условиях имеет значение лишь разность между начальным и конечным значениями переменной $k$, то есть задачи с условиями

$$\begin{cases} k(t_0) = k_0, \\ k(t_1) \geqslant k_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k(t_0) = k_0 - k_1, \\ k(t_1) \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

эквивалентны. Этим объясняется то, что в качестве минимального уровня резерва выбран нуль, а множество достижимости при двойном ограничении зависит от $k_0$ и $k_1$ через их разность $\Delta k = k_1 - k_0$.

Множество достижимости системы (1.4) из начала координат при начальном резерве $k_0$ на отрезке $[t_0, t_1]$ будем обозначать через $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1; t_0, k_0)$.

**Переменное значение** $\mu$ (раздел 1.3) Пусть теперь $\mu$ выбирается в зависимости от текущего значения резерва, то есть $\mu = \mu(k)$. Это означает, что область возможных значений управления зависит от фазовой переменной, что делает задачу нелинейной.

Задача будет рассматриваться без явно заданного интегрального ограничения. Это связано с тем, что если существует конечная точка

$$k^* = \sup\{\, k \mid \mu(k) \leqslant 0,\ k < k(t_0)\},$$

то автоматически выполнено фазовое ограничение[2] $k(t) \geqslant k^*$, эквивалентное, в свою очередь, соответствующему интегральному ограничению с начальным резервом $k(t_0) - k^*$. Добавление дополнительного интегрального ограничения вида $k(t) \geqslant k_1$ принципиально ничего не изменяет в решении задачи.

В силу нелинейности, возникающей в следствие зависимости множества возможных значений управления от фазовой переменной, задачи с условиями (1.7) уже не эквивалентны, как это было в случае постоянного значения $\mu$. Здесь становятся важными именно начальное и конечное значение $k_0$ и $k_1$, а не их разность, поэтому оба этих значения присутствуют среди аргументов множества достижимости. Мы будем обозначать последнее через $\mathcal{X}_{\mathrm{G(I)}}(t_0, k_0; t_1, k_1)$.

### 1.1.1 Сведение к системе с нулевой линейной динамикой

Система (1.1) может быть невырожденным линейным преобразованием избавлена от линейной динамики $A(t)x(t)$, то есть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = B(t)u, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)}, \end{cases} \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{1.8}$$

Для этого потребуется найти *фундаментальную матрицу* $\Phi(t,\tau)$ для однородного уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, решив систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t,\tau), \quad \Phi(\tau,\tau) = I.$$

Отметим важные свойства фундаментальной матрицы [52, 46, 60]:

1. Если $x(t)$ — решение однородного уравнения с начальным условием $x(\tau) = x_\tau$, то $x(t) = \Phi(t,\tau)x_\tau$. Иными словами, матрица $\Phi(t,\tau)$ переводит позицию $x$ в момент времени $\tau$ в соответствующую ему позицию в момент времени $t$.

[2]Более того, при определенных предположениях о функции $\mu(\cdot)$ фазовое ограничение всегда выполнено в строгой форме: $k(t) > k^*$ (см. лемму 1.19).

2. $\Phi(t, t) = I$.

3. Матрица $\Phi(\tau, t)$ также является решением системы

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t, \tau) A, \quad \Phi(t, t) = I. \tag{1.9}$$

4. $\Phi(t, \theta)\Phi(\theta, \tau) = \Phi(t, \tau)$.

5. Матрица $\Phi(t, \tau)$ всегда невырожденная, и $\Phi(t, \tau)^{-1} = \Phi(\tau, t)$.

Введем новую переменную

$$x_0(t) = \Phi(\tau, t) x(t), \tag{1.10}$$

где $\tau \in [t_0, t_1]$ — некоторый фиксированный момент времени (обычно бывает удобно выбрать $\tau = t_0$ или $\tau = t_1$). В силу свойства 5 обратный переход будет осуществляться по формуле $x(t) = \Phi(t, \tau) x_0(t)$.

Геометрический смысл подобной замены состоит в том, чтобы для каждого момента $t$ заменить состояние системы $x(t)$ на соответствующее ему состояние в момент $\tau$. Поскольку после такой замены все значения переменной $x_0(t)$ соответствуют одному и тому же моменту $\tau$, то естественно ожидать, что линейная часть динамики системы станет нулевой. В самом деле, легко проверить, что после замены система (1.1) приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = B_0(t) u = \Phi(\tau, t) B(t) u, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1].$$

Опустив здесь нулевые индексы у $x_0$ и $B_0$, мы получаем в точности систему (1.8). Поскольку преобразование (1.10) невырожденное, то $\operatorname{rank} B_0(t) \equiv \operatorname{rank} B(t)$.

Необходимо учесть, что в результате замены (1.10) изменяются также начальное и целевое множества. Именно здесь удобно распорядиться свободой в выборе момента $\tau$: если решается задача достижимости, то взяв $\tau = t_0$, мы не изменим начальное множество в силу свойства 2. Напротив, выбор $\tau = t_1$ не меняет целевое множество.

Итак, без ограничения общности можно считать, что $A(t) \equiv 0$. Для применения излагаемых результатов к системам с ненулевой динамикой необходимо вначале выполнить замену (1.10), затем произвести все необходимые вычисления и произвести обратную замену. Например, если для системы с нулевой динамикой найдено множество достижимости $\mathcal{X}_0(t_0, t)$ и позиционная стратегия управления $\mathcal{U}_0(t, x, k)$, то обратный переход будет производиться по формулам

$$\mathcal{X}(t_0, t) = \Phi(t, \tau)\mathcal{X}_0(t_0, t), \qquad \mathcal{U}(t, x, k) = \mathcal{U}_0(t, \Phi(\tau, t)x, k). \tag{1.11}$$

Отметим, что все выкладки можно было бы проделать и непосредственно для системы с ненулевой матрицей $A(t)$.

## 1.2 Управление при геометрическом и интегральном ограничении

### 1.2.1 Постановка задачи

Рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = B(t)u(t), \\ \dot{k}(t) = -\|u(t)\|^2_{R(t)}, \end{cases} \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{1.12}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — *фазовый вектор* системы, $u \in \mathbb{R}^{n_p}$ — *управление*, $k(t) \in \mathbb{R}^1$ — текущий *запас энергии* управления.

Управление $u$ при почти всех $t \in T$ стеснено *геометрическим ограничением*

$$u \in \mathcal{P}(t), \quad \forall \textit{п.в.}\, t \in T. \tag{1.13}$$

Кроме того должно выполняться *фазовое ограничение*

$$k(t) \geqslant 0, \quad \forall t \in T, \tag{1.14}$$

эквивалентное *интегральному ограничению на управление*

$$\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2_{R(\tau)}\, \mathrm{d}\tau \leqslant k(t_0) = k_0, \quad \forall t \in T. \tag{1.15}$$

Многозначное отображение $\mathcal{P}(t)$ является непрерывным по Хаусдорфу, а все его значения $\mathcal{P}(t)$ содержат нулевой вектор: это предположение сделано с целью обеспечить существование управлений, удовлетворяющих обоим ограничениям.

Матрицы $B(t)$ и $R(t)$ являются заранее известными параметрами системы, которые мы будем считать непрерывно дифференцируемыми. Матрица $R(t)$ положительно определена, а относительно $B(t)$ потребуем, чтобы система

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t) \tag{1.16}$$

была *вполне управляемой* на отрезках $[t_0, t]$ и $[t, t_1]$ при любых $t$ из интервала $(t_0, t_1)$, то есть матрицы

$$\tilde{W}_0(t) = \int_{t_0}^{t} B(s)B^T(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{и} \qquad \tilde{W}_1(t) = \int_{t}^{t_1} B(s)B^T(s)\,\mathrm{d}s$$

являются невырожденными при $t \in (t_0, t_1)$. Отсюда следует, что и матрицы

$$W_0(t) = \int_{t_0}^{t} B(s)R^{-1}(t)B^T(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{и} \qquad W_1(t) = \int_{t}^{t_1} B(s)R^{-1}(t)B^T(s)\,\mathrm{d}s$$

также будут будут обратимы при $t \in (t_0, t_1)$, поскольку умножение матрицы $B(t)$ на невырожденную матрицу $R^{-\frac{1}{2}}(t)$ не повлияет на управляемость системы.

Будем рассматривать следующие классы управлений:

1. *программные управления* $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}} = \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k_0)$ — измеримые функции $u(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^{n_p}$, удовлетворяющие геометрическому ограничению (1.13) и интегральному ограничению (1.15). Такие управления гарантируют существование и единственность решений траекторий системы (1.12).

2. *позиционные стратегии* $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ — многозначные отображения $\mathcal{U}\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^{n_p}$, полунепрерывные сверху по переменным $(x, k)$ и измеримые по $t$, удовлетворяющие вложению $\mathcal{U}(t, x, k) \subseteq \mathcal{P}(t)$ и условию $\mathcal{U}(t, x, k) = \{0\}$ при $k < 0$. Такие стратегии гарантируют существование и продолжаемость решений дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} B(t)u \\ -\|u\|^2_{R(t)} \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}(t, x, k) \right\} \tag{1.17}$$

   и выполнение фазового ограничения (1.14).

Помимо указанных основных классов будет удобно ввести еще два вспомогательных класса программных управлений:

3. *управления с геометрическим ограничением* $\mathcal{U}_{\mathrm{G}}$ — измеримые функции $u(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^{n_p}$, удовлетворяющие геометрическому ограничению (1.13).

4. *управления с интегральным ограничением* $\mathcal{U}_{\mathrm{I}} = \mathcal{U}_{\mathrm{I}}(k_0)$ — суммируемые функции $u(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^{n_p}$, удовлетворяющие интегральному ограничению (1.15).

Данный раздел посвящен решению следующих задач:

**Задача 1.1.** *Найти область достижимости $\mathcal{X}_{GI}[t_1] \subseteq \mathbb{R}^n$, то есть множество точек $x$, достижимых системой в конечный момент времени при данном резерве $k_0$ из начала координат или произвольного множества $M_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, а также для произвольного направления $\ell \in \mathbb{R}^n$ указать управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{OL}(k_0)$, обеспечивающее вывод системы в конечный момент времени на границу множества достижимости в этом направлении:*

$$\langle \ell, x(t_1) \rangle = \rho\,(\,\ell \mid\, \mathcal{X}_{GI}[t_1])\,. \tag{1.18}$$

**Задача 1.2.** *Найти область разрешимости $\mathcal{W}_{GI}[k_0, t_0] \subseteq \mathbb{R}^n$, то есть множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, стартуя из которых система может достигнуть в конечный момент заданное целевое множество $M_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ при данном резерве $k_0$, а также указать управление, обеспечивающее включение $x(t_1) \in M_1$.*

**Задача 1.3.** *Найти область разрешимости $\mathcal{W}_{GI}[k_0, t_0] \subseteq \mathbb{R}^n$ и позиционную стратегию $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{CL}$, такие, что все траектории дифференциального включения* (1.17), *выпущенные из точки $x(t_0) \in \mathcal{W}_{GI}[k_0, t_0]$, $k(t_0) = k_0$, в конечный момент попадают на множество $M_1$.*

Еще раз подчеркнем, что в отсутствии неопределенности области разрешимости в задачах 1.2 и 1.3 совпадают.

## 1.2.2 Область достижимости

Целью этого параграфа является нахождение *области достижимости* системы из начала координат а именно, всех точек $x$, достижимых в момент $t_1$ за счет выбора управлений при указанных выше ограничениях. Обозначим указанную область достижимости как

$$\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t_1] = \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1; t_0, k_0) = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; \begin{array}{c} u(t) \in \mathcal{P}(t), \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k_0 \end{array} \right\}. \tag{1.19}$$

Приведем вначале основные свойства множеств достижимости при отдельных ограничениях и выводящих на их границу управлений[3].

[3] Отмеченные факты, рассмотренные подробно в монографии [17], здесь приведены в несколько иной форме, полезной для дальнейших выкладок.

**Теорема 1.1.** *1. Область достижимости $\mathcal{X}_{GI}[t_1]$ содержится в пересечении множеств $\mathcal{X}_G[t_1]$ и $\mathcal{X}_I[t_1]$, а именно,*

$$\mathcal{X}_{GI}[t_1] \subseteq \mathcal{X}_G[t_1] \cap \mathcal{X}_I[t_1], \tag{1.20}$$

*где $\mathcal{X}_G[t_1]$ — область достижимости только при геометрическом ограничении:*

$$\mathcal{X}_G[t_1] = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; u(t) \in \mathcal{P}(t) \right\} = \int_{t_0}^{t_1} B(t)\mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_G[t_1]\right) = \int_{t_0}^{t_1} \rho\left(B^T(t)\ell \;\middle|\; \mathcal{P}(t)\right)\,\mathrm{d}t, \tag{1.21}$$

*$\mathcal{X}_I[t_1]$ — область достижимости только при интегральном ограничении:*

$$\mathcal{X}_I[t_1] = \bigcup_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k_0 \right\},$$

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_I[t_1]\right) = \left(k_0 \int_{t_0}^{t_1} \left\|B^T(t)\ell\right\|^2_{R^{-1}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k_0\langle \ell, W_0(t_1)\ell\rangle}. \tag{1.22}$$

*2. Пусть $(x^*(\cdot), k^*(\cdot))$ — траектория системы, соответствующая управлению $u^*(\cdot)$. Для того, чтобы при геометрическом ограничении для заданного $\ell \in \mathbb{R}^n$ выполнялось равенство*

$$\langle \ell, x^*(t_1)\rangle = \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_G[t_1]\right),$$

*необходимо и достаточно, чтобы в каждый момент времени выполнялся поточечный принцип максимума*

$$\langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \max_{u(t)\in\mathcal{P}(t)} \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \rho\left(B^T(t)\ell \;\middle|\; \mathcal{P}(t)\right). \tag{1.23}$$

*3. Для того, чтобы при интегральном ограничении для заданного $\ell \in \mathbb{R}^n$ выполнялось равенство*

$$\langle \ell, x^*(t_1)\rangle = \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_I[t_1]\right),$$

*необходимо и достаточно, чтобы в ограничении (1.15) достигалось равенство и существовало число $\lambda > 0$, при котором в каждый момент выполнялось следующее условие максимума для интегрального ограничения:*

$$-\lambda\|u^*(t)\|^2_{R(t)} + \langle \ell, B(t)u^*(t)\rangle = \max_{u\in\mathbb{R}^{n_p}} \left\{-\lambda\|u\|^2_{R(t)} + \langle \ell, B(t)u\rangle\right\}. \tag{1.24}$$

*Замечание* 1.1. Вложение (1.20) в общем случае выполняется в строгом смысле (см. примеры в конце раздела). Вместе с тем, как мы увидим в следующей главе, различие между левой и правой частью в смысле метрики Хаусдорфа мало по сравнению с длиной интервала времени $T$. Это позволяет в определенных случаях, например, при вывода эволюционных уравнений, пренебрегать этим различием и заменять множество достижимости при двойном ограничении $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$ на пересечение множеств достижимости при отдельных ограничениях, $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ и $\mathcal{X}_{\mathrm{I}}$.

*Доказательство.* Из (1.19) следует, что множество $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t_1]$ содержится в каждом из множеств $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}[t_1]$ и $\mathcal{X}_{\mathrm{I}}[t_1]$, из чего сразу вытекает вложение (1.20).

Докажем формулы (1.21) и (1.23). По определению опорной функции [51] имеем

$$\left\langle \ell, \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle B^T(t)\ell, u(t)\right\rangle \mathrm{d}t \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \rho\left( B^T(t)\ell \;\middle|\; \mathcal{P}(t)\right)\,\mathrm{d}t,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда выполняется принцип максимума (1.23).

Докажем формулы (1.22) и (1.24). По неравенству Коши–Буняковского для пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n_p})$ получаем

$$\left\langle \ell, \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle R^{-\frac{1}{2}}(t)B^T(t)\ell, R^{\frac{1}{2}}(t)u(t)\right\rangle \mathrm{d}t \underset{(A)}{\leqslant}$$
$$\underset{(A)}{\leqslant} \left( \int_{t_0}^{t_1} \left\|B^T(t)\ell\right\|^2_{R^{-1}(t)} \mathrm{d}t \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \underset{(B)}{\leqslant} \left( k_0 \int_{t_0}^{t_1} \left\|B^T(t)\ell\right\|^2_{R^{-1}(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}},$$

причем равенство в $(A)$ достигается, когда функции $t \to R(t)u(t)$ и $t \to B^T(t)\ell$ сонаправлены, то есть

$$2\lambda R(t)u^*(t) = B^T(t)\ell, \tag{1.25}$$

а константа $\lambda > 0$ в (1.25) выбирается так, чтобы достигалось равенство в $(B)$. Непосредственно проверяется, что такое управление удовлетворяет условию (1.24). □

**Следствие 1.1.1.** *При геометрическом ограничении оптимальное управление $u^*_G(t)$ лежит в опорном множестве к $\mathcal{P}(t)$ в направлении $B^T(t)\ell$, а при интегральном имеет следующий вид:*

$$u^*_I(t) = \frac{1}{2\lambda} B^T(t)\ell = \frac{k_0}{\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_I[t_1]\right)} B^T(t)\ell.$$

**Следствие 1.1.2.** *Множество достижимости при интегральном ограничении является невырожденным эллипсоидом с центром в начале координат:*

$$\mathcal{X}_I[t_1] = \mathcal{E}\,(0, k_0 W_0(t_1)).$$

**Лемма 1.2.** *Множества $\mathcal{U}_I(k)$, $\mathcal{U}_G$ и $\mathcal{U}_{OL}(k)$ являются выпуклыми, замкнутыми и ограниченными в пространстве $L_2(T)$.*

*Доказательство.* Для классов $\mathcal{U}_\mathrm{I}(k)$ и $\mathcal{U}_\mathrm{G}$ утверждение очевидно, а для $\mathcal{U}_\mathrm{OL}(k)$ оно следует из того, что $\mathcal{U}_\mathrm{OL}(k) = \mathcal{U}_\mathrm{I}(k) \cap \mathcal{U}_\mathrm{G}$. □

**Следствие 1.2.1.** *Множества достижимости $\mathcal{X}_I[t_1]$, $\mathcal{X}_G[t_1]$ и $\mathcal{X}_{GI}[t_1]$ являются выпуклыми компактами.*

Принцип максимума для системы с двойным ограничением как бы совмещает в себе формулы (1.23) и (1.24):

**Теорема 1.3.** *Пусть $(x^*(\cdot), k^*(\cdot))$ — траектория системы, соответствующая управлению $u^*(\cdot)$. Тогда*

1. *Для того, чтобы в исходной задаче с двумя ограничениями для заданного $\ell \in \mathbb{R}^n$ в конечный момент достигалось равенство*

$$\langle \ell, x^*(t_1) \rangle = \rho\,(\,\ell \mid \mathcal{X}_{GI}[t_1]) \tag{1.26}$$

*необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda \geqslant 0$, такое, что в каждый момент времени выполняется принцип максимума*

$$-\lambda \|u^*(t)\|^2_{R(t)} + \langle \ell, B(t) u^*(t) \rangle = \max_{u(t) \in \mathcal{P}(t)} \Big\{ -\lambda \|u\|^2_{R(t)} + \langle \ell, B(t) u \rangle \Big\}, \tag{1.27}$$

*и условие дополняющей нежесткости*

$$\lambda k^*(t_1) = 0. \tag{1.28}$$

2. *Существует ровно одно значение $\lambda = \lambda^* \geqslant 0$, при котором возможно одновременное выполнение* (1.27) *и* (1.28).

3. *Управление, доставляющее равенство* (1.26)*, существует, а при $\lambda^* > 0$ оно единственно.*

*Доказательство.* Управление, обеспечивающее равенство (1.26), переводит систему из начала координат в точку $x^*(t_1)$ с наименьшими затратами энергии. Применяя метод принцип максимума Л. С. Понтрягина [50] к задаче оптимального управления

$$\begin{cases} J(u(\cdot)) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \to \inf, \\ x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t) = B(t)u(t), \\ x(t_1) = x^*(t_1), \quad u(t) \in \mathcal{P}(t), \end{cases}$$

получаем соотношение (1.27).

Чтобы показать достаточность принципа максимума, заметим, что множество управлений $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$ является слабо компактным в силу леммы 1.2, а функционал $J(u(\cdot))$ слабо полунепрерывен снизу (как выпуклый и полунепрерывный снизу). Следовательно [7], оптимальное управление существует.

При $\lambda = 0$ интегральное ограничение неактивно, поэтому принцип максимума (1.27) превращается в (1.23), и его достаточность очевидна. В случае $\lambda > 0$ существует ровно одно управление, удовлетворяющее принципу максимума, поскольку под знаком максимума стоит сильно вогнутая функция. Поскольку оптимальное управление существует, то оно совпадает с управлением, найденным из принципа максимума.

Поскольку при увеличении $\lambda$ управление $u^*(t)$, удовлетворяющее принципу максимума (1.27) сдвигается к началу координат, то выражение $\langle \ell, x^*(t_1) \rangle$ монотонно убывает по $\lambda$. Следовательно, существует ровно одно значение $\lambda$, при котором достигается равенство (1.26). □

Пусть теперь задано начальное множество $M_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ (будем считать, что это непустой выпуклый компакт). Найдем множество достижимости в момент $t_1$ из *начального положения* $\{t_0, x(t_0)\}$, где $x(t_0) \in M_0$. Очевидно, что

$$\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1; t_0, k_0, M_0) = \bigcup_{x_0 \in M_0} x_0 + \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1; t_0, k_0) = M_0 + \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1; t_0, k_0). \tag{1.29}$$

**Теорема 1.4.** *Для того, чтобы для заданного $\ell \in \mathbb{R}^n$ было выполнено равенство*

$$\langle \ell, x^*(t_1) \rangle = \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_{GI}(t_1; t_0, k_0, M_0)\right),$$

*необходимо и достаточно, чтобы в каждый момент выполнялся принцип максимума* (1.27), *выполнялось условие дополняющей нежесткости* (1.28) *и условие трансверсальности в начальный момент:*

$$\langle \ell, x^*(t_0) \rangle = \rho\left(\ell \mid M_0\right).$$

### 1.2.3 Область разрешимости

Рассмотрим теперь ту же задачу в обратном времени: опишем множество начальных состояний $x(t_0)$, из которых можно попасть в конечный момент в начало координат при имеющихся ограничениях на управление. Указанное множество принято называть *областью разрешимости* или «попятной областью достижимости». Обозначим это множество как

$$\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[k_0,t_0]=\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}(t_0,k_0;t_1)=\bigcup_{u(\cdot)}\left\{\int_{t_1}^{t_0}B(t)u(t)\,\mathrm{d}t\;\middle|\;\begin{array}{c}u(t)\in\mathcal{P}(t),\\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant k_0\end{array}\right\}.$$

Заметим, что из определения $\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[t_0]$ следует равенство

$$\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}(t_0,k_0;t_1)=-\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1;t_0,k_0).$$

Если вместо начала координат задано целевое множество $M_1$, то множество разрешимости можно найти как

$$\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}(t_0,k_0;t_1,M_1)=M_1+\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}(t_0,k_0;t_1).$$

После выкладок, аналогичным проделанным для множества достижимости, получаем следующее утверждение:

**Теорема 1.5.** *1. Область разрешимости содержится в пересечении множеств*

$$\mathcal{W}_{GI}[k_0,t_0]\subseteq\mathcal{W}_G[t_0]\cap\mathcal{W}_I[k_0,t_0],$$

*где $\mathcal{W}_G[t_0]$ — множество разрешимости только при геометрическом ограничении:*

$$\mathcal{W}_G[t_0]=\bigcup_{u(\cdot)}\left\{\int_{t_1}^{t_0}B(t)u(t)\,\mathrm{d}t\;\middle|\;u(t)\in\mathcal{P}(t)\right\}=\int_{t_0}^{t_1}B(t)\mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\rho\left(\ell\mid\mathcal{W}_G[t_1]\right)=\int_{t_0}^{t_1}\rho\left(-B^T(t)\ell\;\middle|\;\mathcal{P}(t)\right)\,\mathrm{d}t,$$

*а $\mathcal{W}_I[k_0,t_0]$ — множество разрешимости только при интегральном ограничении:*

$$\mathcal{W}_I[k_0,t_0]=\bigcup_{u(\cdot)}\left\{\int_{t_1}^{t_0}B(t)u(t)\,\mathrm{d}t\;\middle|\;\int_{t_0}^{t_1}\|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant k(t_0)\right\},$$

$$\rho\left(\ell\mid\mathcal{W}_I[k_0,t_0]\right)=\left(k_0\int_{t_0}^{t_1}\left\|B^T(t)\ell\right\|^2_{R^{-1}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{k_0\langle\ell,W_1(t_0)\ell\rangle}.$$

*2. Пусть* $(x^*(\cdot), k^*(\cdot))$ *— траектория системы, соответствующая управлению* $u^*(\cdot)$. *Для того, чтобы при геометрическом ограничении выполнялось равенство*

$$\langle \ell, x^*(t_0) \rangle = \rho\left(\ell \mid \mathcal{W}_G[t_0]\right),$$

*необходимо и достаточно, чтобы существовало управление, для которого в каждый момент времени выполняется равенство (принцип максимума для геометрического ограничения)*

$$\langle \ell, B(t)u^*(t) \rangle = \min_{u(t)\in\mathcal{P}(t)} \langle \ell, B(t)u \rangle = -\rho\left(-B^T(t)\ell \;\middle|\; \mathcal{P}(t)\right). \tag{1.30}$$

*и в конечный момент* $x^*(t_1) = 0$.

*3. Для того, чтобы при интегральном ограничении выполнялось равенство*

$$\langle \ell, x^*(t_0) \rangle = \rho\left(\ell \mid \mathcal{W}_I[k_0, t_0]\right),$$

*необходимо и достаточно, чтобы существовало управление* $u^*(\cdot)$*, для которого* $x^*(t_1) = 0$ *и интегральное ограничение* (1.15) *выполняется в виде равенства, и число* $\lambda > 0$*, для которых в каждый момент времени выполняется условие максимума для интегрального ограничения*

$$\lambda \|u^*(t)\|^2_{R(t)} + \langle \ell, B(t)u^*(t) \rangle = \min_{u\in\mathbb{R}^{n_p}} \left\{\lambda \|u\|^2_{R(t)} + \langle \ell, B(t)u^*(t) \rangle\right\}. \tag{1.31}$$

*4. Для того, чтобы при совместных ограничениях достигалось равенство*

$$\langle \ell, x^*(t_0) \rangle = \rho\left(\ell \mid \mathcal{W}_{GI}(t_0, k_0; t_1, M_1)\right), \tag{1.32}$$

*необходимо и достаточно, чтобы существовало управление* $u^*(t)$ *и число* $\lambda \geqslant 0$*, такие, что в каждый момент времени выполняется принцип максимума в форме*

$$\lambda \|u^*(t)\|^2_{R(t)} + \langle \ell, B(t)u^*(t) \rangle = \min_{u(t)\in\mathcal{P}(t)} \left\{\lambda \|u\|^2_{R(t)} + \langle \ell, B(t)u^*(t) \rangle\right\},$$

*выполняется условие дополняющей нежесткости*

$$\lambda(k^*(t_0) - k_0) = 0, \tag{1.33}$$

*а в конечный момент выполняется условие трансверсальности*

$$\langle \ell, x^*(t_1) \rangle = \rho\left(\ell \mid M_1\right). \tag{1.34}$$

### 1.2.4 Метод динамического программирования. Функция цены

Найденные выше формулы для областей достижимости и разрешимости были получены в статической форме, на основе неравенств выпуклого анализа. Далее приведены соотношения динамического программирования для этих задач, открывающий путь к построению синтезирующих стратегий управления.

**Задача достижимости**

Введем следующую функцию цены:

$$V(t,x,k) = \min_{x_0\in M_0} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)} \left\{ d^2\left(x, x(t)\right) \;\middle|\; x(t_0) = x_0 \right\}, \tag{1.35}$$

означающую минимальное расстояние, на которое управление может приблизить систему к точке $x$ в момент времени $t$, израсходовав не более чем $k$ единиц энергии. Возведение в квадрат здесь произведено для обеспечения необходимой гладкости функции $V$.

Указанная функция цены допускает и другую интерпретацию: это минимальное расстояние до начального множества $M_0$, при котором возможно попадание в точку $x$ в момент $t$ при запасе энергии $k$:

$$V(t,x,k) = \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)} \left\{ d^2\left(x(t_0), M_0\right) \;\middle|\; x(t) = x \right\}.$$

Очевидно, что искомая область достижимости $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1; t_0, k_0, M_0)$ будет множеством уровня указанной выше функции цены:

$$\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1; t_0, k_0, M_0) = \{x \mid V(t_1, x, k_0) \leqslant 0\}.$$

Можно перейти и в обратную сторону, от множества достижимости к функции цены, используя следующее утверждение:

**Теорема 1.6.** *Функция цены равна квадрату расстояния до множества достижимости:*

$$V(t,x,k) = d^2\left(x, \mathcal{X}_{GI}(t; t_0, k, M_0)\right).$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулой

$$d^2(x, M) = \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle - \rho\left(\ell \mid M\right) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\},$$

тогда

$$V(t,x,k) = \min_{x_0\in M_0} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)} \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle - \langle \ell, x_0\rangle - \int_{t_0}^{t} \langle \ell, B(\tau)u(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\}.$$

Функция в фигурных скобках линейна по $u(\cdot)$ и $x_0$, вогнута по $\ell$ и стремится к бесконечности при $\|\ell\| \to \infty$. Следовательно, операции взятия минимума и максимума перестановочны [78], и можно продолжить равенство:

$$\begin{aligned} V(t,x,k) &= \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \min_{x_0\in M_0} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)} \left\{ \langle \ell, x\rangle - \int_{t_0}^{t} \langle \ell, B(\tau)u(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = \\ &= \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle - \rho\left(\ell \mid M_0\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t;t_0,k)\right) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = \\ &= \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t;t_0,k,M_0)\right) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = d^2\left(x, \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t;t_0,k,M_0)\right). \quad \square \end{aligned} \tag{1.36}$$

**Лемма 1.7.** *Опорная функция множества достижимости $\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_{GI}(t_1;t_0,k)\right)$ является вогнутой по переменной $k$ для всех направлений $\ell \in \mathbb{R}^n$.*

*Доказательство.* Пусть $x_i \in \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1;t_0,k_i)$, $i = 1,2$, и $\alpha \in (0,1)$. Покажем, что точка $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t_1;t_0,k_\alpha)$, где $k_\alpha = \alpha k_1 + (1-\alpha)k_2$. Для этого возьмем управления $u_1 \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k_1)$ и $u_2 \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k_2)$, соответствующие точкам $x_1$ и $x_2$, и составим новое управление $u_\alpha(t) = \alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)$. Очевидно, что это управление приводит систему в точку $x_\alpha$, нужно лишь показать, что при этом расходуется не более $k_\alpha$ единиц энергии. Последнее можно доказать, проинтегрировав неравенство

$$\dot{k}^\alpha(t) = -\|u_\alpha(t)\|^2_{R(t)} \geqslant -\alpha\|u_1(t)\|^2_{R(t)} - (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{R(t)} = -\alpha\dot{k}^1(t) - (1-\alpha)\dot{k}^2(t),$$

где $k^\alpha(t)$, $k^1(t)$ и $k^2(t)$ — траектории резерва, соответствующие управлениям $u_\alpha(t)$, $u_1(t)$ и $u_2(t)$. $\square$

**Следствие 1.7.1.** *Функция цены является выпуклой по переменным $(x,k)$.*

*Доказательство.* Функция $k \to \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t;t_0,k)\right)$ является вогнутой, поэтому в (1.36) под знаком максимума по $\ell$ стоит выпуклая по переменным $(x,k)$ функция, а значит, и $V(t,x,k)$ является выпуклой по $(x,k)$. $\square$

Покажем, что функцию цены можно искать независимо от множества достижимости как решение дифференциального уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби–Беллмана.

**Теорема 1.8.** *Функция цены в задаче достижимости является классическим решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{u \in \mathcal{P}(\tau)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, B(t)u \right\rangle + \frac{\partial V}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0 \tag{1.37}$$

*с граничным условием*

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{k=0} = 0 \tag{1.38}$$

*и с начальным условием*

$$V(t_0, x, k) = d^2(x, M_0).$$

*Доказательство.* Вычислим вначале опорную функцию множества достижимости из начала координат:

$$\rho\,(\ell \mid \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t; t_0, k, M_0) = \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{I}} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{G}}} \int_{t_0}^{t} \langle \ell, B(s)u(s) \rangle \,\mathrm{d}s,$$

где $\mathcal{U}_{\mathrm{I}}$ и $\mathcal{U}_{\mathrm{G}}$ — множества управлений, удовлетворяющих геометрическому и интегральному ограничению соответственно. Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(u(\cdot), \lambda) = \int_{t_0}^{t} \langle \ell, B(s)u(s) \rangle \,\mathrm{d}s + \lambda \left( k - \int_{t_0}^{t} \|u(s)\|^2_{R(t)} \,\mathrm{d}s \right).$$

Тогда опорная функция множества достижимости допускает следующее представление [51, 7]:

$$\rho\,(\ell \mid \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t_1]) = \min_{\lambda \geqslant 0} \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{G}}} = \mathcal{L}(u(\cdot), \lambda) = \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{G}}} \mathcal{L}(u(\cdot), \lambda_0(\ell)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \left( \max_{u \in \mathcal{P}(\tau)} \left\langle B^T(s)\ell - \lambda_0(\ell)R(s)u, u \right\rangle \right) \mathrm{d}s + \lambda_0(\ell)k.$$

Здесь $\lambda_0(\ell)$ — единственный множитель Лагранжа, на котором достигается минимум в предыдущей форме (единственность доказывается также, как в теореме 1.3).

Как уже было показано ранее,

$$V(t, x, k) = \max_{\ell \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x \rangle - \rho\,(\ell \mid M_0) - \rho\,(\ell \mid \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t]) - \tfrac{1}{4}\langle \ell, \ell \rangle \right\} =$$
$$= \langle \ell_0, x \rangle - \rho\,(\ell_0 \mid M_0) - \int_{t_0}^{t} \left( \max_{u \in \mathcal{P}(s)} \left\langle B^T(s)\ell_0 - \lambda_0(\ell_0)R(s)u, u \right\rangle \right) \mathrm{d}s - \lambda_0(\ell_0)k - \tfrac{1}{4}\langle \ell_0, \ell_0 \rangle,$$

где $\ell_0 = \ell_0(t, x, k)$ — единственный максимизатор, так как функция под знаком максимума сильно вогнута по $\ell$. По теореме о дифференцировании функции максимума [11] частные производные функции цены равны

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \ell_0(t, x, k), \quad \frac{\partial V}{\partial k} = -\lambda_0(\ell_0(t, x, k)),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\max_{u \in \mathcal{P}(t)} \{\langle \ell_0, B(t)u\rangle - \lambda_0 \langle u, R(t)u\rangle\} = -\max_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, B(t)u \right\rangle + \frac{\partial V}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\},$$

что эквивалентно (1.37).

Таким образом, функция $V(t, x, k)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных. Следовательно, она будет классическим решением уравнения (1.37). Справедливость краевого условия (1.38) вытекает из равенства $V(t, x, 0) = V(t_1, x, 0)$, которое можно вывести непосредственно из определения функции цены (1.35). □

*Замечание* 1.2. Если функция цены равна минимальному расстоянию до начального множества, а не его квадрату, то она будет менее гладкой, чем ранее, однако, в силу выпуклости по переменным $(x, k)$ она будет *вязкостным решением* [68] уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана [71].

### Разрешимость

Для того, чтобы применить метод динамического программирования к задаче 1.3 о попадании на целевое множество, сведем ее к следующей оптимизационной задаче:

**Задача 1.4.** *Указать позиционную стратегию $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{CL}$, при которой решения дифференциального включения* (1.17)*, выпущенные из произвольной точки* $(x(t_0), k(t_0)) = (x_0, k_0)$*, оказываются в конечный момент на минимально возможном расстоянии от целевого множества $M_1$. Найти это расстояние для каждой точки $(t, x, k) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

С этой задачей связана функция цены

$$V(t, x, k) = \min_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\mathrm{CL}}} \max_{z(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(\cdot)} \left\{ d^2 \left(x(t_1), M_1\right) \;\middle|\; x(t) = x, k(t) = k \right\},$$

где $z(t) = (x(t), k(t))$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — ансамбль решений дифференциального включения (1.17). Однако, как уже отмечалось, в отсутствие неопределенности использование позиционных стратегий не добавляет возможностей управлению, поэтому для упрощения при вычислении функции цены можно воспользоваться и программными стратегиями:

$$V(t,x,k) = \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)} \left\{ d^2\left(x(t_1), M_1\right) \;\middle|\; x(t) = x \right\}.$$

Это минимальное расстояние, на которое можно приблизиться к целевому множеству в конечный момент, если в момент $t$ система находится в точке $x$ и имеет неизрасходованный запас энергии $k$. Эта функция цены также допускает вторую интерпретацию — расстояние до ближайшей точки, из которой можно попасть в целевое множество разрешимости, использовав не более $k$ единиц энергии:

$$V(t,x,k) = \min_{x_1\in M_1} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)} \left\{ d^2(x, x(t)) \;\middle|\; x(t_1) = x_1 \right\}.$$

Очевидно, что множество разрешимости является множеством уровня функции цены: $\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[k_0, t_0] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(t,x,k_0) \leqslant 0\}$, а управление, решающее задачу 1.4, будем решением и для задачи 1.3. Таким образом, решив задачу 1.4, мы автоматически получаем решение задачи 1.3 (обратное, вообще говоря, не верно: управление может гарантировать попадание на целевое множество и при этом не обладать какими-либо экстремальными свойствами).

**Теорема 1.9.** *Функция цены в задаче разрешимости 1.4 равна*

$$V(t,x,k) = d^2\left(x, \mathcal{W}_{GI}(t,k;t_1,M_1)\right).$$

*Она является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u\in\mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, B(t)u \right\rangle - \frac{\partial V}{\partial k}\|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0$$

*с граничным условием*

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{k=0} = 0$$

*и с начальным условием*

$$V(t_1,x,k) = d^2(x, M_1).$$

**Следствие 1.9.1.** *Оптимальный синтез управления* $\mathcal{U}^*(t,x,k)$ *в задаче 1.4 находится по формуле*

$$\mathcal{U}^*(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, B(t)u \right\rangle - \frac{\partial V}{\partial k}\|u\|^2_{R(t)} \right\}.$$

Функция $\mathcal{U}^*(t,x,k)$ является полунепрерывной сверху в силу непрерывности функции $V(t,x,k)$, и, следовательно, принадлежит классу стратегий $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$.

В данном случае оптимальный синтез совпадает со стратегией экстремального прицеливания на множество разрешимости, поскольку может быть представлено в виде

$$\mathcal{U}^*(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial d^2(x,\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[k,t])}{\partial x}, B(t)u \right\rangle - \frac{\partial d^2(x,\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[k,t])}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} =$$
$$= \operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)} \left\{ \langle \ell_0, B(t)u\rangle + \rho_k(t,x,k)\|u\|^2_{R(t)} \right\},$$

где $\rho(t,x,k) = \rho\left(\ell_0 \mid \mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[k,t]\right)$, $\ell_0$ — элемент, на котором достигается максимум в выражении

$$d(x,\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[k,t]) = \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[k,t]\right) - \frac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\}.$$

### 1.2.5 Об эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости

Целью данного параграфа является построение внешней эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости при двойном ограничении. Для этого мы вначале приблизим непрерывную систему дискретной и получим формулы аппроксимации для нее, а затем, совершив предельный переход, вернемся к непрерывной системе и получим дифференциальные уравнения, описывающие параметры аппроксимирующих эллипсоидов.

#### Дискретный случай

**Задача 1.5.** *Пусть даны $n$ невырожденных эллипсоидов*

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}\left(p_i, P_i^{-1}\right), \quad i = 1,\ldots,n,$$

*а также фиксировано число $K \geqslant 0$. Требуется построить параметризованное семейство эллипсоидов, в пересечении дающее множество*

$$\mathcal{X}_{GI}[n] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} B_i u_i \;\middle|\; x_i \in \mathcal{E}_i,\ \sum_{i=1}^{n} \|u_i - r_i\|^2_{R_i} \leqslant K \right\}.$$

В дальнейшем будем считать, что матрицы $B_i$ невырожденные.

*Замечание* 1.3. Множество $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[n]$ есть область достижимости дискретной системы

$$x_i = x_{i-1} + B_i u_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$x_0 = 0,$$

с двойным ограничением — геометрическим

$$u_i \in \mathcal{E}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и совместным

$$\sum_{i=1}^{n} \|u_i - r_i\|_{R_i}^2 \leqslant K.$$

**Лемма 1.10.** *Множество $\mathcal{X}_{GI}[n]$ представимо в виде*

$$\mathcal{X}_{GI}[n] = \bigcap_{\beta \geqslant 0,\, \alpha \geqslant 0} \mathcal{X}_n^+(\alpha, \beta),$$

*где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и*

$$\mathcal{X}_n^+(\alpha, \beta) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} B_i u_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|u_i - p_i\|_{P_i}^2 + \beta \sum_{i=1}^{n} \|u_i - r_i\|_{R_i}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta K \right\}.$$

Введем обозначения

$$\gamma(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta K,$$
$$S_i = S_i(\alpha, \beta) = \gamma^{-1}(\alpha, \beta) \left( \alpha_i P_i + \beta R_i \right),$$
$$c_i = \gamma^{-1}(\alpha, \beta) S_i^{-1}(\alpha, \beta)(\alpha_i P_i p_i + \beta R_i r_i),$$
$$h(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \gamma^{-1}(\alpha, \beta) \left( \alpha_i \|p_i\|_{P_i}^2 + \beta \|r_i\|_{R_i}^2 \right) - \|c_i\|_{S_i(\alpha,\beta)}^2,$$

тогда выражение для $\mathcal{X}_n^+(\alpha, \beta)$ примет следующий вид:

$$\mathcal{X}_n^+(\alpha, \beta) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} B_i u_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \|u_i - c_i\|_{S_i(\alpha,\beta)}^2 \leqslant 1 - h(\alpha, \beta) \right\}.$$

**Лемма 1.11.** *Множество $\mathcal{X}_n^+(\alpha, \beta)$ является эллипсоидом:*

$$\mathcal{X}_n^+(\alpha, \beta) = \mathcal{E}\left( \sum_{i=1}^{n} B_i c_i, (1 - h(\alpha, \beta)) \sum_{i=1}^{n} B_i S_i^{-1}(\alpha, \beta) B_i^T \right).$$

*Доказательство.* Опорная функция множества $\mathcal{X}_n^+$ является решением следующей задачи на условный экстремум:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \ell, B_i u_i \rangle \longrightarrow \max \quad \text{при условии} \quad \sum_{i=1}^{n} \|u_i - c_i\|_{S_i}^2 \leqslant 1 - h(\alpha, \beta).$$

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(u_1, \ldots, u_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left( \left\langle B_i^T \ell, u_i \right\rangle - \tfrac{1}{2} \lambda \|u_i - c_i\|_{S_i}^2 \right).$$

Необходимым условием экстремума является

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u_1^*, \ldots, u_n^*, \lambda^*)}{\partial u_i} = B_i^T \ell - \lambda^* S_i (u_i^* - c_i) = 0.$$

Ограничение здесь всегда активно, и, следовательно, $\lambda^* > 0$. Домножая условие экстремума слева на матрицу $B_i^{T-1}$, имеем $B_i^{T-1} S_i (u_i^* - c_i) = B_1^{T-1} S_1 (u_1^* - c_1)$. Подставляя $u_i = S_i^{-1} B_i^T B_1^{T-1} S_1 (u_1^* - c_1) + c_i$ в ограничение, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| S_i^{-1} B_i^T B_1^{T-1} S_1 (u_1^* - c_1) \right\|_{S_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_1^* - c_1\|_{S_1 B_1^{-1} B_i S_i^{-1} B_i^T B_1^{T-1} S_1}^2 \leqslant 1 - h(\alpha, \beta),$$

поэтому множество $u_1$, удовлетворяющих ограничению, — эллипсоид

$$U_1 = \mathcal{E} \left( c_i, (1 - h(\alpha, \beta))^{-1} S_1^{-1} B_1^{T-1} \left( \sum_{i=1}^{n} B_i S_i^{-1} B_i^T \right)^{-1} B_1^{-1} S_1^{-1} \right).$$

Множество $\mathcal{X}_n^+(\alpha, \beta)$ состоит из элементов вида

$$\sum_{i=1}^{n} B_i u_i = \sum_{i=1}^{n} B_i S_i^{-1} B_i^T B_1^{T-1} S_1 (u_1 - c_1) + \sum_{i=1}^{n} B_i c_i, \qquad u_1 \in U_1,$$

поэтому

$$\mathcal{X}_n^+(\alpha, \beta) = \left( \sum_{i=1}^{n} B_i S_i^{-1} B_i^T B_1^{T-1} S_1 \right) (U_1 - c_1) + \sum_{i=1}^{n} B_i c_i =$$
$$= \mathcal{E} \left( \sum_{i=1}^{n} B_i c_i, (1 - h(\alpha, \beta)) \sum_{i=1}^{n} B_i S_i^{-1} B_i^T \right). \quad \square$$

### Непрерывный случай

**Система с нулевой динамикой** Рассмотрим теперь непрерывную систему

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad x(t_0) = 0$$

с геометрическим ограничением

$$u(t) \in \mathcal{E}_t = \mathcal{E}\left(p(t), P^{-1}(t)\right)$$

и интегральным ограничением

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t) - r(t)\|^2_{R(t)} \,\mathrm{d}t \leqslant K.$$

**Задача 1.6.** *Построить параметрическое семейство эллипсоидов, в пересечении дающее множество достижимости $\mathcal{X}_{GI}[t_1]$ указанной системы.*

Выберем произвольное разбиение $\mathcal{T} = \{\tau_i \mid i = 0, \ldots, n\}$ отрезка $[t_0, t_1]$ и сопоставим непрерывной системе ее дискретное приближение:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + \sigma_i B_i u_i, \quad i = 1, \ldots, n \\ x_0 = 0, \\ u_i \in \mathcal{E}\left(p(\tau_i), P^{-1}(\tau_i)\right), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i \|u_i - r(\tau_i)\|^2_{R(\tau_i)} \leqslant K. \end{cases}$$

Здесь $\sigma_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ — $i$-й отрезок, $\sigma = \max_i \sigma_i$ — диаметр разбиения.

**Лемма 1.12.** *Если $\mathcal{X}^{\mathcal{T}}_{GI}$ — множество достижимости дискретной системы при разбиении $\mathcal{T}$, то*

$$h\left(\mathcal{X}^{\mathcal{T}}_{GI}, \mathcal{X}_{GI}[t_1]\right) = O(\sigma).$$

Лемма следует из теоремы 2.9 о приближении множества достижимости при двойном ограничении, которую мы докажем в следующей главе.

Переходя к пределу при $\sigma \to 0$ в формулах для эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости дискретной системы, получаем следующее:

**Теорема 1.13.** *1. Множество $\mathcal{X}_{GI}[t_1]$ представимо в виде*

$$\mathcal{X}_{GI}[t_1] = \bigcap_{\beta \geqslant 0, \alpha(\cdot) \geqslant 0} \mathcal{X}^+_{\beta,\alpha}[t_1],$$

$$\mathcal{X}^+_{\alpha,\beta}[t_1] = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \int_{t_0}^{t_1} \left[\alpha(t)\|u(t)-p(t)\|^2_{P(t)} + \beta\|u(t)-r(t)\|^2_{R(t)}\right]\,\mathrm{d}t \leqslant \gamma(t_1) \right\},$$

$$\alpha(t) \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \beta K.$$

*2. Множество $\mathcal{X}^+_{\alpha,\beta}[t_1]$ является эллипсоидом*

$$\mathcal{X}^+_{\alpha,\beta}[t_1] = \mathcal{E}\left(x^+_{\alpha,\beta}(t_1), (1-h_{\alpha,\beta}(t_1))X^+_{\alpha,\beta}(t_1)\right),$$

*где*

$$\begin{gathered}
x^+_{\alpha,\beta}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} B(t)c(t)\,\mathrm{d}t,\\
X^+_{\alpha,\beta}(t_1) = \gamma(t_1)\int_{t_0}^{t_1} B(t)S^{-1}(t,\alpha,\beta(t))B^T(t)\,\mathrm{d}t,\\
h_{\alpha,\beta}(t_1) = \gamma^{-1}(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\left(\alpha(t)\|p(t)\|^2_{P(t)} + \beta\|r(t)\|^2_{R(t)} - \|c(t)\|^2_{S(t,\alpha(t),\beta)}\right),\\
c(t) = S^{-1}(t,\alpha(t),\beta)(\alpha(t)P(t)p(t) + \beta R(t)r(t)),\\
S(t,\alpha(t),\beta) = \alpha(t)P(t) + \beta R(t).
\end{gathered}$$

Введем нормированные коэффициенты

$$\hat{\beta}(t) = \frac{\beta}{\gamma(t)}, \quad \hat{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t)}{\gamma(t)},$$

тогда функции $X^+_{\alpha,\beta}(t)$, $x^+_{\alpha,\beta}(t)$ и $h_{\alpha,\beta}(t)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}
\dot{X}^+_{\alpha,\beta}(t) = \hat{\alpha}(t)X^+_{\alpha,\beta}(t) + B(t)S^{-1}(t,\hat{\alpha}(t),\hat{\beta}(t))B^T(t),\\
\dot{x}^+_{\alpha,\beta}(t) = B(t)c(t),\\
\dot{h}_{\alpha,\beta}(t) = -\hat{\alpha}(t)h_{\alpha,\beta}(t) + \hat{\alpha}(t)\|p(t)\|^2_{P(t)} + \hat{\beta}(t)\|r(t)\|^2_{R(t)} - \|c(t)\|^2_{S(t,\hat{\alpha}(t),\hat{\beta}(t))}.
\end{gathered}$$

**Система с ненулевой линейной динамикой** Для системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$
$$x(t_0) = 0$$

с прежними ограничениями (интегральным и геометрическим) формулы для внешней эллипсоидальной аппроксимации получаются путем замены (1.10).

$$\dot{X}^+_{\alpha,\beta}(t) = A(t)X^+_{\alpha,\beta}(t) + X^+_{\alpha,\beta}(t)A^T(t) + \hat{\alpha}(t)X^+_{\alpha,\beta}(t) + B(t)S^{-1}(t, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t))B^T(t),$$
$$\dot{x}^+_{\alpha,\beta}(t) = A(t)x^+_{\alpha,\beta}(t) + B(t)c(t),$$
$$\dot{h}_{\alpha,\beta}(t) = -\hat{\alpha}(t)h_{\alpha,\beta}(t) + \hat{\alpha}(t)\|p(t)\|^2_{P(t)} + \hat{\beta}(t)\|r(t)\|^2_{R(t)} - \|c(t)\|^2_{S(t,\hat{\alpha}(t),\hat{\beta}(t))}.$$

**Начальные значения** Если начальная траектория системы лежит во множестве $\mathcal{M}_0 = \mathcal{E}\left(m_0, M_0\right)$, то уравнения для параметров аппроксимации следует решать со следующими начальными условиями:

$$X^+_{\alpha,\beta} = M_0, \qquad x^+_{\alpha,\beta} = m_0, \qquad h_{\alpha,\beta} = 0.$$

**Частные случаи**

**1. Только геометрическое ограничение.** Интегральное ограничение не будет учитываться, если положить $\beta = 0$. Получаем обычные формулы для внешней эллипсоидальной аппроксимации для системы с геометрическими ограничениями [73]:

$$\dot{X}^+_{\alpha,\beta}(t) = A(t)X^+_{\alpha,\beta}(t) + X^+_{\alpha,\beta}(t)A^T(t) + \hat{\alpha}(t)X^+_{\alpha,\beta}(t) + \hat{\alpha}^{-1}(t)B(t)P^{-1}(t)B^T(t),$$
$$\dot{x}^+_{\alpha,\beta}(t) = A(t)x^+_{\alpha,\beta}(t) + B(t)p(t),$$
$$h_{\alpha,\beta}(t) \equiv 0.$$

**2. Только интегральное ограничение.** Аналогично, если положить $\alpha(t) \equiv 0$, то не будет учитываться геометрическое ограничение:

$$\dot{X}^+_{\alpha,\beta}(t) = A(t)X^+_{\alpha,\beta}(t) + X^+_{\alpha,\beta}(t)A^T(t) + KB(t)R^{-1}(t)B^T(t),$$
$$\dot{x}^+_{\alpha,\beta}(t) = A(t)x^+_{\alpha,\beta}(t) + B(t)r(t),$$
$$h_{\alpha,\beta}(t) \equiv 0.$$

Поскольку аппроксимация не зависит ни от каких параметров, то она совпадает с множеством достижимости.

**3. Одношаговая задача.** Рассмотрим дискретную систему при $n = 1$, $K = 1$, $B_1 = 0$. Тогда при $\alpha + \beta = 1$ формула для аппроксимации имеет вид

$$\mathcal{X}^{+}_{\alpha,\beta} = \mathcal{E}\left(c, (1-h)T\right), \qquad c = (\alpha P + \beta R)^{-1}(\alpha P a + \beta R b),$$
$$T = (\alpha P + \beta R)^{-1}, \qquad h = \alpha\|a\|^2_P + \beta\|b\|^2_R - \|\alpha P a + \beta R b\|^2_{\alpha P + \beta R},$$

то есть совпадает с формулой для внешней аппроксимации пересечения эллипсоидов с матрицами $Q_1 = P^{-1}$, $Q_2 = R^{-1}$ и центрами $a$ и $b$ соответственно [73].

**4. Подобные матрицы $R$ и $P$.** Пусть $R = P$ (если $R = \lambda P$, то достаточно поделить обе части интегрального ограничения на $\lambda$). Тогда

$$\begin{aligned}
\dot{X}^{+}_{\alpha,\beta}(t) &= A(t)X^{+}_{\alpha,\beta}(t) + X^{+}_{\alpha,\beta}(t)A^T(t) + \\
&\qquad + \hat{\alpha}(t)X^{+}_{\alpha,\beta}(t) + (\hat{\alpha}(t) + \hat{\beta}(t))^{-1}B(t)P^{-1}(t)B^T(t),\\
\dot{h}_{\alpha,\beta}(t) &= -\hat{\alpha}(t)h_{\alpha,\beta}(t) + \\
&\qquad + \hat{\alpha}(t)\|p(t)\|^2_{P(t)} + \hat{\beta}(t)\|r(t)\|^2_{P(t)} - (\hat{\alpha}(t) + \hat{\beta}(t))\|c(t)\|^2_{P(t)},\\
\dot{x}^{+}_{\alpha,\beta}(t) &= A(t)x^{+}_{\alpha,\beta}(t) + B(t)c(t),\\
c(t) &= (\hat{\alpha}(t) + \hat{\beta}(t))^{-1}(\hat{\alpha}(t)p(t) + \hat{\beta}(t)r(t)).
\end{aligned}$$

Если к тому же $p(t) = r(t)$, то

$$\begin{aligned}
\dot{X}^{+}_{\alpha,\beta}(t) &= A(t)X^{+}_{\alpha,\beta}(t) + X^{+}_{\alpha,\beta}(t)A^T(t) + \\
&\qquad + \hat{\alpha}(t)X^{+}_{\alpha,\beta}(t) + (\hat{\alpha}(t) + \hat{\beta}(t))^{-1}B(t)P^{-1}(t)B^T(t),\\
\dot{x}^{+}_{\alpha,\beta}(t) &= A(t)x^{+}_{\alpha,\beta}(t) + B(t)p(t),\\
h_{\alpha,\beta}(t) &\equiv 0.
\end{aligned}$$

### Множество разрешимости

Рассмотрим теперь ту же задачу в обратном времени, то есть построим внешнюю эллипсоидальную аппроксимацию множества разрешимости $\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[t_1]$ из множества $\mathcal{M}_1 = \mathcal{E}\left(m_1, M_1\right)$.

**Теорема 1.14.** *Множество разрешимости $\mathcal{W}_{GI}[t_0]$ представимо в виде*

$$\mathcal{W}_{GI}[t_0] = \bigcap_{\beta \geqslant 0,\ \alpha(\cdot) \geqslant 0} \mathcal{W}^{+}_{\alpha,\beta}[t_0],$$

*где множества* $\mathcal{W}^+_{\alpha,\beta}[t_0]$ *являются эллипсоидами*

$$\mathcal{W}^+_{\alpha,\beta}[t_0] = \mathcal{E}\left(w^+_{\alpha,\beta}(t_0), (1 - h_{\alpha,\beta}(t_0))W^+_{\alpha,\beta}(t_0)\right)$$

*с параметрами, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям*

$$\dot{W}^+_{\alpha,\beta}(t) = A(t)W^+_{\alpha,\beta}(t) + W^+_{\alpha,\beta}(t)A^T(t) - \hat{\alpha}(t)W^+_{\alpha,\beta}(t) - B(t)S^{-1}(t, \hat{\alpha}(t), \beta(t))B^T(t),$$
$$\dot{w}^+_{\alpha,\beta}(t) = A(t)w^+_{\alpha,\beta}(t) + B(t)c(t),$$
$$\dot{h}_{\alpha,\beta} = \hat{\alpha}(t)h_{\alpha,\beta}(t) - \hat{\alpha}(t)\|p(t)\|^2_{P(t)} - \hat{\beta}(t)\|r(t)\|^2_{R(t)} + \|c(t)\|^2_{S(t,\hat{\alpha}(t),\hat{\beta}(t))}$$

*с начальными условиями*

$$W^+_{\alpha,\beta}(t_1) = M_1, \qquad w^+_{\alpha,\beta}(t_1) = m_1, \qquad h_{\alpha,\beta}(t) = 0.$$

### Эволюция сечений множеств достижимости и разрешимости

**Достижимость** Множество достижимости $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t]$ неявно зависит от резерва управления $K$, при котором оно вычисляется. Сделаем эту зависимость явной и проследим, как она отразится на формулах для эллипсоидальной аппроксимации.

Функция $\gamma$ будет теперь зависеть от переменной $k$:

$$\gamma(k, t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \beta k,$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial \gamma(k,t)}{\partial t} = \alpha(t), \qquad \frac{\partial \gamma(k,t)}{\partial k} = \beta, \qquad \gamma(0, t_0) = 0.$$

Нормированные коэффициенты $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ примут вид

$$\hat{\alpha}(k,t) = \frac{\alpha(t)}{\gamma(k,t)}, \qquad \hat{\beta}(k,t) = \frac{\beta}{\gamma(k,t)}.$$

Матричная функция $X^+_{\alpha,\beta}$ также будет зависеть от $k$:

$$X^+_{\alpha,\beta}(k, t_1) = \gamma(k, t_1)\int_{t_0}^{t_1} B(t)S^{-1}(t, \alpha, \beta(t))B^T(t)\,\mathrm{d}t,$$

откуда получаем выражения для частных производных $X^+_{\alpha,\beta}$:

$$\frac{\partial X^+_{\alpha,\beta}(k,t)}{\partial t} = \hat{\alpha}(k,t)X^+_{\alpha,\beta}(k,t) + B(t)S^{-1}(t, \hat{\alpha}(k,t), \hat{\beta}(k,t))B^T(t),$$
$$\frac{\partial X^+_{\alpha,\beta}(k,t)}{\partial k} = \hat{\beta}(k,t)X^+_{\alpha,\beta}(k,t),$$
$$X^+_{\alpha,\beta}(0, t_0) = M_0.$$

Это может быть записано в виде дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial X^+_{\alpha,\beta}(k,t)}{\partial t} = \frac{\hat\alpha(k,t)}{\hat\beta(k,t)}\frac{\partial X^+_{\alpha,\beta}(k,t)}{\partial k} + B(t)S^{-1}(t,\hat\alpha(k,t),\hat\beta(k,t))B^T(t), \quad X^+_{\alpha,\beta}(k,t_0) = M_0.$$

Аналогичным образом получаем и уравнения для функции $h_{\alpha,\beta}(k,t)$:

$$\frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial t} = -\hat\alpha(k,t)h_{\alpha,\beta}(k,t) + \hat\alpha(k,t)\|p(t)\|^2_{P(t)} + \hat\beta(k,t)\|r(t)\|^2_{R(t)} - \|c(t)\|^2_{S(t,\hat\alpha(k,t),\hat\beta(k,t))},$$
$$\frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial k} = -\hat\beta(k,t)h_{\alpha,\beta}(k,t), \quad h_{\alpha,\beta}(0,t_0) = 0,$$

или, в форме уравнения в частных производных,

$$\frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial t} = \frac{\hat\alpha(k,t)}{\hat\beta(k,t)}\frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial k} + \hat\alpha(k,t)\|p(t)\|^2_{P(t)} + \hat\beta(k,t)\|r(t)\|^2_{R(t)} - \|c(t)\|^2_{S(t,\hat\alpha(k,t),\hat\beta(k,t))},$$
$$h_{\alpha,\beta}(k,t_0) = 0.$$

Центр эллипсоидальной аппроксимации от значения $k$ не зависит, поэтому он удовлетворяет тому же самому уравнению, что и раньше.

**Разрешимость** Параметры внешней эллипсоидальной аппроксимации сечений области разрешимости $\mathcal{W}_{\mathrm{GI}}[k,t]$ являются решением следующих уравнений:

$$\frac{\partial W^+_{\alpha,\beta}}{\partial t} = -\frac{\hat\alpha(k,t)}{\hat\beta(k,t)}\frac{\partial W^+_{\alpha,\beta}}{\partial k} - B(t)S^{-1}(t,\hat\alpha(k,t),\hat\beta(k,t))B^T(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}w^+_{\alpha,\beta}}{\mathrm{d}t} = B(t)c(t),$$
$$\frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial t} = -\frac{\hat\alpha(k,t)}{\hat\beta(k,t)}\frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial k} + \hat\alpha(k,t)\|p(t)\|^2_{P(t)} + \hat\beta(k,t)\|r(t)\|^2_{R(t)} - \|c(t)\|^2_{S(t,\hat\alpha(k,t),\hat\beta(k,t))},$$
$$W^+_{\alpha,\beta}(k,t_1) = M_1, \quad w^+_{\alpha,\beta}(t_1) = m_1, \quad h_{\alpha,\beta}(k,t_1) = 0.$$

### 1.2.6 Примеры

**Пример 1.1.** Этот пример демонстрирует возможность строгого вложения в (1.20), то есть несовпадения множества достижимости при двойном ограничении ($\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$) и пересечения множеств достижимости при отдельных ограничениях ($\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ и $\mathcal{X}_{\mathrm{I}}$). Рассмотрим при одномерную систему

$$\begin{cases} \dot x(t) = t^2\, u(t), \\ \dot k(t) = -u^2(t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

с геометрическим ограничением

$$|u(t)| \leqslant 1$$

и начальным запасом энергии $k_0 = \frac{5}{9}$.

По теореме 1.1 имеем, что множества $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}[t_1]$ и $\mathcal{X}_{\mathrm{I}}[t_1]$ совпадают и равны

$$\mathcal{X}_{\mathrm{G}}[t_1] = \mathcal{X}_{\mathrm{I}}[t_1] = \left[-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right].$$

Пусть $\ell = 1$. В случае геометрических ограничений оптимальная траектория

$$u_G^*(t) = 1,$$

а для интегральных ограничений

$$u_I^*(t) = \tfrac{5}{3}t^2.$$

Видно (рис. 1.2), что траектория $u_G^*$ не удовлетворяет интегральному ограничению, а $u_I^*$ — геометрическому, поэтому множество $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t_1]$ не может совпадать со множествами $\mathcal{X}_{\mathrm{I}}[t_1]$ или $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}[t_1]$. Покажем теперь это более строго.

Из принципа максимума получаем, что оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} (t/t^*)^2, & 0 \leqslant t \leqslant t^*; \\ 1, & t^* \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Константа $t^*$ выбирается из условия

$$\int_0^1 u^{*2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{9}$$

и равна $t^* = \frac{5}{9}$. Используя это управление, получаем $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t_1] = \left[-\frac{679}{2187}, \frac{679}{2187}\right]$, что почти на 7% меньше множеств $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ и $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$. Это относительное различие множеств $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$ и $\mathcal{X}_{\mathrm{G}} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}$ можно увеличить, взяв в правой части системы $B(t) = t^m$ вместо $t^2$; с увеличением $m$ оно растет, оставаясь, однако, в пределах 12%.

**Пример 1.2.** Траектория системы, обеспечивающая попадание на границу области достижимости $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t_1]$, в промежуточные моменты времени не обязательно будет находиться на границе $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}[t]$. На рисунке 1.3 представлена траектория системы из примера 1.1 (сплошная линия) и граница множества достижимости в соответствующие моменты времени (пунктирная линия). Видно, что на интервале $(t_0, t_1)$ система все время находится внутри множества достижимости.

**Пример 1.3.** Рассмотрим двухшаговую дискретную систему со следующими параметрами:

$$p_i \equiv 0, \quad P_1^{-1} = U^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} U, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix},$$

$$r_i \equiv 0, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^T, \quad k_0 = 7.$$

На рисунке 1.4 представлены все три множество достижимости: $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$, $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ и $\mathcal{X}_{\mathrm{I}}$. Множество достижимости при двойном ограничении $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$ здесь вычислено как пересечение большого количества внешних эллипсоидальных аппроксимаций (рис. 1.5).

**Пример 1.4.** На рисунке 1.6 показана эллипсоидальная аппроксимация множества достижимости для непрерывной задачи со следующими параметрами:

$$x_0 \in \mathcal{E}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 0{,}01I\right), \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(t) = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r(t) = \begin{bmatrix} -0{,}01 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$t_0 = 0, \quad k_0 = \frac{1}{2}, \quad B(t) = I, \quad P^{-1}(t) = 0{,}01I, \quad R(t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

На рисунке 1.7 представлена трубка достижимости, вычисленная с помощью внешних эллипсоидальных аппроксимаций.

## 1.3 Двойное ограничение с зависимостью геометрического ограничения от текущего резерва

В данном разделе рассматривается задача управления дифференциальным уравнением, когда управление стеснено геометрическим и интегральным ограничением, и кроме того геометрическое ограничение зависит от текущего резерва по интегральному ограничению, причем эта зависимость нелинейная. Это более общая постановка по сравнению с задачей об управлении при двойном ограничении, рассмотренной в разделе 1.2. Она позволяет, например, учитывать не только ограниченность запаса топлива у транспортного средства, но и изменения в его реакции на управляющие воздействия, связанные с уменьшением массы топлива.

### 1.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему, движения которой описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ \dot{k}(t) = -\|u(t)\|^2_{R(t)}, \end{cases} \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{1.39}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — текущее *положение* системы, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ — вектор *управления*, $k(t)$ — текущий *запас энергии* управления.

Управление стеснено геометрическим ограничением

$$u(t) \in \mu(k(t))\mathcal{P}(t), \tag{1.40}$$

то есть возможности управления зависят от текущего запаса энергии. Здесь $\mathcal{P}(\cdot)$ — непрерывное многозначное отображение, принимающее непустые выпуклые компактные значения. Мы также потребуем, чтобы $0 \in \mathcal{P}(t)$ для всех $t$ — тогда при $\mu(k(t)) = 0$ управление может принимать лишь нулевое значение, так что если значение $k^* = \sup\{\, k \mid \mu(k) \leqslant 0,\ k < k(t_0)\}$ конечно, то управление будет автоматически удовлетворять и интегральному ограничению

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant k(t_0) - k^*.$$

Управления $u(\cdot) \in L_2(t)$, почти всюду удовлетворяющие ограничению (1.40), будет называть *допустимыми*, а множество всех допустимых управлений будет обозначать через $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$. Очевидно, что одно и то же управление управление может быть допустимым при одном начальном значении $k(t_0)$ и не быть допустимым при другом значении, поэтому множество $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$ зависит от $k(t_0)$ — чем больше $k(t_0)$, тем больше управлений включает $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$. Далее мы будет считать, что значение $k(t_0)$ фиксировано, причем $\mu(k(t_0)) > 0$.

Предполагается, что матричные функции $A(t)$, $B(t)$ и $R(t)$ непрерывно дифференцируемы. Кроме того $R(t)$ положительно определена в каждый момент времени, то есть при любой активности управления значение переменной $k$ уменьшается. Будем предполагать, что функция $\mu(\cdot)$ ограничена на полупрямых вида $(-\infty, k)$. Последние два требования гарантируют продолжаемость решений системы (1.39).

Нас будет интересовать решение следующей задачи:

**Задача 1.7.** *Найти допустимое управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{OL}$, приводящее систему в конечный момент времени $t_1$ на границу множества достижимости в заранее заданном направлении $\ell$, то есть управление, доставляющее максимум функционалу*

$$\langle \ell, x(t_1) \rangle = \langle \ell, x(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \ell, A(t)x(t) + B(t)u(t) \rangle \, \mathrm{d}t.$$

Однако, вместо того, чтобы решать задачу 1.7, мы сведем ее к более общей:

**Задача 1.8.** *Найти допустимое управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{OL}$, доставляющее максимум интегральному функционалу*

$$J(u(\cdot)) = \langle h(\cdot), u(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle h(t), u(t) \rangle \, \mathrm{d}t. \tag{1.41}$$

Задача 1.7 становится частным случаем задачи 1.8, если положить $h(t) = B^T(t)s(t)$, где $s(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{s}(t) = -A^T(t)s(t)$, $s(t_1) = \ell$.

### 1.3.2 Принцип максимума

Произведем вначале замену $u(t) \to \mu(k(t))u(t)$, чтобы геометрическое ограничение не зависело от фазовой координаты $k$. После этой замены получаем задачу об отыскании оптимального управления для нелинейного дифференциального уравнения:

$$\begin{gathered} J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \mu(k(t)) \langle h(t), u(t) \rangle \, \mathrm{d}t \to \max, \qquad (1.42) \\ u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad \dot{k}(t) = -\mu^2(k(t)) \|u(t)\|^2_{R(t)}. \end{gathered}$$

Используя принцип максимума для систем с закреплённым временем и свободным правым концом [50, Теорема 7], получаем следующее утверждение:

**Теорема 1.15.** *Пусть функции $\mu(k)$ и $h(t)$ непрерывно дифференцируемы*[4]*. Для того, чтобы допустимое управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $k(t)$ доставляли максимум функционалу (1.41) на отрезке $[t_0, t_1]$, необходимо существование такой ненулевой непрерывно дифференцируемой функции $\psi(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению*

$$\dot{\psi}(t) = -\mu'(k(t)) \left( \langle h(t), u(t) \rangle - 2\psi(t)\mu(k(t)) \|u(t)\|^2_{R(t)} \right), \qquad \psi(t_1) = 0, \tag{1.43}$$

[4]Здесь и далее подразумевается, что непрерывная дифференцируемость функции $\mu(k)$ требуется на множестве $\{ k \mid \mu(k) > 0 \}$

*что для всех $t \in [t_0, t_1]$ функция*

$$\mathcal{H}(\psi, k, t, u) = \mu(k)\langle h(t), u\rangle - \psi\mu^2(k)\|u\|^2_{R(t)}$$

*переменной $u \in \mathcal{P}(t)$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\mathcal{H}(\psi(t), k(t), t, u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), k(t), t). \tag{1.44}$$

**Следствия из принципа максимума**

**Лемма 1.16.** *Пусть функция $\mu(k)$ неубывающая (невозрастающая). Тогда переменная $\psi$ неотрицательна и не возрастает (соответственно, неположительна и не убывает).*

*Доказательство.* Запишем уравнение (1.43) в виде

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\mu'(k)}{\mu(k)}\left\langle \frac{\partial\mathcal{H}(\psi(t), k(t), t, u(t))}{\partial u}, u(t)\right\rangle. \tag{1.45}$$

Скалярное произведение в правой части неотрицательно — это необходимое условия для достижения максимума в (1.44) [7, теорема 1.2.5]. Следовательно, производная функции $\psi(t)$ неположительна (соответственно, неотрицательна), откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Важным частным случаем выбора множества $\mathcal{P}(t)$ является эллипсоид с центром в начале координат: $\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}\left(0, P^{-1}(t)\right)$. Для такого ограничения можно получить более удобное выражение для оптимального управления. Записав функцию Лагранжа для задачи максимизации (1.44), получаем следующее описание оптимального управления:

**Теорема 1.17.** *Оптимальное управление, определяемое принципом максимума* (1.44), *выражается формулой*

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\mu^2(k(t))\psi(t)R(t) + \lambda P(t)\right)^{-1}\mu(k(t))h(t), \tag{1.46}$$

*где $\lambda = \lambda(t, k, \psi) \geqslant 0$ — множитель Лагранжа, отвечающий ограничению $\|u(t)\|^2_{P(t)} \leqslant 1$. Оптимальное управление и соответствующий ему множитель Лагранжа одновременно удовлетворяют условию дополняющей нежёсткости $\lambda\left(\|u(t)\|^2_{P(t)} - 1\right) = 0$. В случае одновременного равенства нулю $h(t)$ и $\psi(t)$ управление может принимать любое значение из $U$.*

Отметим, что управление, удовлетворяющее принципу максимума, будет непрерывным, функция $\psi(t) \neq 0$ на $[t_0, t_1)$, и кусочно непрерывным, если $\psi(t)$ обращается в нуль в конечном числе точек.

Изучим отдельно случаи $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$, то есть когда геометрическое ограничение активно или неактивно в данный момент времени.

**1. Случай $\lambda = 0$ (ограничение неактивно).** Из (1.46) получаем

$$u(t) = \frac{1}{2\psi(t)\mu(k(t))} R^{-1}(t)h(t), \tag{1.47}$$

и при подстановке в (1.43) имеем $\dot{\psi}(t) = 0$.

**2. Случай $\lambda > 0$.** В этом случае из условия дополняющей нежёсткости выводим равенство $\|u(t)\|^2_{P(t)} = 1$, однозначно определяющее выбор $\lambda$.

**Лемма 1.18.** *Множитель Лагранжа $\lambda = \lambda(t, k, \psi)$ связан с функцией $\psi(\cdot)$ следующим соотношением:*

$$\dot{\psi}(t) = -2\frac{\mu'(k(t))}{\mu(k(t))}\lambda(t, k(t), \psi(t)). \tag{1.48}$$

*Доказательство.* Представим выражение для оптимального управления в виде (для краткости опустим зависимость от $t$):

$$u = \frac{\mu(k)}{2} P^{-\frac{1}{2}} \left(\mu^2(k)\psi P^{-\frac{1}{2}} R P^{-\frac{1}{2}} + \lambda I\right)^{-1} P^{-\frac{1}{2}} h.$$

Пусть $s_1, \ldots, s_m$ — ортонормированный базис самосопряжённого оператора $P^{-\frac{1}{2}} R P^{-\frac{1}{2}}$, а $\nu_1, \ldots, \nu_m$ — соответствующие собственные значения: $P^{-\frac{1}{2}} R P^{-\frac{1}{2}} s_i = \nu_i s_i$. Разложим вектор $P^{-\frac{1}{2}} h$ по этому базису: $P^{-\frac{1}{2}} h = \sum_{i=1}^m q_i s_i$, и подставим это разложение в формулу для управления:

$$u = \frac{\mu(k)}{2} P^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda} q_i s_i. \tag{1.49}$$

Таким образом, условие $\|u(t)\|^2_{P(t)} = 1$ принимает вид

$$\frac{\mu^2(k)}{4} \sum_{i=1}^m \frac{q_i^2}{\left(\mu^2(k)\psi\nu_i + \lambda\right)^2} = 1. \tag{1.50}$$

Подставим теперь формулу (1.49) в дифференциальное уравнение для функции $\psi$:

$$\dot{\psi} = -\mu'(k)\left(\frac{\mu(k)}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i\left\langle P^{-\frac{1}{2}}h, s_i\right\rangle}{\mu^2(k)\psi\nu_i+\lambda} - \psi\frac{\mu^3(k)}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\left\langle P^{-\frac{1}{2}}RP^{-\frac{1}{2}}q_is_i, q_is_i\right\rangle}{\left(\mu^2(k)\psi\nu_i+\lambda\right)^2}\right) =$$

$$= -\mu'(k)\left(\frac{\mu(k)}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^2}{\mu^2(k)\psi\nu_i+\lambda} - \psi\frac{\mu^3(k)}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\nu_iq_i^2}{\left(\mu^2(k)\psi\nu_i+\lambda\right)^2}\right) =$$

$$= -\frac{\mu'(k)\mu(k)}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda q_i^2}{\left(\mu^2(k)\psi\nu_i+\lambda\right)^2} = -\frac{\mu'(k)\mu(k)}{2}\frac{4\lambda}{\mu^2(k)} = -2\frac{\mu'(k)}{\mu(k)}\lambda. \quad \square$$

Заметим, что соотношение (1.48) верно и при $\lambda = 0$. Сравнивая (1.45) и (1.48), находим выражение для $\lambda$ при известном управлении:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}, u\right\rangle. \tag{1.51}$$

В случае наличия нескольких различных собственных значений $\nu_i$ аналитическое решение уравнения (1.50) относительно $\lambda$ сводится к поиску корня многочлена высокой степени. Если же собственное значение только одно, то есть $P^{-\frac{1}{2}}RP^{-\frac{1}{2}} = \nu I$, то значение $\lambda$ находится в явном виде:

$$\lambda(t, k(t), \psi(t)) = \mu(k(t))\left(\tfrac{1}{2}\|h(t)\|_{P^{-1}(t)} - \nu\mu(k(t))\psi(t)\right). \tag{1.52}$$

Приведенные выше рассуждения предполагают, что функция $\mu(k(t))$ всюду положительна. Следующая лемма дает условие, при котором это действительно так.

**Лемма 1.19.** *Пусть функция $\mu(k)$ дифференцируема, в правой окрестности точки $k^*$ строго возрастает и имеет порядок малости не менее $\frac{1}{2}$, то есть $\mu(k-k^*) = O\left((k-k^*)^{\frac{1}{2}}\right)$. Тогда её значение вдоль любой траектории системы положительно: $\mu(k(t)) > 0$.*

*Доказательство.* Если функция $\mu(k)$ всюду положительна, то утверждение тривиально. Пусть теперь это не так, то есть число $k^*$ конечно. В начальный момент значение $\mu(k_0)$ положительно. Запишем производную функции $\mu$ в силу системы:

$$\dot{\mu}(k(t)) = -\mu'(k(t))\mu^2(k(t))\|u(t)\|^2_{R(t)}.$$

Это уравнение должно иметь единственное решение при начальном условии $\mu(k(\theta)) = 0$ для произвольного $\theta \in [t_0, t_1]$. Считая управление и матрицу $R(t)$ достаточно гладкими функциями, для единственности решения будет достаточно потребовать, чтобы функция $f(\mu) = \mu'(k(t))\mu^2(k(t))$ была непрерывной по Липшицу. По теореме об обратной функции существует функция $\kappa(\mu)$, определенная и дифференцируемая в правой окрестности точки $\mu = 0$. Если функция $\mu(k)$ имеет порядок малости $r$, то $\kappa(\mu)$ может быть представлена в виде $\kappa(\mu) = \mu^{\frac{1}{r}} g(\mu)$, где функция $g(\mu) > 0$ дифференцируема при $\mu > 0$, поэтому производная $\kappa'(\mu)$ имеет порядок малости не более $\frac{1}{r} - 1$. С другой стороны, по теореме о производной обратной функции $\kappa'(\mu) = \frac{1}{\mu'(\kappa(\mu))}$, поэтому функция $f(\mu)$ будет иметь порядок малости не менее $3 - \frac{1}{r}$, то есть условие Липшица будет выполняться при $r \geqslant \frac{1}{2}$, что как раз присутствует в предположениях о функции $\mu$. □

*Замечание* 1.4. Требование порядка малости $\frac{1}{2}$ функции $\mu(k)$ в точке $k^*$ здесь существенно. Чтобы продемонстрировать это, выберем $\mu(k) = k^\alpha$ и предположим, что управление выбирается так, чтобы $\|u(t)\|_{R(t)} \equiv 1$. Тогда для функции $\mu(t) = \mu(k(t))$ справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = -\mu'(k(t))\mu^2(k(t)) = -\alpha k^{3\alpha-1} = -\alpha\mu^{3-\frac{1}{\alpha}},$$

решение которого (при $\alpha \neq \frac{1}{2}$)

$$\mu(t) = \Big((t - t_0)(2\alpha - 1) + \mu^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}(t_0)\Big)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}},$$

при $\alpha < \frac{1}{2}$ обращается в нуль в точке

$$t^* = t_0 + \frac{\mu^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}(t_0)}{1 - 2\alpha}.$$

### 1.3.3 Существование решения

Опишем вначале свойства множества допустимых программных управлений (таких, которые не нарушают геометрического ограничения):

$$\mathcal{U}_{\mathrm{OL}} = \{\, u(\cdot) \mid u(t) \leqslant \mu(k(t))\mathcal{P}(t),\ t \in [t_0, t_1]\}.$$

Напомним, что функция $k(\cdot)$ определяется здесь уравнением (1.42) и, вообще говоря, зависит от управления $u(\cdot)$.

**Лемма 1.20.** *Пусть функция $\mu(k)$ вогнута и монотонно не убывает. Тогда множество допустимых управлений $\mathcal{U}_{OL}$ является выпуклым.*

*Доказательство.* Пусть некоторое управление $u(\cdot)$ является выпуклой комбинацией двух допустимых управлений: $u = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2$, $\alpha \in [0,1]$, $u_i \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$. Покажем, что в этом случае и управление $u(\cdot)$ является допустимым.

Обозначим через $k_i(\cdot)$ траектории переменной $k$, отвечающие управлением $u_i(\cdot)$. Тогда

$$\dot{k}(t) = -\|\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)\|^2_{R(t)} \geqslant -\alpha\|u_1(t)\|^2_{R(t)} - (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{R(t)} = \\ = \alpha\dot{k}_1(t) + (1-\alpha)\dot{k}_2(t),$$

откуда легко видеть, что

$$k(t) \geqslant \alpha k_1(t) + (1-\alpha)k_2(t).$$

Последнее означает, что функция $u(\cdot) \to k(t)$ является вогнутой. В силу вогнутости и монотонности функции $\mu(k)$ имеем

$$\mu(k(t)) \geqslant \alpha\mu(k_1(t)) + (1-\alpha)\mu(k_2(t)).$$

Поскольку $u_i(t) \in \mu(k_i(t))\mathcal{P}(t)$, $i = 1, 2$, то

$$u(t) = \alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t) \in (\alpha\mu(k_1(t)) + (1-\alpha)\mu(k_2(t)))\mathcal{P}(t) \subseteq \mu(k(t))\mathcal{P}(t).$$

Последнее верно для всех $t \in [t_0, t_1]$, поэтому $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$. Здесь мы неявно воспользовались тем, что $0 \in \mathcal{P}(t)$. $\square$

**Следствие 1.20.1.** *При выполнении условий леммы множество достижимости в задаче 1.7 является выпуклым.*

Условия неубывания и вогнутости функции $\mu(k)$ существенны; невыполнение хотя бы одного из них может привести к невыпуклости множества достижимости (см. пример 1.5 в конце раздела).

**Лемма 1.21.** *Пусть функция $\mu(k)$ имеет не более счетного числа разрывов. Тогда множество $\mathcal{U}_{OL}$ замкнуто в топологии $L_2(T)$.*

*Доказательство.* Пусть $u_i(\cdot)$ — последовательность допустимых управлений, сходящаяся к функции $u(\cdot)$ в пространстве $L_2(T)$. Из последовательности $\{u_i(\cdot)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{i_k}(\cdot)\}$, сходящуюся к $u(\cdot)$ почти всюду [13], поэтому можно считать, что $\{u_i(\cdot)\} \underset{\text{п.в.}}{\to} u(\cdot)$. Пусть $k_i(\cdot)$ — траектории переменной $k(t)$, соответствующие управлениям $u_i(\cdot)$. Тогда

$$k_i(t) = k(t_0) - \int_{t_0}^{t} \|u_i(\tau)\|^2_{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = k(t_0) - \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2_{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau -$$
$$- \int_{t_0}^{t} \|u_i(\tau) - u(\tau)\|^2_{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - 2\int_{t_0}^{t} \left\langle R^{\frac{1}{2}}(\tau)(u_i(\tau) - u(\tau)), R^{\frac{1}{2}}(\tau)u(\tau)\right\rangle \mathrm{d}\tau =$$
$$= k(t) - I_1 - 2I_2 \to k(t),$$

так как $I_1 \to 0$ по условию сходимости $u_i(\cdot)$ к $u(\cdot)$, а для $I_2$ справедлива оценка

$$|I_2| \leqslant \left[I_1 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2_{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Если значение $k(t)$ является точкой непрерывности функции $\mu(\cdot)$, то в пределе получаем

$$u_i(t) \in \mu(k_i(t))\mathcal{P}(t) \quad \Longrightarrow u(t) \in \mu(k(t))\mathcal{P}(t).$$

Таким образом, нарушение геометрического ограничения возможно только на множестве $\{\kappa_i\}_{i=1}^{\infty}$ точек разрыва функции $\mu(\cdot)$. Введем обозначение $\mathfrak{T}_i = \{\theta \in T \mid k(\theta) = \kappa_i\}$, тогда $\mathfrak{T} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{T}_i$ — множество всех моментов времени, в которые может нарушаться геометрическое ограничение. Если $\operatorname{meas}\mathfrak{T} = 0$, то управление $u(\cdot)$ является допустимым, так как удовлетворяет геометрическому ограничению почти всюду. Иначе в силу $\sigma$-аддитивности меры Лебега найдется такое $i$, что $\operatorname{meas}\mathfrak{T}_i > 0$. Из монотонности функции $k(t)$ следует, что $\mathfrak{T}_i$ — отрезок прямой, причем на нем почти всюду $u(t) \equiv 0$, иначе значение $k(t)$ немедленно уменьшилось бы. Поскольку мы считаем $0 \in \mathcal{P}(t)$, то геометрическое ограничение в данном случае также выполнено и управление $u(t)$ является допустимым. □

**Лемма 1.22.** *Множество $\mathcal{U}_{OL}(k)$ ограничено в метрике $L_p(T)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

*Доказательство.* Обозначим через $M_\mu$ верхнюю грань функции $\mu(\cdot)$ на полупрямой $(-\infty, k)$ и через $M_{\mathcal{P}}$ — наибольший диаметр множеств $\mathcal{P}(t)$. Тогда для допустимого управления $u(\cdot)$ очевидно $\|u(\cdot)\|_{L_\infty(T)} \leqslant M_\mu M_{\mathcal{P}}$. Используя эту оценку, получаем $\|u(\cdot)\|_{L_p(T)} \leqslant M_\mu \cdot (t_1 - t_0)^{1/p} M_{\mathcal{P}}$. □

**Следствие 1.22.1.** *Множество достижимости в задаче 1.7 ограничено.*

**Теорема 1.23 (о существовании решения).** *Пусть функция $\mu(k)$ вогнута и не убывает на множестве $\{k \mid \mu(k) \geqslant 0\}$. Тогда существует управление $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_{OL}$, доставляющее максимум линейному непрерывному функционалу $J(u(\cdot))$.*

*Доказательство.* Множество $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$ слабо компактно [7, теорема 1.3.4], так как оно является выпуклым (лемма 1.20), замкнутым (лемма 1.21) и ограниченным (лемма 1.22) в пространстве $L_2(T)$. Функционал $J(u(\cdot))$ слабо полунепрерывен сверху (как вогнутый и полунепрерывный сверху). Слабо полунепрерывный сверху функционал достигает верхней грани на слабо компактном множестве [7, теорема 1.3.2], следовательно множество оптимальных управлений $\mathcal{U}^*_{\mathrm{OL}}$ непусто и выпукло. □

**Следствие 1.23.1.** *При выполнении условий теоремы существует управление $u(\cdot)$, приводящее систему на границу множества достижимости задачи задаче 1.7 в заданном направлении $\ell$. Множество достижимости при этом является непустым выпуклым компактом.*

### О достаточности принципа максимума

Если выполнены условия теоремы о существовании решения и $u^*(\cdot)$ — единственное управление, удовлетворяющее принципу максимума вместе с некоторой функцией $\psi(\cdot)$, то $u^*(\cdot)$ — оптимальное управление. В самом деле, поскольку оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума, а такое управление всего одно, то оно совпадает с $u(\cdot)$.

Таким образом, в условиях применимости теоремы о существовании решения принцип максимума в совокупности с единственностью решения прямой и двойственной системы является достаточным условием оптимальности. Очевидно, что при этом стоит учитывать и условия теоремы о единственности решения, приведенной в следующем параграфе — ведь если оптимальных управлений много, то решение системы из принципа максимума тоже будет не единственным.

Если существует несколько пар $\{u(t), \psi(t)\}$, удовлетворяющих принципу максимума, то в силу существования решения и необходимости принципа максимума среди этих пар будет оптимальное управление. Таким образом, при выполнении условий теоремы о существовании решения для нахождения оптимального управления достаточно перебрать все решения системы из принципа максимума.

### 1.3.4 Единственность решения

Для доказательства единственности решения предположим, что два различных управления являются оптимальными. Следующая лемма позволяет построить управление, которое, как будет показано позже, является «более оптимальным». По сути дела это усиленный вариант леммы про выпуклость множества допустимых управлений, поскольку гарантируется допустимость не только тех управлений которые лежат на отрезке от $u_1(\cdot)$ до $u_2(\cdot)$, но и допустимость управлений вблизи этого отрезка.

**Лемма 1.24.** *Пусть*

1. *функция $\mu(k)$ вогнута и возрастает;*
2. $0 \in \operatorname{int} \mathcal{P}(t)$*;*
3. $u_1(\cdot)$ *и* $u_2(\cdot)$ *— допустимые кусочно-непрерывные управления, непрерывные слева;*
4. *ограниченная кусочно-непрерывная функция $w(\cdot)$ обладает тем свойством, что $w(t) = 0$, когда $u_1(t) = u_2(t)$.*

*Тогда управление $u(t) = \alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t) + \beta(t)w(t)$ также будет допустимым для всех $\alpha \in (0,1)$ и некоторой положительной кусочно-непрерывной функции $\beta(\cdot)$ (вообще говоря, зависящей от $\alpha$).*

*Доказательство.* Докажем вначале неравенство

$$\|u(t)\|^2_{R(t)} \leqslant \alpha\|u_1(t)\|^2_{R(t)} + (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{R(t)} \tag{1.53}$$

При $u_1(t) = u_2(t)$ имеет место $w(t) = 0$, $u(t) = u_1(t) = u_2(t)$ и (1.53) очевидно выполняется в виде равенства. Если же $u_1(t) \neq u_2(t)$, то

$$\|\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)\|^2_{R(t)} < \alpha\|u_1(t)\|^2_{R(t)} + (1-\alpha)\|u_2(t)\|^2_{R(t)}$$

в силу строгой выпуклости функции $u \to \|u\|^2_{R(t)}$. Из непрерывности этой функции следует, что при малых значениях $\beta(t)$ будет выполняться и неравенство (1.53) в строгой форме, причем функцию $\beta(\cdot)$ можно выбрать кусочно-непрерывной.

Пусть теперь $k(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ — траектории переменной $k$, соответствующие управлениям $u(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$. Тогда интегрирование неравенства (1.53) дает $k(t) \geqslant \alpha k_1(t) +$

$(1-\alpha)k_2(t)$. Более того, поскольку при $u_1(t) \neq u_2(t)$ неравенство (1.53) становится строгим, то

$$k(t) > \alpha k_1(t) + (1-\alpha)k_2(t) \tag{1.54}$$

начиная с первого момента, в который управления различны. Без ограничения общности можно отбросить начальный участок, на котором управления совпадают, и считать, что (1.54) выполнено везде. Тогда в силу вогнутости и строгого возрастания $\mu(k)$ имеем

$$\mu(k(t)) > \mu(\alpha k_1(t) + (1-\alpha)k_2(t)) \geqslant \alpha\mu(k_1(t)) + (1-\alpha)\mu(k_2(t)).$$

Поскольку $u_i(t) \in \mu(k_i(t))\mathcal{P}(t)$, $i = 1, 2$, то

$$\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t) \in (\alpha\mu(k_1(t)) + (1-\alpha)\mu(k_2(t)))\mathcal{P}(t) \subseteq \operatorname{int}\mu(k(t))\mathcal{P}(t),$$

где мы воспользовались требованием $0 \in \operatorname{int}\mathcal{P}(t)$. Таким образом, точка $\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)$ лежит во внутренности множества $\mu(k(t))\mathcal{P}(t)$, поэтому при малых значениях $\beta(t)$ точка $u(t)$ также будет принадлежать множеству допустимых управлений. Следовательно, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$. □

**Определение 1.1.** Будем говорить, что задача максимизации интегрального функционала удовлетворяет *условию общности положения*, если для всех $\delta > 0$ выполнено

$$\int_{t_1-\delta}^{t_1} \|h(t)\|^2 \,\mathrm{d}t > 0.$$

В задаче 1.7 выполнение условия общности положения для всех направлений $\ell$ из единичной сферы эквивалентна полной управляемости системы на любом отрезке $[t_1-\delta, t_1]$.

**Лемма 1.25.** *Если выполнено условие общности положения, функции $\mu(k)$ и $h(t)$ непрерывно дифференцируемы и производная функции $\mu(k)$ всюду положительна, то $\psi(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1)$.*

*Доказательство.* Ранее было доказано, что функция $\psi(t)$ невозрастающая. Покажем, что она положительна в левой окрестности точки $t_1$. Пусть это не так, то есть найдется число $\delta > 0$, такое, что $\psi(t) = 0$, $t \in T_\delta = [t_1-\delta, t_1]$. Поскольку выполнено условие общности положения, то $\|h(t)\| > 0$ на подмножестве $T_\delta$ ненулевой меры. Поскольку на $T_\delta$ принцип максимума превращается в

$$\langle h(t), u(t)\rangle = \max_{u\in\mathcal{P}(t)} \langle h(t), u\rangle > 0,$$

то производная функции $\psi(t)$ отрицательна:

$$\dot{\psi}(t) = -\mu'(k(t_1))\langle h(t), u(t)\rangle < 0.$$

Интегрируя это неравенство на $T_\delta$, получаем $\psi(t_1 - \delta) > 0$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, $\psi(t) > 0$ при всех $t < t_1$. □

**Теорема 1.26 (о единственности решения).** *Пусть*

1. *выполнено условие общности положения;*
2. *функция $h(\cdot)$ непрерывно дифференцируема;*
3. *функция $\mu(\cdot)$ вогнута, возрастает, непрерывно дифференцируема и в точке $k^*$[5] имеет порядок малости не менее $\frac{1}{2}$.*

*Тогда существует ровно одно управление, доставляющее максимум функционалу* (1.41).

*Доказательство.* Условия теоремы гарантируют существование решения. По лемме 1.19 получаем $\mu(k(t)) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, а условие общности положения в силу леммы 1.25 и принципа максимума дает $u(t) = 0$ при $h(t) = 0$. Следовательно, существует множество ненулевой меры $T_0 \subseteq T$, на котором $h(t) \neq 0$ и $u_1(t) \neq u_2(t)$.

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — различные оптимальные управления. Они удовлетворяют принципу максимума и, как отмечалось ранее, непрерывны (так как $\psi(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1)$). Выберем произвольное число $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим управление

$$u(t) = \alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t) + \beta(t)w(t), \qquad w(t) = \begin{cases} 0, & u_1(t) = u_2(t); \\ h(t), & u_1(t) \neq u_2(t). \end{cases}$$

По лемме 1.24 такое управление допустимо при малой положительной функции $\beta(\cdot)$. Покажем, что на этом управлении значение функционала больше, чем на $u_i(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) - J(u_i(\cdot)) = \int\limits_{\{\,t \,\mid\, u_1(t) \neq u_2(t)\}} \beta(t)\|h(t)\|^2 \, \mathrm{d}t \geqslant \int\limits_{T_0} \beta(t)\|h(t)\|^2 \, \mathrm{d}t > 0.$$

Следовательно, управления $u_i(\cdot)$ не являются оптимальными. Получено противоречие с предположением о существовании двух оптимальных управлений, следовательно, оптимальное управление единственно. □

[5]В условиях вогнутости и строгого возрастания точка $k^*$ всегда существует.

Ясно, что если условие общности положения не выполнено, то в конце траектории $\psi(t) = 0$, $h(t) = 0$ и оптимальное управление может принимать любые значения, укладывающиеся в геометрическое ограничение (так как эти значения уже не влияют на значение функционала), то есть оптимальное управление заведомо не единственное.

Однако если условие общности положения не выполняется в точке $t_1$, но все-таки оно выполнено в другой точке $\theta \in [t_0, t_1)$, то управление будет единственно с точностью до «хвоста» на отрезке $[\theta, t_1]$.

### 1.3.5 Нахождение оптимальной траектории и управления

Целью данного параграфа является нахождение оптимальных траекторий при геометрическом ограничении вида (1.3), когда множество $\mathcal{P}(t)$ является невырожденным эллипсоидом.

#### Точки переключения между $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$

Так как уравнения системы существенно отличаются в случаях $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$, то для аналитического решения задачи желательно каким-либо найти те точки, в которых значение $\lambda$ меняется с нулевого на положительное и обратно. Из формулы (1.47) видно, что $\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда

$$2\psi(t)\mu(k(t)) \geqslant \left\| R^{-1}(t)h(t) \right\|_{P(t)}. \tag{1.55}$$

Правая часть полностью определяется параметрами задачи, поэтому для определения положения точек переключения необходимо исследовать поведение левой части.

Если в некоторый момент времени $\psi(t) < 0$, то заведомо $\lambda > 0$, поскольку правая часть (1.55) неотрицательна. Например, если функция $\mu(k)$ невозрастающая, то $\psi(t) < 0$ всюду, и, следовательно, геометрическое ограничение всегда активно.

**Лемма 1.27.** *Пусть функция $\mu(k)$ является неубывающей. Тогда левая часть* (1.55)*, то есть функция $\varphi(t) = \psi(t)\mu(k(t))$, является невозрастающей, $\varphi(t_1) = 0$.*

*Доказательство.* Пусть функция $\mu(k)$ неубывающая. Тогда функция $\psi(t)$ невозрастающая и неотрицательная; поскольку $k(t)$ монотонно убывает, то $\mu(k(t))$ не возрастает. Функция $\psi(t)$ является невозрастающей как произведение двух неотрицательных невозрастающих функций. □

**Решение задачи для автономной системы**

Рассмотрим автономную систему ($h(t) \equiv h$, $P(t) \equiv P$, $R(t) \equiv R$) с неубывающей функцией $\mu(k)$. В этом случае правая часть (1.55) постоянна, а левая не возрастает. Следовательно, в начале траектории $\lambda = 0$, а затем $\lambda > 0$ до конца временнóго интервала, то есть существует только одна точка переключения с $\lambda = 0$ на $\lambda > 0$, а обратного переключения произойти не может.

Обозначим этот момент переключения через $\theta$. Неизвестное начальное значение $\psi$ обозначим $\psi_0$. Запишем на отрезке $[t_0, \theta]$ уравнения (1.42) и (1.43) при условии $\lambda = 0$, а на отрезке $[\theta, t_1]$ — при $\lambda > 0$.

Пусть найдены траектории $k(t)$ и $\psi(t)$ для всех $\theta$ и $\psi_0$. Тогда из условия $\psi(t_1) = 0$ находим $\psi_0$ (это значение будет в общем случае зависеть от $\theta$), а затем из условия переключения в точке $\theta$ — сам момент $\theta$.

Поскольку в начале траектории $\lambda = 0$, то $\psi(t) = \psi(t_0) = \psi_0$, и производная

$$\dot{k}(t) = -\frac{1}{(2\psi_0)^2}\|h\|^2_{R^{-1}} \tag{1.56}$$

не зависит от времени, то момент переключения может быть выражен через $\psi_0$:

$$\theta = t_0 + \frac{(2\psi_0)^2}{\|h\|^2_{R^{-1}}}\left(k_0 - \mu^{-1}\left(\frac{\|R^{-1}h\|_P}{2\psi_0}\right)\right),$$

где $\mu^{-1}$ — функция, обратная к $\mu(k)$. Если получается $\theta < t_0$, то всюду $\lambda > 0$, а в случае $\theta > t_1$ всюду $\lambda = 0$.

**Численное отыскание траекторий**

Дифференциальные уравнения для $k(t)$ и $\psi(t)$ достаточно сложны, так как в каждый момент необходимо определять значение множителя Лагранжа $\lambda$ и по нему управление, после чего подставлять в уравнения (1.42) и (1.43). При наличии двух и более собственных чисел матрицы $P^{-\frac{1}{2}}RP^{-\frac{1}{2}}$ аналитическое нахождение значения $\lambda$ не представляется возможным, так как оно будет корнем многочлена степени $2m$, где $m$ — количество собственных значений.

Однако основной трудностью является одновременный учёт начальных условий для $k$ и $\psi$, задаваемых на разных концах временнóго интервала. В связи с этим предлагается следующий *алгоритм численного решения* задачи:

1. Выбрать начальное приближение $\psi_0 = \psi(t_0)$.

2. Численно решить дифференциальные уравнения (1.42) и (1.43) (используя произвольный метод для численного решения ОДУ, например, метод Эйлера или Рунге–Кутты). При этом на каждом шаге значение множителя Лагранжа $\lambda$ ищется как приближённое решение уравнения (1.50). В результате получится некоторое значение $\psi_1(\psi_0) = \psi(t_1)$.

3. Повторяя первые эти шаги необходимое число раз, найти все решения уравнения $\psi_1(\psi_0) = 0$; обозначим их через $\psi_0^i$.

4. Из управлений, соответствующих начальным значениям $\psi_0^i$, выбрать то, на котором значение функционала (1.41) наибольшее.

**Теорема 1.28.** *Пусть выполнены условия теоремы о существовании решения. Тогда указанный алгоритм находит оптимальное управление.*

*Доказательство.* Пусть $\bar{\psi}(t)$ — траектория переменной $\psi$, соответствующая оптимальному управлению $u(\cdot)$. Тогда число $\bar{\psi}(t_0)$ является решением уравнения $\psi_1(\psi_0) = 0$ в силу того, что принцип максимума требует $\bar{\psi}(t_1) = 0$. Следовательно, значение $\bar{\psi}(t_0)$ и соответствующие ему траектории $\psi(t)$ и управления будут найдены алгоритмом. $\square$

### 1.3.6 Задача синтеза управлений. Функция цены

Рассмотрим задачу попадания траекторий системы линейных дифференциальных уравнений на целевое множество $\mathcal{M} = \{(x, k) \mid x \in \mathcal{M}(k),\ k \in \mathbb{R}\}$. Для этого нам потребуется определить класс *позиционных стратегий* $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$, состоящий из многозначных отображений $\mathcal{U} : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_p}$, полунепрерывных сверху по переменным $(x, k)$ и измеримых по $t$, удовлетворяющих вложению $\mathcal{U}(t, x, k) \subseteq \mu(k)\mathcal{P}(t)$.

Впрочем, вместо класса $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ нам будет удобнее использовать класс $\mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$, отличающийся от $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ геометрическим ограничением $\mathcal{U}(t, x, k) \subseteq \mathcal{P}(t)$. Очевидно, что между стратегиями $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ и $\mathcal{U}' \in \mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$ существует взаимно-однозначное соответствие, задаваемое равенством $\mathcal{U}(t, x, k) = \mu(k)\mathcal{U}'(t, x, k)$. Управления $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ гарантируют существование и продолжаемость решений дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \mu(k)B(t)u \\ -\mu^2(k)\|u\|^2_{R(t)} \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}(t, x, k) \right\}. \tag{1.57}$$

(Взятие выпуклой оболочки здесь носит чисто технический характер и в сделанных предположениях не прибавляет возможностей управлению.)

**Задача 1.9.** *Найти область разрешимости* $\mathcal{W}_{G(I)}[k_0, t_0] \subseteq \mathbb{R}^n$ *и позиционную стратегию* $\mathcal{U} \in \mathcal{U}'_{CL}$*, такие, что все траектории дифференциального включения* (1.57)*, выпущенные из точки* $x(t_0) \in \mathcal{W}_{GI}[k_0, t_0]$*,* $k(t_0) = k_0$*, в конечный момент попадают на целевое множество множество* $\mathcal{M}$*.*

С целью применения метода динамического программирования, мы сведем задачу 1.9 к следующей экстремальной задаче:

**Задача 1.10.** *Указать позиционную стратегию* $\mathcal{U} \in \mathcal{U}'_{CL}$*, при которой решения дифференциального включения* (1.57)*, выпущенные из произвольной точки* $(x(t_0), k(t_0) = (x_0, k_0)$*, оказываются в конечный момент на минимально возможном расстоянии от целевого множества* $\mathcal{M}(k(t_1))$*. Найти это расстояние* $V(t, x, k)$ *для каждой точки* $(t, x, k) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*.*

Очевидно, что решив задачу 1.10, можно автоматически получить и решение задачи 1.9: множество разрешимости является множеством уровня функции цены, а соответствующее управление гарантируется попадание на целевое множество из множества разрешимости.

Поскольку использование позиционных стратегий не увеличивает возможностей управления в отсутствие помехи, то минимальное расстояние, которое необходимо отыскать в задаче 1.10, может быть выражено через программные стратегии и равно

$$V(t, x, k) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)} d\left(x(t_1), \mathcal{M}(k(t_1))\right).$$

Вычислим функцию цены, используя сопряженную задачу:

$$V(t, x, k) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)} \max_{\|\ell\| \leqslant 1} \left\{ \left\langle x + \int_t^{t_1} B(t) u(t)\, \mathrm{d}t, \ell \right\rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(k(t_1))\right) \right\}.$$

Функция $u(\cdot) \to k(t_1)$ вогнута (см. лемму 1.20). Если множество $\mathcal{M}$ выпукло, то функция $k \to \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(k)\right)$ вогнута (это можно видеть из леммы 2.15) и монотонна, если $\mathcal{M}(k_1) \subseteq \mathcal{M}(k_2)$. Следовательно, функция $u(\cdot) \to \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(k(t_1))\right)$ также вогнута. Получаем, что выражение под знаком минимакса вогнуто по $\ell$ и выпукло по $u(\cdot)$, поэтому минимакс можно заменить на максимин [78], откуда

$$V(t, x, k) = \max_{\|\ell\| \leqslant 1} \left\{ \langle x, \ell \rangle - \rho\left(\ell \;\middle|\; \mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k, t]\right) = d\left(x, \mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k, t]\right) \right\}. \tag{1.58}$$

Здесь множество разрешимости может быть найдено следующим образом:

$$\mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k,t] = \bigcup_{\gamma \leqslant k} \left\{ \mathcal{M}(\gamma) - \mathcal{X}_{\mathrm{G(I)}}(t,k;t_1,\gamma) \right\}.$$

Поскольку под знаком максимума в (1.58) стоит функция, выпуклая по $(x,k)$, то и сама функция цены будет выпуклой по фазовым переменным. Следовательно [55], функция цены является минимаксным (вязкостным) решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, \mu(k) B(t) u \right\rangle - \mu^2(k) \frac{\partial V}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0 \tag{1.59}$$

с начальным условием $V(t_1,x,k) = d(x,\mathcal{M}(k))$ и краевым условием $V(t,x,k)|_{\mu(k)=0} = d(x,\mathcal{M}(k))$.

Таким образом, оптимальный синтез управления может быть найден исходя из (1.59) и (1.58):

$$\mathcal{U}^*(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \mu(k) B(t) u \right\rangle - \mu^2(k) \frac{\partial h}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} =$$
$$= \operatorname*{Arg\,min}_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\{ \langle \ell_0, B(t) u \rangle - \mu(k) \rho_k(t,x,k) \|u\|^2_{R(t)} \right\},$$

где $h(t,x,k) = d(x,\mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k,t])$, $\rho(t,x,k) = \rho\left(\ell_0 \mid \mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k,t]\right)$, $\ell_0 = \ell_0(t,x,k)$ — элемент, на котором достигается максимум в выражении

$$d(x,\mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k,t]) = \max_{\|\ell\| \leqslant 1} \left\{ \langle \ell, x \rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k,t]\right) \right\},$$

и $\ell_0 = 0$, если $x \in \mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k,t]$. В силу непрерывности многозначного отображения $\mathcal{W}_{\mathrm{G(I)}}[k,t]$ синтез является полунепрерывным сверху, следовательно, $\mathcal{U}^* \in \mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$.

### 1.3.7 Примеры

**Пример 1.5 (Невыпуклое множество разрешимости).** Возможность невыпуклого множества достижимости при нарушении хотя бы одного из условий монотонности или вогнутости функции $\mu(k)$ мы продемонстрируем на следующей дискретной версии системы (1.39):

$$\begin{cases} x^{(i)} = x^{(i-1)} + \mu(k^{(i-1)}) B^{(i)} u^{(i)}, \\ k^{(i)} = k^{(i-1)} - (u^{(i)})^2, \end{cases} \qquad i = \overline{1,2}; \qquad \begin{cases} x^{(0)} = 0, \\ k^{(0)} = 1. \end{cases}$$

Здесь положение системы $x \in \mathbb{R}^2$, управление $u \in \mathbb{R}^1$, геометрическое ограничение $\left|u^{(i)}\right| \leqslant 1$. Функцию $\mu(k)$ будем выбирать так, чтобы $\mu(1) = 1$, $\mu(0) = 0$, а матрицы $B^{(i)}$ возьмем следующие:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Такой выбор означает, что на первом шаге управление может влиять на изменение лишь первой координаты, а во второй момент — лишь на вторую координату (рис. 1.1).

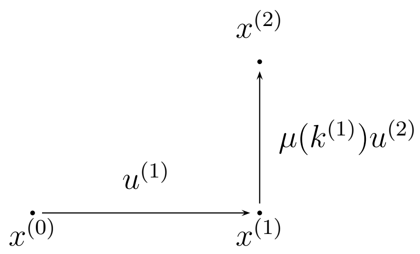


Рис. 1.1: Траектория системы в примере 1.5

Если нас интересует граница множества достижимости, то во второй момент следует выбирать $u^{(2)} = \pm 1$. Тогда, перебрав все возможные значения $u^{(1)}$, мы получим все точки границы (ясно, что сечение множества достижимости вдоль оси $Ox_2$ является отрезками, т.е. выпуклыми множествами).

Итак, граница множества достижимости образована точками вида

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} u \\ \pm\mu(1-u^2) \end{pmatrix}, \quad \text{т.е.} \quad x_2 = \pm\mu(1-x_1^2), \quad |x_1| \leqslant 1.$$

Приведем вид множества достижимости при различных функциях $\mu(\cdot)$ (рис. 1.8):

1. $\mu(k) = \tan\frac{3}{2}k\tan^{-1}\frac{3}{2}$, — нарушено условие вогнутости;

2. $\mu(k) = -7k^2 + 8k$ — нарушено условие монотонности;

3. $\mu(k) = k + \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi k$ — нарушены оба условия.

**Пример 1.6 (Одномерная автономная система).** Приведём формулировку задачи в этом примере. Требуется отыскать максимум интеграла

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T \mu(k(t))u(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.60}$$

при условии $|u(t)| \leqslant 1$, а также функцию $u(\cdot)$, на которой этот максимум реализуется. Здесь $k(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{k}(t) = -\mu^2(k(t))u^2(t), \quad k(0) = k_0.$$

Для определенности выберем $\mu(k) = k$, что соответствует в исходной задаче (1.39) ограничению $|u(t)| \leqslant k(t)$.

Воспользуемся изложенной выше схемой решения задачи для автономной системы. Пусть начальное значение $\psi$ равно $\psi_0$, тогда переключение с $\lambda = 0$ на $\lambda > 0$ происходит в момент

$$\theta = (2\psi_0)^2 \left(k_0 - \frac{1}{2\psi_0}\right), \tag{1.61}$$

а если $2\psi_0 k_0 < 1$, то с самого начала $\lambda > 0$, и тогда мы полагаем $\theta = 0$.

Найдём функцию $k(t)$. До момента $\theta$ она удовлетворяет уравнению (1.56), а после — уравнению $\dot{k}(t) = -k^2(t)$, поэтому

$$k(t) = \begin{cases} k_0 - \dfrac{t}{(2\psi_0)^2}, & 0 \leqslant t \leqslant \theta; \\ \dfrac{k(\theta)}{k(\theta)(t-\theta)+1}, & \theta < t \leqslant T. \end{cases}$$

После момента $\theta$ функция $\psi(t)$ — решение уравнения $\dot{\psi}(t) = -(1 - 2k(t)\psi(t))$, поэтому

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_0, & 0 \leqslant t \leqslant \theta; \\ (k(\theta)(t-\theta)+1)(\psi_0\,(k(\theta)(t-\theta)+1) - (t-\theta)), & \theta < t \leqslant T. \end{cases}$$

Исходя из требования $\psi(T) = 0$, получаем значение

$$\psi_0 = \frac{T-\theta}{k(\theta)(T-\theta)+1}. \tag{1.62}$$

Решая уравнения (1.61) и (1.62), находим $\theta$ и $\psi_0$:

$$\theta = T\frac{\sqrt{k_0 T}-1}{\sqrt{k_0 T}}, \qquad \psi_0 = \frac{\sqrt{k_0 T}}{2k_0} \qquad \text{в случае } k_0 T > 1, \text{ и}$$

$$\theta = 0, \qquad \psi_0 = \frac{T}{k_0 T + 1} \qquad \text{в случае } k_0 T < 1.$$

Оптимальное управление и значение функционала (1.60):

$$u^*(\cdot) = \begin{cases} \dfrac{2\psi_0}{4\psi_0^2 k_0 - t}, & t \in [0,\theta]; \\ 1, & t \in [\theta, T]; \end{cases}, \qquad J(u^*(\cdot)) = \begin{cases} \ln(k_0 T + 1), & k_0 T < 1; \\ \sqrt{k_0 T} + \ln 2 - 1, & k_0 T \geqslant 1. \end{cases}$$

На рисунке 1.9 представлено управление в исходных координатах, то есть функция $k(t)u(t)$ (пунктиром показан график $k(t)$). В одномерном случае эта функция всегда будет иметь такой вид: константа на тех участках, где $\lambda = 0$, и в точности $\mu(k(t))$ в противном случае.

**Пример 1.7 (Одномерная неавтономная система).** Для иллюстрации работы численного алгоритма решения задачи была выбрана система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (1 + \sin t)k(t)u(t), \\ \dot{k}(t) = -k^2(t)u^2(t), \end{cases}$$

На рисунке 1.10 приведен график управления в исходных координатах при выборе параметров $T = 6\pi$, $k_0 = \pi/12$.

**Пример 1.8 (Двухмерная система).** На рисунке 1.11 представлена трубка достижимости следующей двухмерной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \\ \dot{k}(t) = -k^2(t)u^2(t). \end{cases}$$

## 1.4 Иллюстрации

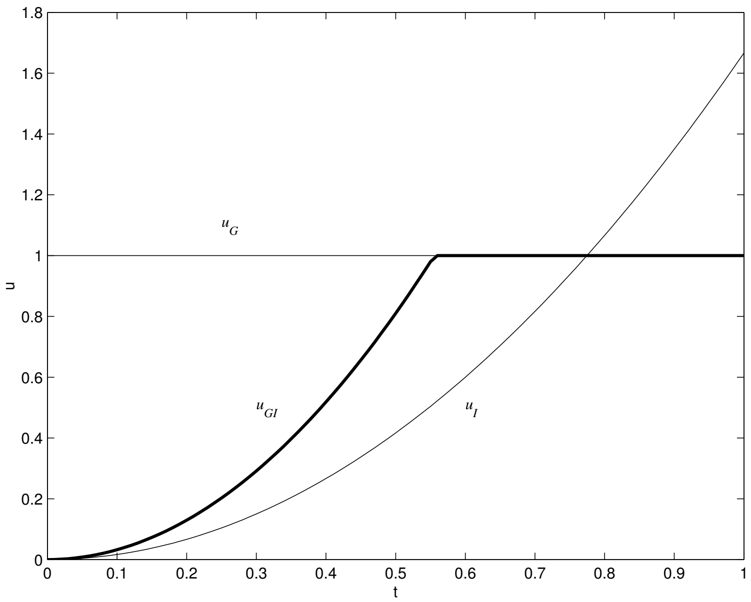


Рис. 1.2: Пример 1.1: траектории управления при геометрическом, интегральном и совместном ограничениях

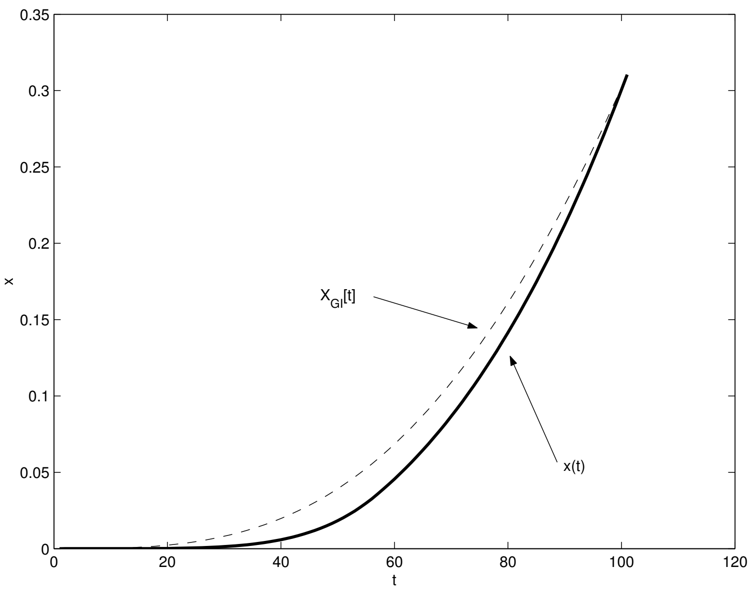


Рис. 1.3: Пример 1.2: оптимальная траектория и граница множества достижимости

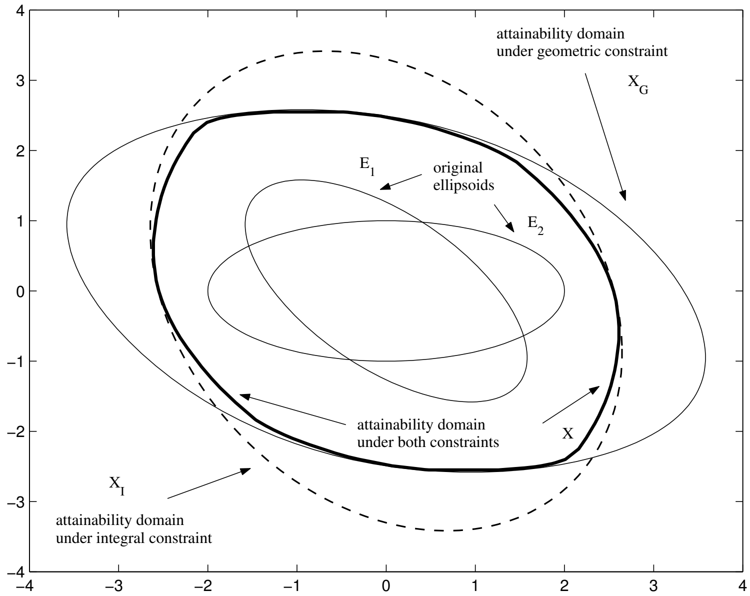


Рис. 1.4: Пример 1.3: множество достижимости при двойном ограничении и множества достижимости при отдельных ограничениях

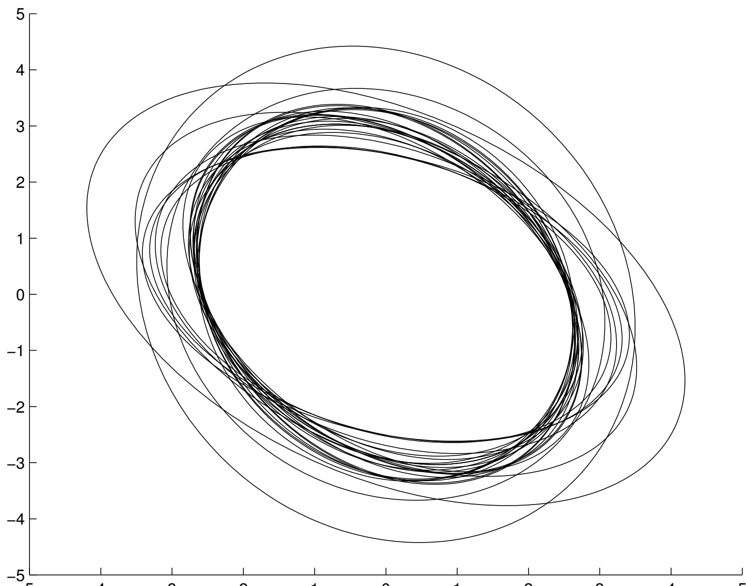

Рис. 1.5: Пример 1.3: построение множества достижимости с помощью эллипсоидальной аппроксимации

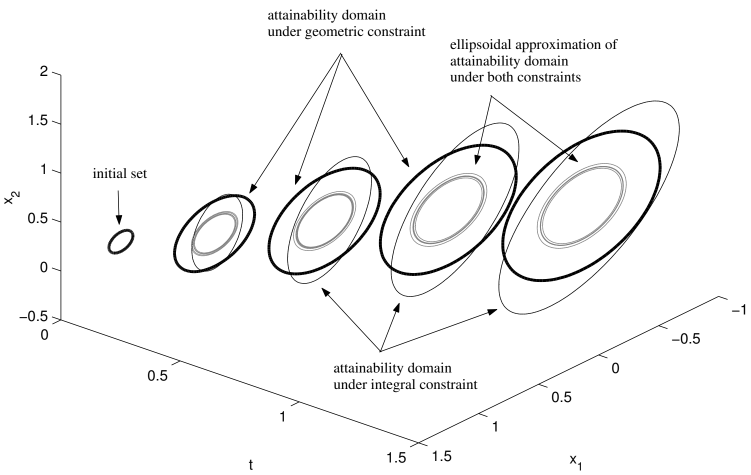


Рис. 1.6: Пример 1.4: динамика множеств достижимости при двойном и отдельных ограничениях

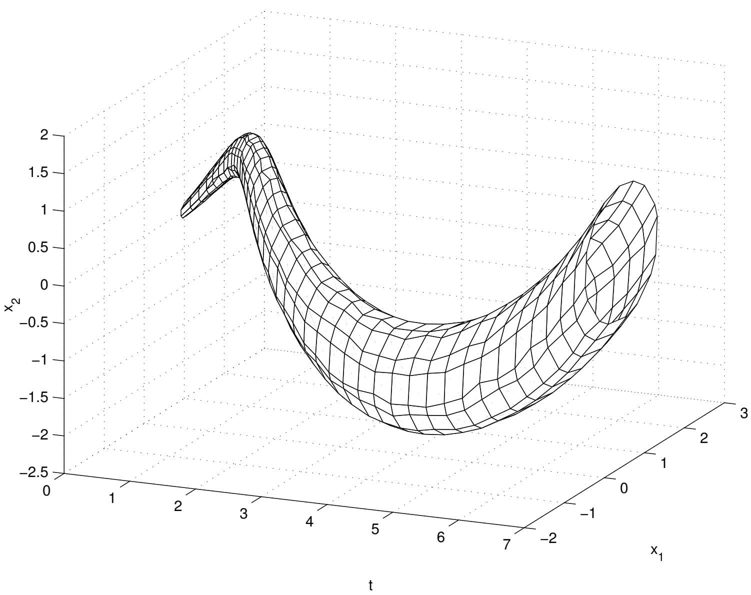


Рис. 1.7: Пример 1.4: трубка достижимости при двойном ограничении

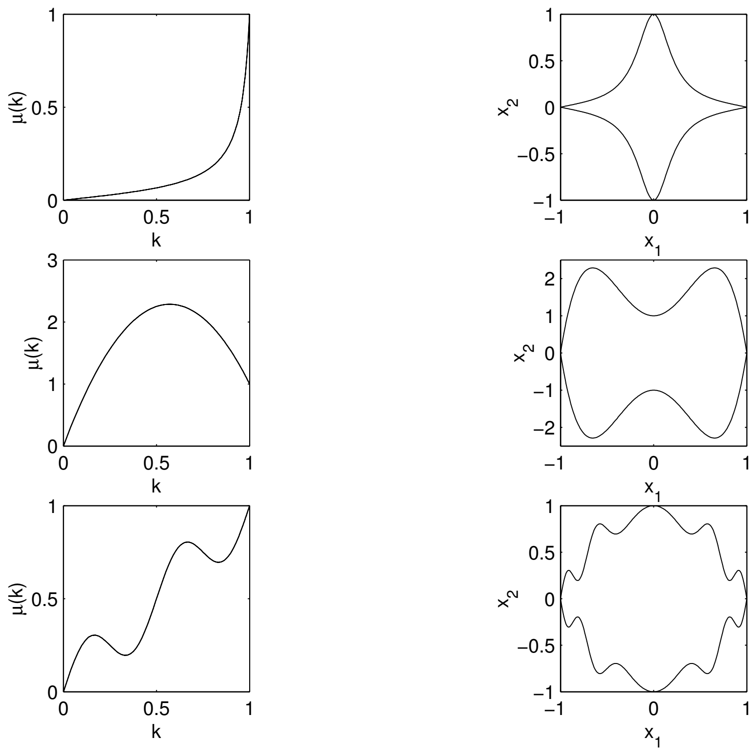


Рис. 1.8: Пример 1.5: невыпуклые множества достижимости

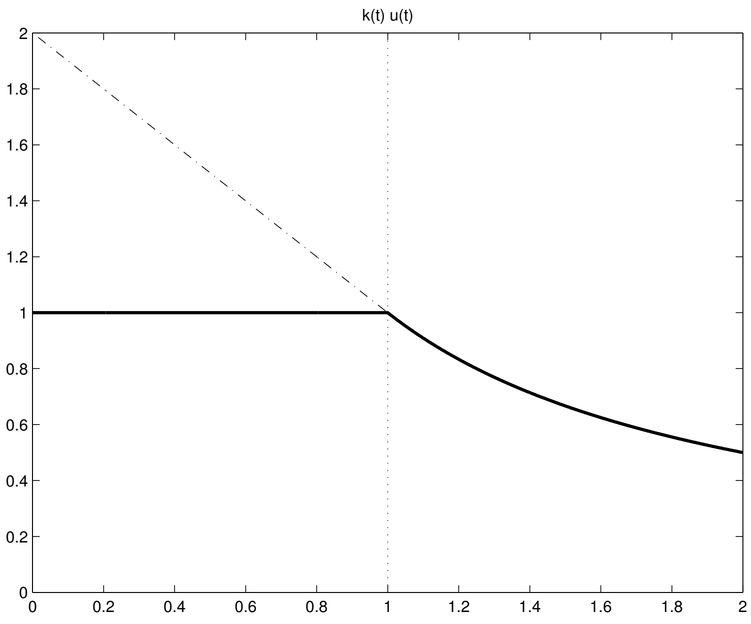


Рис. 1.9: Пример 1.6: график управления в исходных координатах

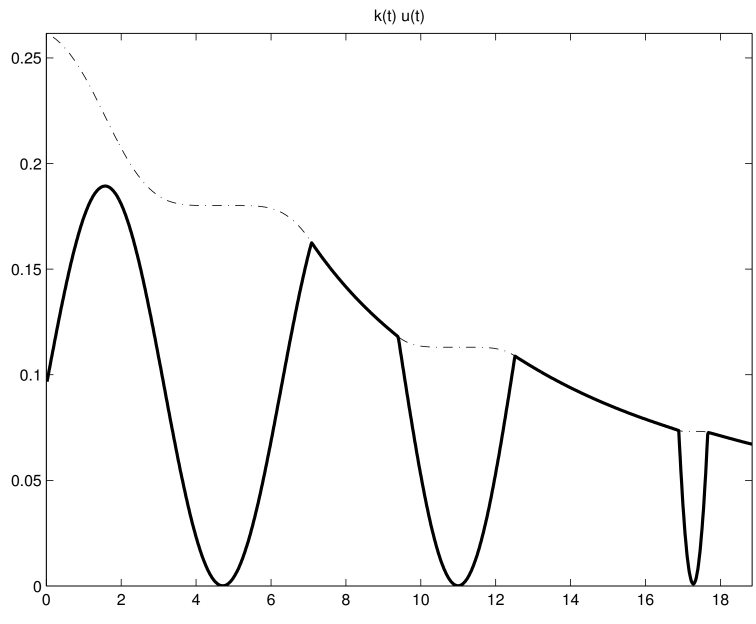


Рис. 1.10: Пример 1.7: график управления в исходных координатах

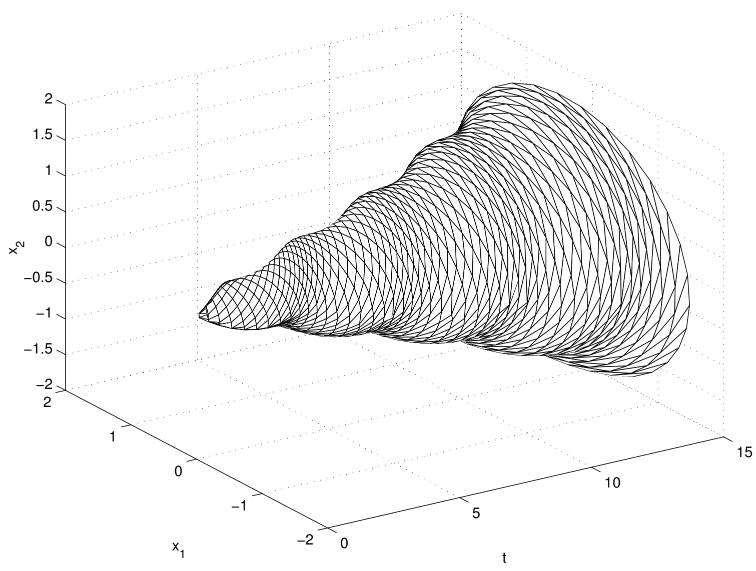


Рис. 1.11: Пример 1.8: трубка достижимости

# Глава 2

# Синтез управлений в условиях неопределенности при двойном ограничении на управление

## 2.1 Введение

Это глава посвящена синтезу управления для линейной системы при неопределенных возмущениях в условиях, когда управление стеснено одновременно геометрическим и интегральным ограничениями, а помеха — лишь геометрическим. Аналогичная постановка задачи исследовалась в статье [33], однако в ней предполагалось выполненным условие регулярности игры, фактически означающее сводимость игровой задачи к задаче оптимального управления. Здесь мы рассматриваем общий случай.

Будем рассматривать линейную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1], \tag{2.1}$$

отличающуюся от (1.1) наличием заранее неизвестной *помехи* $v$, стесненной геометрическим ограничением $v \in \mathcal{Q}(t) \subseteq \mathbb{R}^{n_q}$.

Как и в предыдущей главе, управление стеснено двойным ограничением, состоящим из геометрического ограничения $u \in \mathcal{P}(t)$ и ограничения на расход резерва, заданного в виде интегрального ограничения

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)} \, \mathrm{d}t \leqslant k(t_0). \tag{2.2}$$

Не умаляя общности, будем рассматривать систему (2.1) при $A(t) \equiv 0$, $C(t) \equiv I$.

Матрица $A(t)$ исчезает после замены переменных (1.10), а матрица $C(t)$ становится ненужной после замены множества $\mathcal{Q}(t)$ на $C(t)\mathcal{Q}(t)$.

В задаче с геометрическим ограничением на помеху и управление условия обычно выбираются таким образом, что целевое множество и множество разрешимости являются выпуклыми компактами. Однако в нашем случае это не так. Задачу с двойными ограничениями на управление удобнее сформулировать таким образом, чтобы целевое множество (а, следовательно, и множество разрешимости) было неограниченным в направлении оси $Ok$, а в задаче с разнотипными ограничениями (гл. 3) множество разрешимости является невыпуклым, даже если целевое множество выпуклое.

В этих условиях кажется вполне естественным отказаться от требований выпуклости и компактности множества разрешимости и целевого множества. Однако подобный отказ означал бы невозможность применения средств выпуклого анализа, или, по крайней мере, существенные трудности на этом пути. В данной работе для преодоления этого препятствия мы идем на компромисс, предполагая выпуклость и компактность не самого множества разрешимости, а его сечений при постоянном значении переменной $k$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $(x,k)$ задано множество $\mathcal{N}$. Будем называть сечениями множества $\mathcal{N}$ значения следующего многозначного отображения (рис. 2.1):

$$\mathcal{N}(k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,k) \in \mathcal{N}\}.$$

Очевидно, что само множество $\mathcal{N}$ однозначно восстанавливается по своим сечениям,

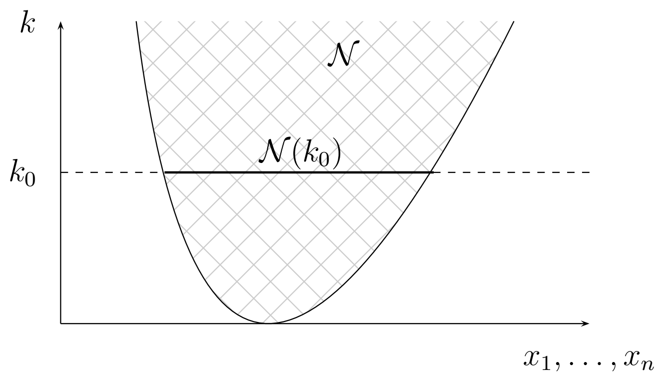


Рис. 2.1: Сечения множеств в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$

поскольку является графиком отображения $\mathcal{N}(\cdot)$:

$$\mathcal{N} = \left\{ (x,k) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x \in \mathcal{N}(k) \right\}.$$

При этом имеют место следующие соотношения между свойствами множества $\mathcal{N}$ и отображения $\mathcal{N}(\cdot)$:

1. из выпуклости $\mathcal{N}$ следует выпуклость сечений $\mathcal{N}(k)$;

2. в условиях локальной ограниченности и замкнутости множеств $\mathcal{N}(k)$ замкнутость $\mathcal{N}$ эквивалентна полунепрерывности сверху отображения $\mathcal{N}(\cdot)$.

## 2.2 Постановка задачи

Рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = B(t)u + v, \\ \dot{k}(t) = -\|u\|^2_{R(t)}, \end{cases} \qquad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{2.3}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор положения системы, $k(t) \in \mathbb{R}^1$ — текущий резерв управления, $u \in \mathbb{R}^{n_p}$ — управление, $v \in \mathbb{R}^{n_q}$ — помеха.

Как управление, так и помеха стеснены геометрическими ограничениями

$$u \in \mathcal{P}(t), \qquad v \in \mathcal{Q}(t), \qquad \forall t \in T. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ — заранее заданные непрерывные многозначные отображения, принимающие непустые выпуклые компактные значения.

Кроме того, управление не может допускать отрицательных значений резерва, то есть присутствует фазовое ограничение

$$k(t) \geqslant 0, \qquad \forall t \in T. \tag{2.5}$$

Предполагается, что матрица $R(t)$ положительно определена в каждый момент времени: тогда резерв не может увеличиваться, а при любой активности управления он будет уменьшаться. Относительно геометрического ограничения на управление будем предполагать, что $0 \in \mathcal{P}(t)$, поскольку иначе может не существовать допустимых управлений.

Управления могут принадлежать следующим двум классам.

1. *Программные управления* $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$ — измеримые функции, почти всюду удовлетворяющие геометрическому ограничению (2.4), а также обеспечивающие выполнение интегрального ограничения

$$\int_{t_0}^{t} \|u(t)\|_{R(t)}^2 \,\mathrm{d}t \leqslant k(t_0), \qquad\qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

эквивалентного фазовому ограничению (2.5). Вообще говоря этот класс зависит от начального резерва $k(t_0)$ — чем больше это значение, тем больше управлений входит в $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}} = \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k(t_0))$.

2. *Позиционные стратегии* $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ — многозначные функции вида $\mathcal{U}(t,x,k)$: $[t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, измеримые по $t$ и непрерывные сверху по совокупности переменных $(x,k)$. Дополнительные условия

$$\mathcal{U}(t,x,k) \subseteq \mathcal{P}(t), \qquad\qquad \mathcal{U}(t,x,k) = \{0\} \quad \text{при} \quad k < 0$$

гарантируют выполнение соответственно геометрического (2.4) и фазового (2.5) ограничений.

Выбор стратегий из класса $\mathcal{U}_{CL}$ обеспечивает существование решений дифференциального включения[1] [63]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} \in \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} B(t)u \\ -\|u\|_{R(t)}^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}(t,x,k) \right\} + \mathcal{Q}(t) = \mathcal{B}(t,\mathcal{U}(t,x,k)) + \mathcal{Q}(t). \tag{2.6}$$

(Здесь и далее для упрощения нотации под записью $\mathcal{Q}(t)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ подразумевается множество $\{(x,k) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathcal{Q}(t), k = 0\}$).

Пусть задано непустое целевое множество $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, сечения которого обладают следующими свойствами:

1. монотонное неубывание: $\mathcal{M}(k_1) \subseteq \mathcal{M}(k_2)$, если $k_1 \leqslant k_2$;

2. $\mathcal{M}(k) = \varnothing$ при $k < 0$;

[1] Взятие выпуклой оболочки носит чисто технический характер и не влияет на возможности управления. Как было отмечено в [63], требование выпуклости правой части дифференциального включения может быть заменено на условие ее непрерывности, однако поскольку оптимальные позиционные стратегии являются лишь полунепрерывными сверху, но не непрерывными, предпочтительнее взять овыпуклениe правой части, чем требовать непрерывности стратегий. Заметим, что для существования решения требуется лишь измеримость, а не непрерывность многозначных отображений $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$.

3. $\mathcal{M}(k)$ непрерывно при тех $k$, где $\mathcal{M}(k) \neq \varnothing$;

4. множества $\mathcal{M}(k)$ являются выпуклыми компактами.

Перечисленные условия означают, что множество $\mathcal{M}$ является замкнутым, обладает выпуклыми сечениями, полностью лежит в полупространстве $\{k \geqslant 0\}$ и расширяется с ростом $k$. Класс отображений $\mathbb{R} \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$, обладающих свойствами 1–4, обозначим через $\mathfrak{M}$. В некоторых случаях вместо свойства 4 потребуется более сильное:

4'. множество $\mathcal{M}$ является выпуклым.

Соответствующий класс отображений обозначим через $\mathfrak{M}'$.

Целью данной главы является решение следующей задачи:

**Задача 2.1.** *Указать множество разрешимости $\mathcal{W}[t_0] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, а также позиционную стратегию управления $\mathcal{U}(t,x,k) \in \mathcal{U}_{CL}$, такие, что все решения дифференциального включения* (2.6)*, начинающиеся в точке $(t, x(t), k(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $(x(t), k(t)) \in \mathcal{W}[t]$, в конечный момент удовлетворяют включению $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$.*

Множество разрешимости зависит от целевого множества и конечного момента времени, поэтому там, где эта зависимость является существенной, будет использоваться другое, более полное обозначение $\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t; t_1, \mathcal{M})$. Сечения множества разрешимости будем обозначать как $\mathcal{W}[k,t] = \mathcal{W}(k, t; t_1, \mathcal{M}(\cdot))$.

## 2.3 Сведение к задаче без фазового ограничения

Введем еще один класс стратегий, включающий в себя $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$:

3. *Позиционные стратегии без интегрального ограничения*: $\mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$ — многозначные функции $\mathcal{U}(t,x,k)\colon [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$, измеримые по $t$ и полунепрерывные сверху по совокупности переменных $(x,k)$, значения которых удовлетворяют вложению $\mathcal{U}(t,x,k) \subseteq \mathcal{P}(t)$.

**Задача 2.1'** дословно повторяет задачу 2.1, с тем лишь различием, что управления берутся в классе $\mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$, а соответствующее множество разрешимости обозначается $\mathcal{W}'[t]$.

**Теорема 2.1.** *Множества разрешимости с фазовым ограничением $\mathcal{W}[t]$ и без него $\mathcal{W}'[t]$ совпадают.*

*Доказательство.* Включение $\mathcal{W}[t] \subseteq \mathcal{W}'[t]$ очевидно, поскольку класс стратегий $\mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$ шире, чем $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$. Покажем, что на самом деле это включение является равенством.

Пусть $(x(t_0), k(t_0)) \in \mathcal{W}'[t_0]$, а $\mathcal{U}'(t, x, k)$ — стратегия управления, гарантирующая включение $\mathcal{X}'[t_1] \subseteq \mathcal{M}$. Здесь $\mathcal{X}'[t]$ — трубка решений дифференциального включения (2.6) при управлении $\mathcal{U}'$. Определим управление $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ следующим образом:

$$\mathcal{U}(t, x, k) = \begin{cases} \mathcal{U}'(t, x, k), & k \geqslant 0; \\ \{0\}, & k < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Пусть $(x'(\cdot), k'(\cdot))$ — решение (2.6) для управления $\mathcal{U}'$. Тогда, поскольку $(x'(t_1), k'(t_1)) \in \mathcal{M}$, то $k'(t_1) \geqslant 0$ и, следовательно, $'k(t) \geqslant 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Последнее означает, что

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'(t) \\ \dot{k}'(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(t, \mathcal{U}'(t, x'(t), k'(t))) + \mathcal{Q}(t) = \mathcal{B}(t, \mathcal{U}(t, x'(t), k'(t))) + \mathcal{Q}(t),$$

то есть $(x'(\cdot), k'(\cdot))$ является также решением дифференциального включения (2.6) для управления $\mathcal{U}$. Таким образом, $\mathcal{X}'[\cdot] \subseteq \mathcal{X}[\cdot]$.

С другой стороны, пусть $(x(\cdot), k(\cdot))$ — решение (2.6) для управления $\mathcal{U}$. Тогда из (2.7) следует, что $k(t) \geqslant 0$, и аналогичным рассуждением мы получаем $\mathcal{X}[\cdot] \subseteq \mathcal{X}'[\cdot]$. Это в свою очередь означает, что $\mathcal{X}[t_1] \subseteq \mathcal{M}$, а точка $(x(t_0), k(t_0))$ лежит во множестве разрешимости $\mathcal{W}[t_0]$. □

Доказанная теорема показывает, что для учета интегрального (фазового) ограничения достаточно переопределить нулем при отрицательном резерве стратегию из $\mathcal{U}'_{\mathrm{CL}}$, а множества разрешимости при интегральном ограничении и без него при надлежащем выборе целевого множества совпадают. Это дает одно из возможных решений задачи 2.1.

Задача 2.1' рассматривает проблему синтеза для линейной системы с геометрическими ограничениями на помеху и управления. Задачи такого типа изучены в работах [48, 49, 39, 40, 28, 29], а для построения множества разрешимости эффективно применяется аппарат эллипсоидального исчисления [73].

Однако в данной постановке задачи более естественно искать управления, минимизирующие отклонение $d(x(t_1), \mathcal{M}(k(t_1)))$. Во-первых, множества $\mathcal{M}(k)$ являются выпуклыми, а во-вторых это позволяет не смешивать при вычислении расстояния переменные $x$ и $k$, имеющие, вообще говоря, различные размерности. В общем случае указанное отклонение больше, чем расстояние $d((x(t_1), k(t_1)), \mathcal{M})$, причем различие может быть весьма существенным.

Чтобы иметь возможность применить известные методы построения множества разрешимости (альтернированный интеграл, эволюционное уравнение, эллипсоидальная аппроксимация), терминальное множество должно быть компактным, тогда как множество $\mathcal{M}$ неограничено в направлении оси $Ok$. Чтобы обойти эту трудность, заменим исходное целевое множество на «усеченное»

$$\mathcal{M}_K = \mathcal{M} \cap (\mathbb{R}^n \times [0, K]), \qquad \mathcal{M}_K(k) = \begin{cases} \mathcal{M}(k), & k \leqslant K; \\ \varnothing, & k > K. \end{cases}$$

Здесь значение $K > 0$ можно рассматривать как разумную верхнюю границу для значений переменной $k$. Это может быть, например, емкость топливных баков: нет смысла искать решение задачи при всевозможных $k$, если резерв заведомо ограничен.

Пусть $\mathcal{W}'_K[t]$ — множество разрешимости в задаче 2.1' при целевом множестве $\mathcal{M}_K$.

**Лемма 2.2.** *Между множествами $\mathcal{W}'_K[t]$ и $\mathcal{W}[t]$ и их сечениями имеют место следующие соотношения:*

1. $\mathcal{W}'_K[t] \subset \mathcal{W}[t]$;
2. $\mathcal{W}'_K[k, t] = \mathcal{W}[k, t]$ *при* $k \leqslant K$;
3. $\bigcup\limits_{K>0} \mathcal{W}'_K[t] = \mathcal{W}[t]$.

*Доказательство.* Первое соотношение следует из вложения $\mathcal{M}_K \subseteq \mathcal{M}$. Второе получается исходя из того, что значение $k(t)$ со временем может только уменьшаться, и поэтому сечение $\mathcal{W}[k, t]$ зависит только от тех сечений целевого множества $\mathcal{M}(\gamma)$, у которых $\gamma \leqslant k$. Наконец, третье соотношение непосредственно вытекает из второго. $\square$

## 2.4 Альтернированный интеграл

### 2.4.1 Программные множества разрешимости

Назовем *множеством разрешимости максиминного типа* $W^+(t; t_1, \mathcal{M})$ совокупность векторов $(x, k) \in \mathbb{R}^{n+1}$, таких, что для любой допустимой помехи $v(\cdot)$ существует допустимое программное управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$, при котором $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$. Здесь $(x(t_1), k(t_1))$ — конец траектории, выпущенной из точки $x(t) = x$, $k(t) = k$.

Аналогичным образом определим *множество разрешимости минимаксного типа*, обозначаемое $W^-(t; t_1, \mathcal{M})$, как совокупность векторов, для которых существует допустимое управление, гарантирующее включение $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$ для любой допустимой помехи $v(\cdot)$.

**Лемма 2.3.** *Сечения максиминного и минимаксного множеств достижимости могут быть найдены по следующим формулам:*

$$W^+(k, t; t_1, \mathcal{M}(\cdot)) = \bigcup_{0 \leqslant \gamma \leqslant k} [\mathcal{M}(\gamma) - \mathcal{X}_{GI}(t, t_1, k-\gamma)] \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{2.8}$$

$$W^-(k, t; t_1, \mathcal{M}(\cdot)) = \bigcup_{0 \leqslant \gamma \leqslant k} \left[ \left( \mathcal{M}(\gamma) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) - \mathcal{X}_{GI}(t, t_1, k-\gamma) \right]. \tag{2.9}$$

Здесь через $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$ обозначено множество достижимости из начала координат при двойном ограничении, изученное в п. 1.2:

$$\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t, t_1, \Delta k) = \left\{ \int_t^{t_1} B(\tau) u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \;\middle|\; \int_t^{t_1} \|u(\tau)\|^2_{R(\tau)}\, \mathrm{d}\tau \leqslant \Delta k, u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \right\}.$$

Объединение в формулах (2.8), (2.9) можно брать по меньшему интервалу, а именно по $[0 \vee k - \delta, k]$, где

$$\delta = \int_t^{t_1} \left| R^{\frac{1}{2}}(\tau) \mathcal{P}(\tau) \right| \mathrm{d}\tau = O(t_1 - t),$$

потому что при $\Delta k > \delta$ интегральное ограничение становится неактивным и множество $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t, t_1, \Delta k)$ перестает расти, а множество $\mathcal{M}(\gamma)$ не становится больше.

Заметим, что в общем случае сечения (2.8), (2.9) не являются выпуклыми, так как объединение выпуклых множеств не обязательно будет выпуклым.

### 2.4.2 Интегральные суммы

Пусть последовательные моменты времени $\tau_0, \ldots, \tau_m$ задают произвольное разбиение отрезка $[t, t_1]$, причем $t = \tau_0$, $t_1 = \tau_m$, $\sigma_i = \tau_i - \tau_{i-1} > 0$. Обозначим это разбиение за $\mathcal{T}$.

В конечный момент $t_1$ положим

$$W^+_{\mathcal{T}}[k, \tau_m] = W^-_{\mathcal{T}}[k, \tau_m] = \mathcal{M}(k),$$

а в каждый из предыдущих моментов рекуррентно определим

$$W^+_{\mathcal{T}}[k, \tau_{i-1}] = W^+(k, \tau_{i-1}; \tau_i, W^+_{\mathcal{T}}[\cdot, \tau_i]),$$
$$W^-_{\mathcal{T}}[k, \tau_{i-1}] = W^-(k, \tau_{i-1}; \tau_i, W^-_{\mathcal{T}}[\cdot, \tau_i]).$$

Множества, полученные на последнем шаге,

$$W^+_{\mathcal{T}}[k,\tau_0] = \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t],$$
$$W^-_{\mathcal{T}}[k,\tau_0] = \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k,t]$$

называются *верхней и нижней интегральными суммами.*

Как уже отмечалось, программные множества разрешимости, и, следовательно, интегральные суммы, не обязательно являются выпуклыми, поэтому нам потребуется следующее

**Предположение 2.1.** Для любого разбиения $\mathcal{T}$ отображения $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[\cdot,t]$ и $\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[\cdot,t]$ принадлежат классу $\mathfrak{M}$.

При выполнении предположения 2.1 интегральные суммы могут рассматриваться как отображения $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, что далее позволит сформулировать полугрупповое свойство для верхнего и нижнего альтернированных интегралов и множества разрешимости. Если же множество $\mathcal{M}$ является выпуклым, то есть принадлежит классу $\mathfrak{M}'$, то предположение 2.1 выполнено автоматически, а интегральные суммы также принадлежат классу $\mathfrak{M}'$.

Пусть для некоторого значения $k$ существует хаусдорфов предел верхних интегральных сумм

$$\lim_{\operatorname{diam}\mathcal{T}\to 0} h(\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t],\mathcal{I}^+[k,t]) = 0,$$

не зависящий от выбора последовательности разбиений. Тогда множество $\mathcal{I}^+[k,t] = \mathcal{I}^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))$ мы будем называть *верхним альтернированным интегралом* (для данного значения $k$). Аналогичным образом *нижний альтернированный интеграл* $\mathcal{I}^-[k,t] = \mathcal{I}^-(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))$ определяется как предел нижних интегральных сумм.

**Лемма 2.4.** *Справедливо вложение*

$$\mathcal{I}^-[k,t] \subseteq \mathcal{W}[k,t] \subseteq \mathcal{I}^+[k,t], \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad k \geqslant 0.$$

Если верхний и нижний интегралы совпадают, то множество $\mathcal{I}[k,t] = \mathcal{I}^+[k,t] = \mathcal{I}^-[k,t]$ называется *альтернированным интегралом.* Очевидно, что в этом случае $\mathcal{W}[k,t] = \mathcal{I}[k,t]$.

Важным свойством построенных многозначных интегралов является то, что для них справедлив *принцип оптимальности*, выполняющийся в виде *полугруппового* *свойства.* Для формулировки последнего необходимо рассматривать области разрешимости не как статические множества, а как отображения некоторого класса множеств в себя, при этом начальный и конечный моменты времени выступают в качестве параметров этого отображения.

Для множеств программной разрешимости $W^+$ и $W^-$ полугрупповое свойство, очевидно, не выполняется: если взять композицию двух отображений $W^+$, то полученное множество будет меньше $W^+$. Однако уже для интегральных сумм $\mathcal{I}^+_\mathcal{T}$ и $\mathcal{I}^-_\mathcal{T}$ полугрупповое свойство выполняется, хотя и в несколько «ограниченной» форме. В самом деле, зафиксируем точку $\tau$ внутри временного интервала $[t, t_1]$. Эта точка разобьет интервал на два отрезка. На правом отрезке вычислим интегральную сумму $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}'}$, и взяв ее в качестве целевого множества, вычислим на левом отрезке интегральную сумму $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}''}$. Нетрудно видеть, что полученное множество будет ничем иным, как интегральной суммой для разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \cup \mathcal{T}''$.

Устремив теперь мощность разбиения к бесконечности, мы получаем в пределе полугрупповое свойство для верхнего и нижнего интегралов как отображений вида $\mathcal{M}(\cdot) \to \mathcal{I}^\pm(\cdot, \tau'; \tau'', \mathcal{M}(\cdot))$, $t_0 \leqslant \tau' \leqslant \tau'' \leqslant t_1$, а если верхний и нижний интегралы совпадают — то и для альтернированного интеграла.

**Лемма 2.5.** *Множество отображений вида $\mathcal{M}(\cdot) \to \mathcal{I}^+(\cdot, t; \tau, \mathcal{M}(\cdot))$ обладает полугрупповым свойством:*

$$\mathcal{I}^+(k, t; t_1, \mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{I}^+(k, t; \tau, \mathcal{I}^+(\cdot, \tau; t_1, \mathcal{M}(\cdot))), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad k \geqslant 0.$$

*То же самое верно и для нижнего альтернированного интеграла $\mathcal{I}^-$, а также для альтернированного интеграла $\mathcal{I}$, если последний существует.*

### 2.4.3 Случай выпуклого целевого множества

Пусть целевое множество $\mathcal{M}$ является выпуклым. Тогда максиминное и минимаксное множества разрешимости также являются выпуклыми и могут быть найдены по следующим формулам [49, 29]:

$$W^+(t; t_1, \mathcal{M}_K) = \left(\mathcal{M}_K - \int_t^{t_1} \mathcal{B}(\tau, \mathcal{P}(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$
$$W^-(t; t_1, \mathcal{M}_K) = \left(\mathcal{M}_K \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) - \int_t^{t_1} \mathcal{B}(\tau, \mathcal{P}(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Для доказательства сходимости интегральных сумм, как обычно, требуется принять дополнительные предположения:

**Предположение 2.2.** Существуют непрерывные положительные функции $\varkappa(t)$ и $r(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, такие, что

$$\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[\varkappa(\tau_i), \tau_i] \supseteq \mathcal{B}_{r(\tau_i)}$$

для любого разбиения $\mathcal{T} = \{\tau_0, \ldots, \tau_m\}$ и $i = 0, \ldots, m$.

**Предположение 2.3.** Существуют непрерывные положительные функции $\varkappa(t)$ и $r(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и число $\varepsilon > 0$, такие, что

$$\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[\varkappa(\tau_i), \tau_i] \supseteq \mathcal{B}_{r(\tau_i)}$$

для всех разбиений $\mathcal{T} = \{\tau_0, \ldots, \tau_m\}$ диаметра не более $\varepsilon$, $i = 0, \ldots, m$.

Выберем $K > \max\{\,\varkappa(t) + r(t) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$, тогда для интегральных сумм $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[t] = \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}(t; t_1, \mathcal{M}_K)$ и $\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}(t; t_1, \mathcal{M}_K)$ следуют соответствующие предположения о непустоте внутренности [44, 45, 29], гарантирующие совпадение верхнего и нижнего альтернированных интегралов. Это позволяет сформулировать следующее утверждение:

**Теорема 2.6.** *Пусть $\mathcal{M}(\cdot) \in \mathfrak{M}'$. Обозначим*

$$k_0^+(t) = \inf\left\{k \;\middle|\; \forall \mathcal{T} \quad \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}(k, t; t_1, \mathcal{M}(\cdot)) \neq \varnothing\right\},$$
$$k_0^-(t) = \inf\left\{k \;\middle|\; \exists \mathcal{T} \quad \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}(k, t; t_1, \mathcal{M}(\cdot)) \neq \varnothing\right\}.$$

*Тогда*

1. *при выполнении предположения 2.2 для всех $k \geqslant k_0^+(t)$ существует верхний альтернированный интеграл;*

2. *при выполнении предположения 2.3 для всех $k \geqslant k_0^-(t)$ существует нижний альтернированный интеграл;*

3. *при выполнении обоих предположений $k_0^+(t) \equiv k_0^-(t) = k_0(t)$, и*

   (a) *при $k > k_0(t)$ верхний и нижний альтернированный интегралы совпадают между собой и со множеством разрешимости:*

$$\mathcal{I}^+[k, t] = \mathcal{I}^-[k, t] = \mathcal{W}[k, t], \qquad k > k_0(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

(b) *при* $k < k_0(t)$ *верхний и нижний интегралы пусты;*

(c) *при* $k = k_0(t)$ *имеет место вложение*

$$\mathcal{I}^-[k_0(t), t] \subseteq \mathcal{I}^+[k_0(t), t], \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

4. *верхний альтернированный интеграл совпадает со множеством разрешимости:*

$$\mathcal{I}^+[k, t] = \mathcal{W}[k, t], \qquad k \geqslant 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

*Доказательство.* Как уже отмечалось выше, из предположений 2.2 и 2.3 следуют соответствующие предположения о непустоте интегральных сумм $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[t]$ и $\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[t]$ для задачи геометрическими ограничениями. Следовательно [29], существуют их хаусдорфовы пределы $\widetilde{\mathcal{I}^+}[t]$ и $\widetilde{\mathcal{I}^-}[t]$.

При измельчении разбиения $\mathcal{T}$ верхние интегральные суммы убывают, а нижние возрастают по вложению, так что можно применить леммы[2] 2.13 и 2.14 о переходе к пределу для сечений, из которых следует, что существуют пределы $\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k, t] \to \mathcal{I}^+[k, t]$ и $\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}[k, t] \to \mathcal{I}^-[k, t]$, причем

1. $\widetilde{\mathcal{I}^+}[k, t] = \mathcal{I}^+[k, t]$, $k \geqslant k_0^+(t)$;
2. $\widetilde{\mathcal{I}^-}[k, t] = \mathcal{I}^-[k, t]$, $k > k_0^-(t)$;
3. $\widetilde{\mathcal{I}^-}[k_0^-(t), t] \supseteq \mathcal{I}^-[k_0^-(t), t]$.

Это доказывает первые два утверждения. Остальные следуют из того, что при сделанных предположениях $\widetilde{\mathcal{I}^+}[t] = \widetilde{\mathcal{I}^-}[t] = \mathcal{W}[t]$. □

## 2.5 Синтез управлений

### 2.5.1 Функция цены и уравнение Гамильтона–Якоби–Айзекса–Беллмана

Потребуем от управления, чтобы оно минимизировало расстояние до сечения целевого множества в конечный момент времени вопреки действиям помехи. Этому соответствует *функция цены*

$$V(t, x, k) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\mathrm{CL}}} \sup_{z(\cdot) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(\cdot)} d(x(t_1), \mathcal{M}(k(t_1))), \tag{2.10}$$

[2] Ряд вспомогательных утверждений, использованных здесь, приведен в конце главы (п. 2.7).

где $z(t) = (x(t), k(t))$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — ансамбль решений дифференциального включения (2.6) при управлении $\mathcal{U}$.

**Задача 2.2.** *Найти синтезирующую стратегию* $\mathcal{U}(t,x,k) \in \mathcal{U}_{CL}$, *доставляющую минимум в* (2.10).

Очевидно, что множество разрешимости связано с функцией цены следующими соотношениями:

$$\mathcal{W}[k,t] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(t,x,k) \leqslant 0\}, \qquad \mathcal{W}[t] = \big\{(x,k) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\big|\; V(t,x,k) \leqslant 0\big\}.$$

Далее будет показано, что функция цены не превосходит расстояния до сечения множества разрешимости.

Функция цены (2.10) является минимаксным (вязкостным) решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (HJBI) [55]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, B(t)u + v \right\rangle - \frac{\partial V}{\partial k} \|u\|^2_{R(t)} \right\} = 0, \tag{2.11}$$
$$t_0 \leqslant t < t_1, \quad k > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

с краевым условием

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, v \right\rangle \Big|_{k=0} = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

и начальным условием

$$V(t_1, x, k) = d(x, \mathcal{M}(k)), \quad k \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Краевое условие (2.12) возникает здесь естественным образом и не приводит к перегруженности системы. Оно может быть выписано в явном виде:

$$V(t,x,0) = \max_{v(\cdot): v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau)} d\left(x + \int_t^{t_1} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \mathcal{M}(0)\right) \leqslant d\left(x, \mathcal{M}(0) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Отметим, что в общем случае функция цены сразу же теряет гладкость при $k = 0$, $t < t_1$, поэтому рассмотрение в качестве начального условия $d^2(x, \mathcal{M}(k))$ не делает ее классическим решением (2.11). По этой причине выбрано именно указанное начальное условие (2.13), которое, к тому же, удобнее при построении вычислительных схем.

Очевидно, что справедливо следующее утверждение:

**Теорема 2.7.** *Пусть* $\mathcal{M}_\mu(k) = \mathcal{M}(k) + \mathcal{B}^n_\mu$*, где* $\mathcal{B}^n_\mu$ *— шар радиуса* $\mu$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$V(t,x,k) = \inf\{\,\mu \geqslant 0 \mid x \in \mathcal{W}(k,t;t_1,\mathcal{M}_\mu(\cdot))\}.$$

В общем случае при переходе в пространство переменных $(x,k)$ имеет место строгое вложение $\mathcal{M}_\mu \subset (\mathcal{M}+\mathcal{B}^{n+1}_\mu)\cap\{k \geqslant 0\}$. В качестве примера можно указать $\mathcal{M}(k) = \{\,(x,k) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leqslant k\}$: тогда $\mathcal{M}_\mu(0) = \mathcal{B}^n_\mu$, $(\mathcal{M} + \mathcal{B}^{n+1}_\mu)(0) = \mathcal{B}^n_{\sqrt{2}\mu}$. Указанное вложение показывает, что рассматриваемая функция цены существенно отличается от функции цены с начальным условием $V(t_1,x,k) = d((x,k),\mathcal{M})$.

Если функция цены известна, то оптимальный синтез может быть получен как минимизатор в уравнении (2.11):

$$\mathcal{U}^*(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, B(t)u \right\rangle - \frac{\partial V}{\partial k}\|u\|^2_{R(t)} \right\}.$$

Поскольку $\frac{\partial V}{\partial k} \leqslant 0$, то функция, стоящая под минимумом, является выпуклой, поэтому $\mathcal{U}^*(t,x,k)$ — выпуклое множество. Кроме того в силу непрерывности функции цены имеет место полунепрерывность сверху отображения $\mathcal{U}^*(t,x,k)$ по переменным $x$ и $k$. Следовательно, указанное управление гарантирует существование и продолжаемость решений дифференциального включения (2.6).

### 2.5.2 Последовательный максимин и минимакс

Пусть $\mathcal{T} = \{\tau_0,\ldots,\tau_m\}$ — разбиение отрезка $[t,t_1]$. Положим в конечный момент $t_1 = \tau_m$

$$V^+_{\mathcal{T}}(\tau_m,x,k) = V^-_{\mathcal{T}}(\tau_m,x,k) = d(x,\mathcal{M}(k)),$$

а в предыдущих точках разбиения

$$\begin{aligned} V^+_{\mathcal{T}}(\tau_{i-1},x,k) &= \max_{v[\tau_{i-1},\tau_i]}\ \min_{u[\tau_{i-1},\tau_i]} V^+_{\mathcal{T}}(\tau_i,x(\tau_i),k(\tau_i)),\\ V^-_{\mathcal{T}}(\tau_{i-1},x,k) &= \min_{u[\tau_{i-1},\tau_i]}\ \max_{v[\tau_{i-1},\tau_i]} V^+_{\mathcal{T}}(\tau_i,x(\tau_i),k(\tau_i)), \end{aligned}$$

где $(x(\tau_i),k(\tau_i))$ — конец траектории, выпущенной из точки $(x(\tau_{i-1}),k(\tau_{i-1})) = (x,k)$, максимум берется по помехам, удовлетворяющим геометрическому ограничению, а минимум — по управлениям из класса $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}(k)$.

На последнем шаге получаем функции $V^+_{\mathcal{T}}(t,x,k) = V^+_{\mathcal{T}}(\tau_0,x,k)$ и $V^-_{\mathcal{T}}(t,x,k)$. Это функции цены в задаче программного управления с коррекцией в моменты $\tau_i$, когда помеха на очередном отрезке известна ($V^+$) или неизвестна ($V^-$) управлению. Очевидно, что они удовлетворяют неравенству

$$V^+_{\mathcal{T}}(t,x,k) \leqslant V(t,x,k) \leqslant V^-_{\mathcal{T}}(t,x,k).$$

Функции, определенные поточечными пределами

$$V^+(t,x,k) = \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{T}\to 0} V^+_{\mathcal{T}}(t,x,k) = \sup_{\mathcal{T}} V^+_{\mathcal{T}}(t,x,k),$$
$$V^-(t,x,k) = \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{T}\to 0} V^-_{\mathcal{T}}(t,x,k) = \inf_{\mathcal{T}} V^-_{\mathcal{T}}(t,x,k)$$

будем называть *последовательным максимином* и *последовательным минимаксом* соответственно. При имеющихся предположениях последовательный максимин совпадает с последовательным минимаксом и функцией цены [70, 80]:

$$V^+(t,x,k) = V(t,x,k) = V^-(t,x,k). \tag{2.14}$$

**Теорема 2.8.** *Пусть существует верхний альтернированный интеграл, тогда справедлива оценка*

$$V(t,x,k) \leqslant d(x,\mathcal{I}^+[k,t]) \tag{2.15}$$

*для тех значений $k$ и $t$, где $\mathcal{I}^+[k,t] \neq \varnothing$.*

*Доказательство.* Покажем, что имеет место оценка для последовательного максимина

$$V^+(t,x,k) \leqslant d(x,\mathcal{I}^+[k,t]), \tag{2.16}$$

тогда из (2.14) и (2.16) будет следовать и (2.15). В свою очередь, (2.16) следует из оценки

$$V^+_{\mathcal{T}}(t,x,k) \leqslant d(x,\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}[k,t]), \tag{2.17}$$

которую мы и будем далее доказывать по индукции. В самом деле, в конечный момент $\tau_m = t_1$ неравенство (2.17) выполняется в виде равенства. Пусть оно выполняется для момента $\tau_i$; покажем, что в момент $\tau_{i-1}$ оно также верно:

$$V^+_{\mathcal{T}}(\tau_{i-1},x,k) = \max_{v[\tau_{i-1},\tau_i]} \min_{u[\tau_{i-1},\tau_i]} V^+_{\mathcal{T}}(\tau_i, x(\tau_i), k(\tau_i)) = \max_{v[\tau_{i-1},\tau_i]} \min_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \min_{\substack{u[\tau_{i-1},\tau_i] \\ k(\tau_i)=\gamma}} V^+_{\mathcal{T}}(\tau_i, x(\tau_i), \gamma).$$

Значение только увеличится, если брать минимум не по всем $\gamma \in [0,k]$, а лишь по тем, где $W^+_{\mathcal{T}}[k,\tau_i] \neq \varnothing$; наименьшее такое значение обозначим через $\gamma_0$. При $\gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant k$

мы можем воспользоваться оценкой (2.17), уже доказанной для момента $\tau_i$, поэтому имеем

$$V_{\mathcal{I}}^{+}(\tau_{i-1},x,k) \leqslant \max_{v[\tau_{i-1},\tau_i]} \min_{\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant k} \min_{\substack{u[\tau_{i-1},\tau_i]\\ k(\tau_i)=\gamma}} d\left(x+\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(B(\tau)u(\tau)+v(\tau))\,\mathrm{d}\tau, W_{\mathcal{I}}^{+}[\gamma,\tau_i]\right) \leqslant$$

$$\leqslant d\left(x, \bigcup_{\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant k}\left(W_{\mathcal{I}}^{+}[\gamma,\tau_i]-\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(\tau_{i-1},\tau_i,k-\gamma)\right) \dot{-} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = d(x, W_{\mathcal{I}}^{+}[k,\tau_{i-1}]).$$

Здесь мы воспользовались формулами

$$\min_{p\in P} d(x+p,M) = d(x, M-P), \qquad \max_{q\in Q} d(x+q,M) \leqslant d(x, M\dot{-}Q),$$

$$\min_{k_1\leqslant k\leqslant k_2} d(x,M(k)) = d\left(x, \bigcup_{k_1\leqslant k\leqslant k_2} M(k)\right).$$

$\square$

### 2.5.3 Эволюционное уравнение

Многозначное отображение $(k,t)\to\mathcal{Z}[k,t]$ называется *слабо инвариантным*, если при $t_0\leqslant t<t+\sigma\leqslant t_1$ имеет место вложение

$$\mathcal{Z}[k,t]\subseteq W^{+}(k,t;t+\sigma,\mathcal{Z}[\cdot,t+\sigma]) = \\ = \bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k}\left(\mathcal{Z}[\gamma,t+\sigma]-\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t,t+\sigma,k-\gamma)\right)\dot{-}\int_t^{t+\sigma}\mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \quad (2.18)$$

Отметим, что свойство слабой инвариантности совпадает с понятием $u$-стабильности в теории Н. Н. Красовского.

Множество разрешимости $\mathcal{W}[k,t]$ является слабо инвариантным, поскольку оно заведомо содержится в программном максиминном множестве разрешимости. Легко видеть, что это максимальная по включению слабо инвариантная система множеств, удовлетворяющая условию $\mathcal{Z}[k,t_1]\subseteq\mathcal{M}(k)$.

Заменяя в (2.18) интеграл от $\mathcal{Q}(\tau)$ на множество $\sigma\mathcal{Q}(t)$ (с погрешностью порядка не более $O(\sigma^2)$) и переходя к пределу, получаем *эволюционное уравнение* для $\mathcal{Z}[k,t]$ в виде

$$\lim_{\sigma\downarrow 0}\sigma^{-1}h_{+}\left(\mathcal{Z}[k,t]+\sigma\mathcal{Q}(t), \bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k}\mathcal{Z}[\gamma,t+\sigma]-\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t,t+\sigma,k-\gamma)\right)=0. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) может быть упрощено, если учесть, что на малых промежутках времени $\sigma$ множество достижимости при двойном ограничении $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ близко к пересечению множеств достижимости при геометрическом и при интегральном ограничениях по отдельности. Для доказательства этого факта примем дополнительные предположения:

**Предположение 2.4.** $0 \in \operatorname{int} B(t)\mathcal{P}(t)$.

**Предположение 2.5.** Опорная функция $\rho\left(\ell \mid \mathcal{P}(t)\right)$ и функция $R(t)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной $t$.

В силу первого предположения можно без ограничения общности считать $B(t) \equiv I$.

**Теорема 2.9.** *Пусть выполнены указанные условия в момент времени $t$. Тогда*

$$h(\mathcal{X}_{GI}(t, t+\sigma, \delta), \mathcal{X}_G(t, t+\sigma) \cap \mathcal{X}_I(t, t+\sigma, \delta)) = O(\sigma^2), \tag{2.20}$$

*где $\mathcal{X}_G$ и $\mathcal{X}_I$ — множества достижимости при геометрическом и интегральном ограничении:*

$$\mathcal{X}_G(t, t+\sigma) = \int_t^{t+\sigma} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \mathcal{X}_I(t, t+\sigma, \delta) = \mathcal{E}\left(0, \delta \int_t^{t+\sigma} R^{-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

*Доказательство.* Для доказательства используются следующий факт о множестве достижимости при двойном ограничении [10]: во-первых, $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}} \subseteq \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}$, а во-вторых, это вложение становится равенством для автономных систем. Построим автономную систему, множество достижимости которой $\widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}} = \widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{G}}} \cap \widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{I}}}$ является внутренней аппроксимацией $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}$; для этого нам потребуются следующие леммы, доказываемые непосредственным вычислением:

**Лемма 2.10.** *Пусть $0 \in \operatorname{int} \mathcal{P}(t)$, а опорная функция $\rho\left(\ell \mid \mathcal{P}(t)\right)$ в точке $t$ удовлетворяет условию Липшица по переменной $t$ с константой $C_P$ равномерно по $\ell \in \mathcal{B}_1$. Пусть*

$$\mathcal{P}_\sigma(t) = \mathcal{P}(t)(1 - \sigma r^{-1} C_P), \qquad r = \max\{r \mid \mathcal{B}_r \subseteq \mathcal{P}(t)\}.$$

*Тогда при $\sigma < r C_P^{-1}$ имеют место вложение*

$$\mathcal{P}(\tau) \supseteq \mathcal{P}_\sigma(t), \qquad t \leqslant \tau \leqslant t+\sigma \tag{2.21}$$

*и оценка*

$$h\left(\int_t^{t+\sigma} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \sigma \mathcal{P}_\sigma(t)\right) = O(\sigma^2). \tag{2.22}$$

**Лемма 2.11.** *Пусть матричная функция $R(\cdot)$ такова, что $R(t) > 0$, $\forall t$, и в точке $t$ выполняется условие Липшица в форме*

$$\left| \|\ell\|_{R^{-1}(t)} - \|\ell\|_{R^{-1}(\tau)} \right| \leqslant C_R\,|\tau - t|\,\|\ell\|, \qquad \forall \ell \in \mathbb{R}^n.$$

*Выберем*

$$R_\sigma^{-1}(t) = R^{-1}(t)(1 - C_R\sigma\lambda_{\min}^{-\frac{1}{2}}(R^{-1}(t)))^2,$$

*тогда при $\sigma < \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(R^{-1}(t))C_R^{-1}$ имеют место неравенство*

$$R_\sigma(t) \geqslant R(\tau), \qquad t \leqslant \tau \leqslant t + \sigma \tag{2.23}$$

*и оценка*

$$h\left(\mathcal{E}\left(0, \int_t^{t+\sigma} R^{-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \mathcal{E}\left(0, \sigma R_\sigma^{-1}(t)\right)\right) = O(\sigma^{\frac{3}{2}}) \tag{2.24}$$

(*продолжение доказательства т. 2.9*) Обозначим через $\widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}}$ множество достижимости следующей системы

$$\dot{x}(\tau) = u(\tau), \qquad \dot{k}(\tau) = -\|u(\tau)\|^2_{R_\sigma(t)}, \qquad t \leqslant \tau \leqslant t + \sigma$$

при геометрическом ограничении $u(\tau) \in \mathcal{P}_\sigma(t)$ и фазовом ограничении $k(\tau) \geqslant 0$. В силу соотношений (2.21), (2.23) верно вложение $\widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}} \subseteq \mathcal{X}_{\mathrm{GI}} \subseteq \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}$, поэтому из следствия 2.17.1 имеем

$$h(\mathcal{X}_{\mathrm{GI}}, \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}) \leqslant h(\widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{G}}} \cap \widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{I}}}, \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{I}}) \leqslant \alpha + (\alpha + \beta) r^{-1} \operatorname{diam} \widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{I}}}, \tag{2.25}$$

где $r = \sqrt{\delta\sigma}\lambda_{\min}^{1/2}(R_\sigma^{-1}(t))$, $\operatorname{diam}\widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{I}}} = \sqrt{\delta\sigma}\lambda_{\max}^{1/2}(R_\sigma^{-1}(t))$, $\alpha = h(\widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{G}}}, \mathcal{X}_{\mathrm{G}})$, $\beta = h(\widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{I}}}, \mathcal{X}_{\mathrm{I}})$. Отношение $\operatorname{diam}\widetilde{\mathcal{X}_{\mathrm{I}}}/r$ не зависит от $\delta$ и $\sigma$ и ограничено при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; обозначим его максимальное значение через $C_\lambda$. Из оценок (2.22) и (2.24) получаем, что $\alpha = O(\sigma^2)$, $\beta = O(\delta^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{3}{2}})$. Поскольку при $\delta \gg \sigma$ интегральное ограничение неактивно и имеет место равенство $\mathcal{X}_{\mathrm{GI}} = \mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ (то есть утверждение теоремы автоматически выполнено), то имеет смысл рассматривать только случай $\delta = O(\sigma)$, то есть $\beta = O(\sigma^2)$. Но тогда (2.25) и дает доказываемую оценку (2.20). □

Используя (2.20) и лемму 2.18, получаем

**Следствие 2.11.1.** *Уравнение*

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} \sigma^{-1} h_+\left(\mathcal{Z}[k,t] + \sigma\mathcal{Q}(t), \bigcup_{0 \leqslant \gamma \leqslant k} \mathcal{Z}[\gamma, t+\sigma] - \sigma\mathcal{P}(t) \cap \mathcal{E}\left(0, (k-\gamma)\sigma R^{-1}(t)\right)\right) = 0.$$

*эквивалентно эволюционному уравнению* (2.19).

### 2.5.4 Синтезирующие стратегии

**Теорема 2.12.** *Пусть $\mathcal{Z}[k,t]$ — слабо инвариантное многозначное отображение, опорная функция которого имеет непрерывные частные производные по переменным $t$ и $k$ в точках, где множество $Z[k,t]$ непусто. Тогда функция $G(t,x,k) = d^2(x,\mathcal{Z}[k,t])$ на области своего определения удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$\min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max_{v\in\mathcal{Q}(t)}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}(t,x(t),k(t)) \leqslant 0. \tag{2.26}$$

*Доказательство.* Выберем достаточно малое $\sigma$, $t < t+\sigma \leqslant t_1$, и оценим выражение

$$G(\sigma) = \max_{v[t,t+\sigma]}\min_{u[t,t+\sigma]} G(t+\sigma, x(t+\sigma, k(t+\sigma)))$$

аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.8; мы получим

$$G(\sigma) \leqslant d^2\left(x, \left[\bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant k}\mathcal{Z}[\gamma, t+\sigma] - \mathcal{X}_{\mathrm{GI}}(t, t+\sigma, k-\gamma)\right] \dot{-} \int_t^{t+\sigma}\mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

В силу (2.18) это дает неравенство $G(\sigma) \leqslant d^2(x,\mathcal{Z}[k,t])$, после перехода к пределу в котором получается (2.26). □

Стратегия $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}$, доставляющая минимум в (2.26), называется *экстремальной стратегией к отображению* $\mathcal{Z}[k,t]$. Она состоит из всех элементов $u^* \in \mathcal{P}(t)$, удовлетворяющих принципу максимума

$$\langle \ell_0, B(t)u^*\rangle + \|u^*\|^2_{R(t)}\rho_k(t,k,\ell_0) = \min_{u\in\mathcal{P}(t)}\left\{\langle \ell_0, B(t)u\rangle + \|u\|^2_{R(t)}\rho_k(t,k,\ell_0)\right\}, \tag{2.27}$$

где $\rho(t,k,\ell) = \rho\,(\ell \mid \mathcal{Z}[k,t])$, а $\ell_0 = \ell_0(t,x,k)$ — максимизатор в задаче

$$\langle \ell, x\rangle - \rho\,(\ell \mid \mathcal{Z}[k,t]) - \frac{1}{4}\|\ell\|^2 \to \max.$$

**Следствие 2.12.1.** *Пусть* $(x(t),k(t))$ *— решение дифференциального включения* (2.6) *при управлении* $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}$. *Тогда если* $x(t)\in\mathcal{Z}[k(t),t]$, *то* $x(\tau)\in\mathcal{Z}[k(\tau),\tau]$ *при* $t\leqslant\tau\leqslant t_1$.

Если $\mathcal{Z}[k,t_1]\subseteq\mathcal{M}$, то соответствующая ему экстремальная стратегия решает задачу о гарантированном приведении системы на целевое множество $\mathcal{M}$. Таким образом, выбрав $\mathcal{Z}[k,t] = \mathcal{W}[k,t]$, получаем решение задачи 2.1' — стратегию $\mathcal{U}_{\mathcal{W}}$. Кроме того, поскольку внутренняя эллипсоидальная аппроксимация $\mathcal{E}_-[t]$ множества разрешимости [73, 29] (вычисленная для задачи 2.1' без фазового ограничения в случае выпуклого целевого множества) обладает свойством слабой инвариантности, то стратегия $\mathcal{U}_{\mathcal{E}_-}$ гарантирует, что траектория не выйдет за пределы $\mathcal{E}_-[t]$.

## 2.6 Примеры

На рисунках в конце главы представлено несколько примеров того, как выглядит синтез управлений при двойном ограничении. Эти примеры приведены с целью подчеркнуть отличия синтеза при двойных ограничениях от управления при одном геометрическом ограничении.

Когда управление стеснено лишь геометрическим ограничением $u \in \mathcal{P}$, экстремальный синтез ко множеству разрешимости устроен так, что выбираются лишь вектора на границе множества $\mathcal{P}$. Наличие интегрального ограничения заставляет управление учитывать текущий резерв и вследствие этого выбирать и те значения, которые лежат внутри $\mathcal{P}$ (рис. 2.2). При этом величина управляющего воздействия зависит не столько от самого резерва, сколько от того, насколько быстро увеличивается расстояние до сечения множества достижимости с уменьшением резерва; это проиллюстрировано на рис. 2.3 для одномерной системы с несимметричным множеством разрешимости и на рис. 2.4 для двухмерной системы.

В разделе 2.3 рассматривалась возможность сведения задачи синтеза при двойном ограничении к задаче синтеза при геометрическом ограничении при соответствующем выборе целевого множества. При этом экстремальное управление будет минимизировать расстояние до целевого множества, а не до его сечений. Рисунок 2.5 сравнивает управление, построенное таким способом (тонкие линии), со стратегией $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}$, построенной исходя из (2.27) (жирные линии).

## 2.7 Вспомогательные утверждения

Следующие два утверждения позволяют перейти от сходимости последовательности множеств в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ к сходимости их сечений в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что задана последовательность непустых выпуклых компактов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, у которой есть хаусдорфов предел $A \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^{n+1}$. Положим

$$k_- = \inf \{ k \mid \exists (x,k) \in A \}, \qquad k_+ = \sup \{ k \mid \exists (x,k) \in A \}.$$

Очевидно, что говорить о сходимости можно только при $k \in [k_-, k_+]$, потому что вне этого отрезка $A(k) = \varnothing$.

При доказательстве нам потребуется обозначение $\Pi_k = \{ (x,\kappa) \mid x \in \mathbb{R}^n, \kappa = k \}$ и представление сечений $A(k)$ в виде $A \cap \Pi_k$. Хотя формально последнее множество принадлежит $\mathbb{R}^{n+1}$, а сечения — $\mathbb{R}^n$, мы можем их отождествить, тем более, что при фиксированном $k$ это не повлияет на расстояние и на сходимость.

**Лемма 2.13.** *Пусть последовательность $\{A_n\}$ убывающая по включению: $A_{n+1} \subseteq A_n$. Тогда для всех $k \in [k_-, k_+]$ имеет место сходимость $A_n(k) \to A(k)$ в хаусдорфовой метрике.*

*Доказательство.* Поскольку $A_{n+1}(k) \subseteq A_n(k)$, то

$$A_n(k) \to \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(k) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap \Pi_k = \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \Pi_k = A \cap \Pi_k = A(k).$$

$\square$

**Лемма 2.14.** *Пусть последовательность $\{A_n\}$ возрастает по вложению: $A_{n+1} \supseteq A_n$. Тогда $\forall k \in (k_-, k_+)$ имеет место имеет место сходимость $A_n(k) \to A(k)$ в хаусдорфовой метрике. Для крайних значений $k$ верно вложение $A_n(k_\pm) \to A_\pm(k_\pm) \subseteq A(k_\pm)$.*

*Доказательство.* При $k \in (k_-, k_+)$ имеем $\Pi_k \cap \operatorname{ri} A \neq \varnothing$, следовательно,

$$\Pi_k \cap \operatorname{ri} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing.$$

Пользуясь [51, теорема 6.5], получаем

$$\begin{aligned} \lim A_n(k) = \operatorname{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(k) = \operatorname{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \Pi_k) = \operatorname{cl} \left[ \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \Pi_k \right] = \\ = \operatorname{cl} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \operatorname{cl} \Pi_k = A \cap \Pi_k = A(k). \end{aligned}$$

$\square$

**Лемма 2.15.** *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $(x, k)$ задано непустое выпуклое замкнутое множество $\mathcal{N}$. Тогда опорная функция этого множества и опорные функции его сечений связаны следующими соотношениями:*

$$\rho \left( \begin{pmatrix} \ell \\ \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathcal{N} \right) = \sup_{k \in \mathbb{R}} \left( \rho \left( \ell \mid \mathcal{N}(k) \right) + k\lambda \right), \tag{2.28}$$

$$\rho \left( \ell \mid \mathcal{N}(k) \right) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \rho \left( \begin{pmatrix} \ell \\ \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathcal{N} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \right). \tag{2.29}$$

*Доказательство.* Равенство (2.28) следует из определения опорной функции и того, что множество $\mathcal{N}$ состоит из множеств вида $\mathcal{N}(k) \times \{k\}$.

Для доказательства (2.29) представим левую часть в виде

$$\rho\,(\ell \mid \mathcal{N}(k)) = \rho\left(\begin{pmatrix}\ell\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \mathcal{N}(k) \times \{k\}\right) = \rho\left(\begin{pmatrix}\ell\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \mathcal{N} \cap \Pi_k\right),$$

где $\Pi_k$ — плоскость $\{(x,\kappa) \mid \kappa = k\}$. Тогда

$$\rho\,(\ell \mid \mathcal{N}(k)) = \inf_{\substack{\ell_1+\ell_2=\ell\\ m_1+m_2=0}} \left\{\rho\left(\begin{pmatrix}\ell_1\\m_1\end{pmatrix} \;\middle|\; \mathcal{N}\right) + \rho\left(\begin{pmatrix}\ell_2\\m_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \Pi_k\right)\right\}.$$

Второе слагаемое бесконечно, если $\ell_2 \neq 0$, поэтому минимум достигается при $\ell_1 = \ell$, $\ell_2 = 0$. Обозначив $m = m_1 = -m_2$, получаем (2.29). □

Пусть непустые выпуклые компакты $A_1$, $A_2$, $C_1$ и $C_2$ таковы, что

1. $A_1 \subseteq A_2$, $C_1 \subseteq C_2$;
2. $h(A_1, A_2) \leqslant \alpha$, $h(C_1, C_2) \leqslant \gamma$;
3. $A_1 \cap (C_1 \dot{-} \mathcal{B}_r) \neq 0$ для некоторого $r > 0$.

Нас будет интересовать оценка для хаусдорфова расстояния между пересечениями $A_1 \cap C_1$ и $A_2 \cap C_2$ через величины $\alpha$ и $\gamma$.

**Лемма 2.16.** *В указанных условиях верна оценка*

$$h(A_1 \cap C_1, A_1 \cap C_2) \leqslant \gamma r^{-1} \operatorname{diam} A_1 \cap C_1. \tag{2.30}$$

*Доказательство.* Прежде всего отметим, что из условия 2 следует $C_2 \subseteq C_1 + \mathcal{B}_\gamma$, а доказать необходимо, что $A_1 \cap C_2 \subseteq A_1 \cap C_1 + \mathcal{B}_\varepsilon$, где через $\varepsilon$ обозначена правая часть неравенства (2.30).

Из условия 3 вытекает существование такой точки $x$, что $x \in A_1$, $x + \mathcal{B}_r \subseteq C_1$. Пусть точка $y$ лежит в пересечении множеств $A_1$ и $C_2$. Если $y \in C_1$, то $d(y, A_1 \cap C_1) = 0$, поэтому будем считать, что $y \notin C_1$, $d(y, C_1) \leqslant \gamma$.

В силу выпуклости множества $A_1$ ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий точки $x$ и $y$. Обозначим через $z$ точку пересечения границы множества $C_1$ и отрезка

$[x, y]$ (такая точка единственна в силу [36, теорема 2.6]). Тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств существует направление $\ell$, разделяющее множество $C_1$ и отрезок $[z, y]$. Поскольку $\ell$ тем более разделяет $[z, y]$ и множество $x + \mathcal{B}_r$, то

$$\langle \ell, z \rangle \geqslant \rho\,(\ell \mid x + \mathcal{B}_r) \quad \Longrightarrow \quad \langle \ell, z - x \rangle \geqslant r\|\ell\|. \tag{2.31}$$

В силу того, что $d(y, C_1) \leqslant \gamma$, имеем

$$\langle \ell, y \rangle - \underbrace{\rho\,(\ell \mid C_1)}_{=\langle \ell, z \rangle} \leqslant \gamma\|\ell\| \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \langle \ell, y - z \rangle \leqslant \gamma\|\ell\|. \tag{2.32}$$

Объединяя неравенства (2.31) и (2.32), получаем

$$0 \leqslant \langle \ell, y - z \rangle \leqslant \gamma r^{-1}(r\|\ell\|) \leqslant \gamma r^{-1}\langle \ell, z - x \rangle.$$

Поскольку вектора $y - z$ и $z - x$ сонаправлены, то

$$\|y - z\| \leqslant \gamma r^{-1}\|z - x\| \leqslant \gamma r^{-1} \operatorname{diam} A_1 \cap C_1.$$

Последнее верно, так как $x, z \in A_1 \cap C_1$. Таким образом, $A_1 \cap C_2 \subseteq A_1 \cap C_1 + \mathcal{B}_\varepsilon$, что и доказывает лемму. □

**Лемма 2.17.** *В указанных условиях верна оценка*

$$h(A_1 \cap C_1, A_2 \cap C_1) \leqslant \alpha(1 + r^{-1} \operatorname{diam} A_1 \cap C_1).$$

*Доказательство.* Пусть $x \in A_2 \cap C_1$, тогда $d(x, A_1) \leqslant \alpha$. Пусть $y$ — ближайшая к $x$ точка множества $A_1$. Поскольку $\|x - y\| \leqslant \alpha$ и $x \in C_1$, то $y \in C_1 + \mathcal{B}_\alpha$. Следовательно, в силу предыдущей леммы имеем

$$\begin{aligned} d(x, A_1 \cap C_1) \leqslant \|x - y\| + d(y, A_1 \cap C_1) \leqslant \alpha + \alpha r^{-1} \operatorname{diam} A_1 \cap C_1 = \\ = \alpha(1 + r^{-1} \operatorname{diam} A_1 \cap C_1). \end{aligned}$$

□

Из лемм 2.16, 2.17 и неравенства треугольника непосредственно вытекает

**Следствие 2.17.1.** *Справедливы оценки*

$$h(A_1 \cap C_1, A_2 \cap C_2) \leqslant \alpha + (\alpha + \gamma)r^{-1} \operatorname{diam} A_1 \cap C_2,$$
$$h(A_1 \cap C_1, A_2 \cap C_2) \leqslant \alpha + (\alpha + \gamma)r^{-1} \operatorname{diam} A_2 \cap C_1.$$

Для практического применения полученного результата полезно воспользоваться неравенством $\operatorname{diam} A_1 \cap C_2 \leqslant \min\{\operatorname{diam} A_1, \operatorname{diam} C_2\}$. Таким образом, находить значение $\operatorname{diam} A_1 \cap C_2$ необязательно, хотя, если оно известно, то оценка получается более точной.

**Лемма 2.18.** *Пусть задан набор индексов $\Xi = \{\xi\}$ и для каждого индекса $\xi \in \Xi$ — множества $A_\xi$ и $C_\xi \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, причем $h(A_\xi, C_\xi) \leqslant \varepsilon$, $\forall \xi \in \Xi$. Тогда справедлива оценка*

$$h(\hat{A}, \hat{C}) \leqslant \varepsilon, \qquad \hat{A} = \operatorname{conv}\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi, \qquad \hat{C} = \operatorname{conv}\bigcup_{\xi\in\Xi} C_\xi.$$

*Доказательство.* Поскольку $h_+(A_\xi, C_\xi) \leqslant \varepsilon$, то $\rho(\ell \mid A_\xi) - \rho(\ell \mid C_\xi) \leqslant \varepsilon\|\ell\|$. Отсюда

$$h_+(\hat{A}, \hat{C}) = \max_{\|\ell\|\leqslant 1}\left\{\rho\left(\ell \;\middle|\; \hat{A}\right) - \rho\left(\ell \;\middle|\; \hat{C}\right)\right\} = \max_{\|\ell\|\leqslant 1}\left\{\sup_{\xi'\in\Xi}\rho(\ell \mid A_{\xi'}) - \sup_{\xi''\in\Xi}\rho(\ell \mid C_{\xi''})\right\} =$$
$$= \max_{\|\ell\|\leqslant 1}\sup_{\xi'\in\Xi}\inf_{\xi''\in\Xi}\{\rho(\ell \mid A_{\xi'}) - \rho(\ell \mid C_{\xi''})\} \underset{\xi'=\xi''}{\leqslant} \max_{\|\ell\|\leqslant 1}\sup_{\xi'\in\Xi}\{\rho(\ell \mid A_{\xi'}) - \rho(\ell \mid C_{\xi'})\} \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично доказывается оценка для $h_-(\hat{A}, \hat{C})$. □

## 2.8 Иллюстрации

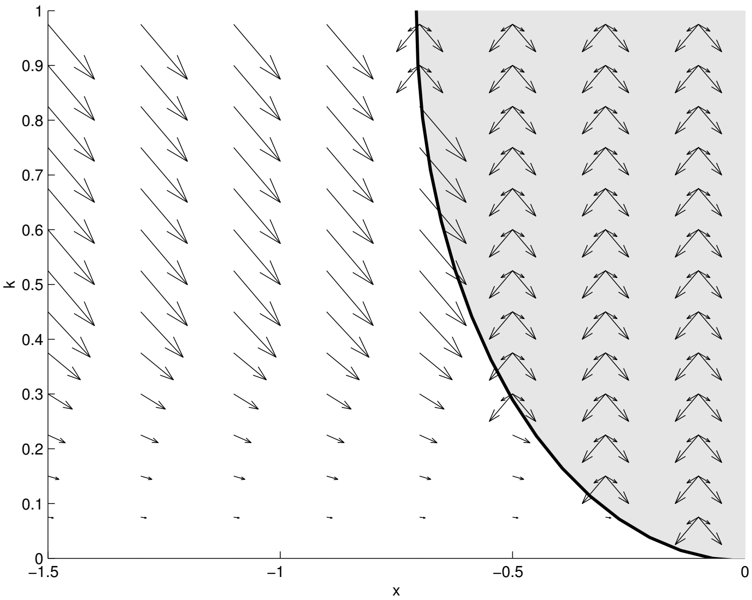


Рис. 2.2: Синтез управлений для одномерной системы

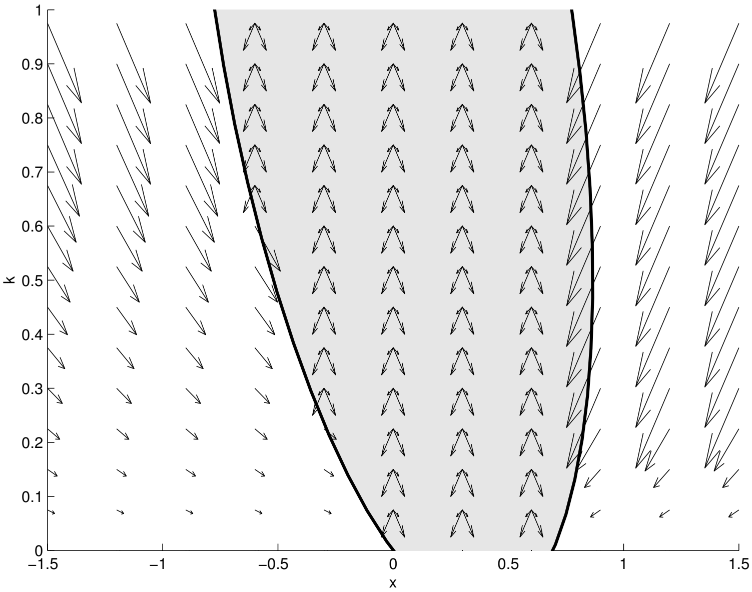


Рис. 2.3: Синтез управлений для одномерной системы с несимметричным множеством разрешимости

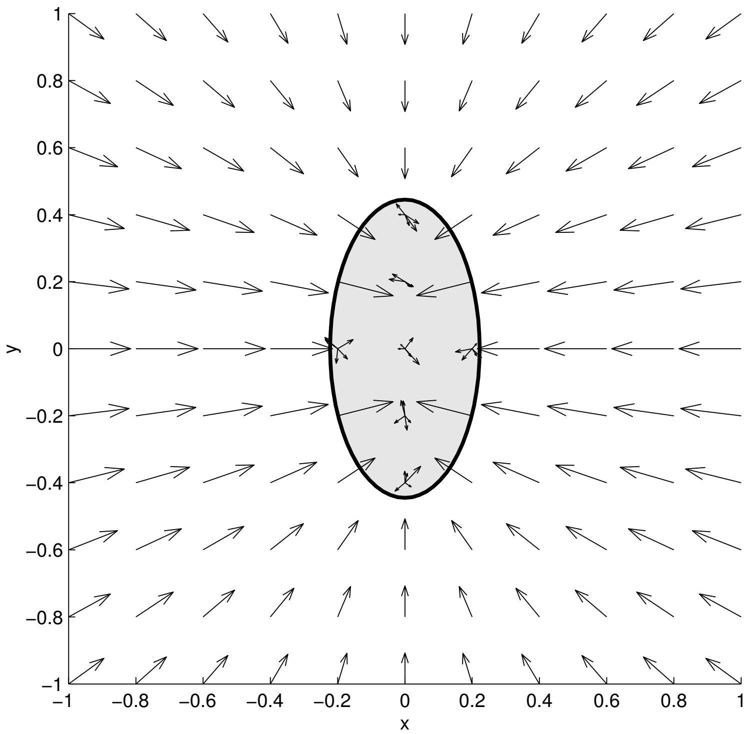


Рис. 2.4: Синтез управлений для двухмерной системы

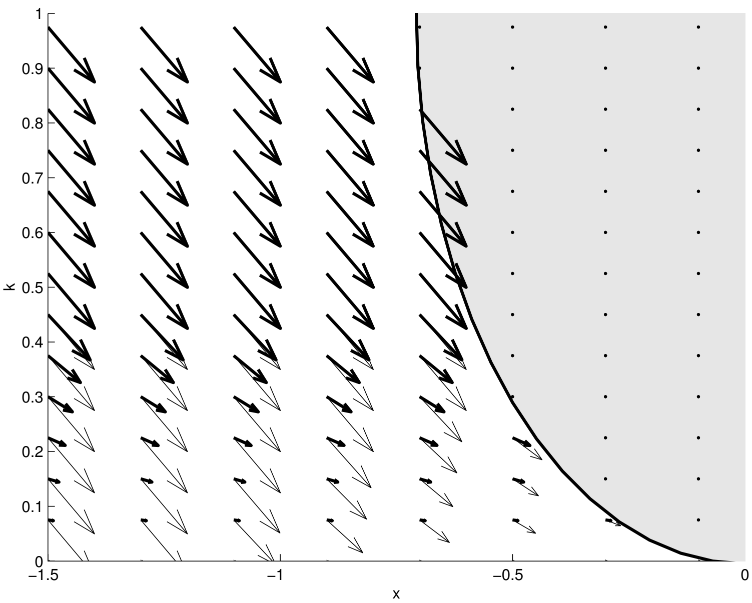


Рис. 2.5: Сравнение синтезов, полученных прицеливанием на множество разрешимости и на его сечения

# Глава 3

# Синтез управлений в условиях неопределенности при разнотипных ограничениях на управление и помеху

## 3.1 Введение

В данной главе мы рассмотрим задачу о синтезе управлений в условиях неопределенности, когда на управление наложено геометрическое ограничение, а на помеху — интегральное.

Пусть динамика некоторой системы описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v(t), \quad t \in T = [t_0, t_1] \tag{3.1}$$

с известными непрерывными матрицами $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$. Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — *вектор положения системы*, $u \in \mathbb{R}^{n_p}$ — *управление*, $v(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$ — заранее неизвестное *внешнее возмущение*. Управление стеснено геометрическим ограничением $u \in \mathcal{P}(t), \quad \forall t \in T$, где $\mathcal{P}(t)$ — заданная непрерывная в хаусдорфовой метрике многозначная функция с непустыми выпуклыми компактными значениями. Помеха $v(\cdot)$ является измеримой по Лебегу функцией, удовлетворяющей интегральному квадратичному ограничению

$$\int_{t_0}^{t_1} \|v(t)\|^2_{S(t)}\, \mathrm{d}t \leqslant k_0, \tag{3.2}$$

где $S(t)$ — известная положительно определенная непрерывная матричная функция.

Задача управления состоит в том, чтобы вопреки действиям неизвестной помехи в конечный момент времени привести траекторию на заранее заданное целевое множество $\mathcal{M}$.

Очевидно, что пара $(t, x)$ в недостаточной степени описывает состояние системы, чтобы можно было построить полный класс стратегий, зависящий только от нее. Поэтому, следуя [54], мы примем предположение об информированности управления, заключающееся в том, что в текущий момент времени $t \in T$ управлению известна, помимо текущего положения, траектория системы $x(\tau)$ на отрезке $\tau \in [t_0, t]$. В отличие от [54] мы также предположим, что управление знает и свою траекторию на этом отрезке (этого можно добиться, включив в систему уравнение $\dot{y}(t) = u(t)$).

Таким образом, позицией игры в момент $t \in T$ будет тройка $(t, x[t_0, t], u[t_0, t])$, где $x[t_0, t]$ — движение системы (3.1), реализовавшееся на отрезке $[t_0, t]$, а $u[t_0, t]$ — траектория управления на этом отрезке.

Определим соответствующий класс стратегий $\mathcal{U}_{\mathrm{CL,M}}$ (*стратегии с памятью*): он состоит из многозначных функций вида $\mathcal{U}(t, x[t_0, t], u[t_0, t]) \subseteq \mathcal{P}(t)$ с непустыми выпуклыми компактными значениями. В [54] было доказано, что этот класс является полным в том смысле, что соответствующая игра степени имеет значение, а также указана синтезирующая стратегия.

Очевидно, что тройка $(t, x[t_0, t], u[t_0, t])$ содержит гораздо больше информации, чем необходимо для построения синтеза. В самом деле, предположим на время, что управление знает еще и траекторию помехи $v[t_0, t]$. Тогда вся существенная для управления информация содержится в тройке $(t, x(t), k(t))$, где

$$k(t) = k_0 - \int_{t_0}^{t} \|v(t)\|_{S(t)}^2 \, \mathrm{d}t$$

представляет собой величину неизрасходованного резерва помехи по состоянию на текущий момент.

Если бы управлению было доступно для измерения значение $k(t)$, то синтез зависел бы лишь от тройки $(t, x, k)$. В тех предположениях об информированности управления, которые мы сделали, это значение вычислить в общем случае нельзя, однако на основании доступной информации все же можно вычислить оценку для $k$ и использовать эту оценку для построения синтеза. Покажем, как это сделать.

Мы будем предполагать, что управление располагает достаточными вычислительными возможностями, чтобы продифференцировать доступную ему функцию $x[t_0, t]$. Введем новую переменную $w(t) = C(t)v(t)$. Траектория этой переменной при сделанных предположениях также доступна управлению, поскольку

$$w(t) = C(t)v(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t) - B(t)u(t).$$

На основании этой информации все же невозможно вычислить саму помеху $v(t)$ и, соответственно, текущее значение $k(t)$, поскольку в общем случае матрица $C(t)$ может быть необратима. Поскольку мы имеем дело с задачей гарантированного попадания на целевое множество, то необходимо строить управление исходя из наихудшего (то есть наибольшего) возможного значения резерва помехи $k$ при данной траектории. Это приводит нас к задаче

$$\int_{t_0}^{t} \|v(t)\|^2_{S(t)}\,\mathrm{d}t \to \min, \quad C(t)v(t) = w(t),$$

которая, в свою очередь, распадается на конечномерные задачи для каждого момента времени вида

$$\|v\|^2_S \to \min, \quad Cv = w.$$

Временно заменим $C$ на $CS^{\frac{1}{2}}$, $v$ на $S^{-\frac{1}{2}}v$, чтобы можно было считать $S = I$:

$$\|v\|^2 \to \min, \quad Cv = w. \tag{3.3}$$

Система имеет решение только при $w \in \operatorname{Im} C$, поэтому существует вектор $v_0$, для которого $w = Cv_0$. Заметим, что вектор $v_0$ можно выбрать так, чтобы он линейно зависел от $w \in \operatorname{Im} C$, например, $v_0 = C^{\oplus}w$, где $C^{\oplus}$ — псевдообратная матрица к $C$. Задача (3.3) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} v \in v_0 + \ker C, \\ v \in \ker^{\perp} C = \operatorname{im} C^T \end{cases}$$

и имеет единственное решение, поскольку она описывает проекцию точки на замкнутое выпуклое множество. Следовательно,

$$v = \operatorname{pr}_{v_0 + \ker C} 0 = v_0 - \operatorname{pr}_{\ker C} v_0 = (I - \Pi)C^{\oplus}w,$$

где $\Pi = \operatorname{pr}_{\ker C}$ — линейный оператор ортогональной проекции на ядро оператора $C$.

Возвращаясь к исходной матрице $S \neq I$, получаем $v = S^{-\frac{1}{2}}(I - \Pi)(CS^{-\frac{1}{2}})^{\oplus}w$, и тогда $k^+(t)$ равно

$$k^+(t) = k_0 - \int_{t_0}^{t} \|w(t)\|^2_{S^+(t)}\,\mathrm{d}t,$$
$$S^+(t) = ((C(t)S^{-\frac{1}{2}}(t))^{\oplus})^T(I - \Pi(t))(C(t)S^{-\frac{1}{2}}(t))^{\oplus},$$

или, в виде дифференциального уравнения,

$$\dot{k}^+(t) = -\|w(t)\|^2_{S^+(t)}, \quad k^+(t_0) = k_0. \tag{3.4}$$

В частности, при обратимой матрице $C(t)$ имеем $S^+(t) = C^{-1^T}(t)S(t)C^{-1}(t)$.

Решение уравнения (3.4) — функция $k^+(t)$ — является оценкой сверху для истинной функции $k(t)$. Как мы уже говорили, управление не знает точного значения $k(t)$, поэтому должно вести себя так, будто $k^+(t)$ и есть текущее значение резерва, потому что это наиболее точная доступная управлению гарантированная оценка. Оценок, меньших $k^+(t)$, не существует, поскольку при заданной функции $w(t)$ всегда можно подобрать такую допустимую помеху, для которой будет достигаться равенство $k^+(t) = k(t)$.

Итак, мы выделили из всех стратегий с полной памятью те, которые зависят от траекторий системы и управления опосредованно через значение $k^+(t)$. Начиная с этого момента, нам будет удобнее добавить уравнение (3.4) к уравнению динамики (3.1) и считать, что его решение доступно управлению вместе с текущим положением системы $x(t)$ — это позволит нам не рассматривать стратегии с памятью, а ограничиться существенно лучше изученными позиционными стратегиями.

Поскольку теперь в качестве помехи выступает функция $w(t)$, то матрицы $C(t)$ в системе уже не будет. Далее упростить систему можно, сделав замену (1.11), после которой из системы уйдет слагаемое $A(t)x(t)$, и заменив $\mathcal{P}(t)$ на $B(t)\mathcal{P}(t)$, после чего можно считать $B(t) \equiv I$.

## 3.2 Постановка задачи

После всех упрощений рассматриваемая нами управляемая система (3.1) приняла вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u + v(t), \\ \dot{k}(t) = -\|v(t)\|^2_{S(t)}, \end{cases} \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{3.5}$$

Управление $u \in \mathbb{R}^n$ стеснено геометрическим ограничением

$$u \in \mathcal{P}(t) \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

а помеха $v(t) \in \mathbb{R}^n$ является суммируемой по Лебегу функцией, гарантирующей соблюдение фазового ограничения

$$k(t) \geqslant 0, \quad t \in T. \tag{3.7}$$

В отличие от первых двух глав, теперь $k$ — резерв помехи. Это означает, что за выполнение фазового ограничения $k \geqslant 0$ отвечает помеха, а не управление. Чем меньше значение $k$, тем проще управлению попасть на целевое множество, поэтому сечения множества разрешимости с ростом $k$ убывают по вложению, а при больших значениях $k$ становятся пустыми.

Нам понадобятся следующие классы управлений:

1. *Программные управления* $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$ — измеримые функции $u = u(t)$, удовлетворяющие ограничению (3.6). Этот класс необходим для промежуточных построений.

2. *Позиционные стратегии* $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ — многозначные отображения $\mathcal{U}(t,x,k)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, непрерывные сверху по совокупности переменных $(x,k)$, измеримые по $t$ и удовлетворяющие геометрическому ограничению $\mathcal{U}(t,x,k) \subseteq \mathcal{P}(t)$.

Отметим, что определение позиционной стратегии гарантирует существование и продолжаемость решений [63] дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{k}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(t,x,k) \times \{0\} + \begin{pmatrix} v(t) \\ -\|v(t)\|^2_{S(t)} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

для любой суммируемой функции $v(t)$.

**Задача 3.1.** *Для данного целевого множества* $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ *найти* множество разрешимости

$$\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t; t_1, \mathcal{M}) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

*и позиционную стратегию управления* $\mathcal{U}(t,x,k) \in \mathcal{U}_{CL}$*, такую, что все его траектории дифференциального включения* (3.8)*, выпущенные из любой начальной позиции* $(t,x,k)$*,* $t \in T$*,* $(x,k) \in \mathcal{W}[t]$*, достигали бы целевое множество* $\mathcal{M}$ *в момент времени* $t_1$*, какова бы ни была измеримая помеха* $v(t)$*, при которой траектории системы не нарушают ограничение* (3.7)*.*

### 3.2.1 Сечения множества разрешимости и целевого множества

Наличие в системе фазового ограничения (3.7) для помехи приводит к тому, что множество разрешимости невыпукло даже в самых простых случаях (рис. 3.1, 3.3). Чтобы иметь возможность применять методы выпуклого анализа, вместо самого множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$ и целевого множества $\mathcal{M}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ будем рассматривать их сечения при постоянных значениях переменной $k \in \mathbb{R}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{M}(k) = \{x \mid (x,k) \in \mathcal{M}\},$$
$$\mathcal{W}[k,t] = \mathcal{W}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \{x \mid (x,k) \in \mathcal{W}(t;t_1,\mathcal{M})\}.$$

Эти сечения, напротив, всегда являются выпуклыми. Очевидно, что нахождение совокупности сечений $\{\mathcal{W}[k,t]\}$ для всех неотрицательных значений $k$ равносильно отысканию самого множества разрешимости, поэтому далее не будет делаться различий между множеством разрешимости и его сечениями.

Относительно многозначной функции $\mathcal{M}(k)$ будем предполагать, что она принимает выпуклые компактные значения и является невозрастающей по вложению, то есть

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}(k_1) \subseteq \mathcal{M}(k_2).$$

Последнее означает, что помехе приходится выбирать: или израсходовать меньше энергии и вынудить управление попадать на меньшее целевое множество (при $k(t_1) = k_1$), либо израсходовать больше энергии, но при этом ослабить требования к управлению ($k(t_1) = k_2$).

## 3.3 Альтернированный интеграл

### 3.3.1 Последовательный максимин

**Определение 3.1.** *Множеством разрешимости максиминного типа* в классе программных управлений будем называть совокупность векторов

$$W^+[k,\tau] = W^+(k,\tau;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) =$$
$$= \left\{ x \;\middle|\; \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(t)\geqslant 0}} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \left\{ d^2(x(t_1),\mathcal{M}(k(t_1))) \;\middle|\; \begin{array}{c} x(\tau)=x, \\ k(\tau)=k \end{array} \right\} \leqslant 0 \right\},$$

то есть это все начальные положения $(x,k)$, для которых при любом возмущении $v(\cdot)$, удовлетворяющем ограничению (3.7), существует допустимое программное управление $u(\cdot)$, обеспечивающее попадание на целевое множество $\mathcal{M}$.

**Лемма 3.1.** *Для множества разрешимости максиминного типа в классе программных управлений $W^+[k,t]$ справедлива формула*

$$W^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \left( \mathcal{M}(\gamma) - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t,t_1) \right\}, \tag{3.9}$$

*где $\mathcal{S}(t,t_1)$ — эллипсоид*

$$\mathcal{S}(t,t_1) = \mathcal{E}\left(0, \mathrm{S}(t,t_1)\right) = \mathcal{E}\left(0, \int_t^{t_1} S^{-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \left\{ x \mid \langle x, \mathbf{S}^{-1}(t,t_1)x\rangle \leqslant 1 \right\}.$$

*Доказательство.* По определению максиминного множества разрешимости позиция $(x,k)$ лежит в нем тогда и только тогда, когда $\forall v(\cdot)$ $\exists u(\cdot)$: $x(t_1) \in \mathcal{M}(k(t_1))$. Последнее включение может быть переписано в терминах опорных функций: $\forall \ell \in B_1$ $\langle \ell, x(t_1)\rangle \leqslant \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(k(t_1))\right)$. Заменяя кванторы соответствующими операциями максимума и минимума, получаем

$$\max_{\substack{v(\cdot)\\ k(t_1)\geqslant 0}} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \max_{\|\ell\|\leqslant 1} \left\{ \left\langle \ell, x + \int_t^{t_1} (u(\tau)+v(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(k(t_1))\right) \right\} \leqslant 0.$$

Так как множество значений интеграла $\int_t^{t_1} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ выпукло и компактно, а функция, взятая в фигурные скобки, линейна по $u(\cdot)$ и вогнута по $\ell$, то операции взятия минимума и максимума перестановочны [78], и последнее неравенство может быть записано следующим образом:

$$\max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(t_1)\geqslant 0}} \left\{ \left\langle \ell, x + \int_t^{t_1} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\rangle - \rho\left(\ell \,\middle|\, -\int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(k(t_1))\right) \right\} \leqslant 0.$$

Разобьем максимум по неопределенности $v(\cdot)$ на максимум по изменению переменной $k$ и максимум по помехам, отвечающим такому изменению:

$$\max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \max_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(t_1)=\gamma}} \left\{ \left\langle \ell, x + \int_t^{t_1} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\rangle - \rho\left(\ell \,\middle|\, -\int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(\gamma)\right) \right\} \leqslant 0.$$

Отдельно вычислим максимум по функции $v(\cdot)$. По неравенству Коши–Буняковского при $k(t_1)=\gamma$ имеем

$$\int_t^{t_1} \langle \ell, v(\tau)\rangle\,\mathrm{d}\tau = \int_t^{t_1} \left\langle S^{-\frac{1}{2}}(\tau)\ell, S^{\frac{1}{2}}(\tau)v(\tau)\right\rangle \mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$\leqslant \left( \left\langle \ell, \int_t^{t_1} S^{-1}(\tau)\ell\,\mathrm{d}\tau \right\rangle \int_t^{t_1} \langle v(\tau), S(\tau)v(\tau)\rangle\,\mathrm{d}\tau \right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \rho\left(\ell \mid \mathcal{E}\left(0,\mathrm{S}(t,t_1)\right)\right)\sqrt{k(t)-k(t_1)} = \rho\left(\ell \,\middle|\, \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t,t_1)\right).$$

Так как равенство здесь всегда достигается, то максимум в точности равен опорной функции, поэтому необходимое и достаточное условие принадлежности точки $(x, k)$ множеству разрешимости принимает вид

$$\max_{\ell \in \mathbb{R}^n} \max_{0 \leqslant \gamma \leqslant k} \left\{ \langle \ell, x \rangle + \sqrt{k-\gamma}\rho\left(\ell \mid \mathcal{S}(t, t_1)\right) - \rho\left(\ell \,\middle|\, -\int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(\gamma)\right) \right\} \leqslant 0,$$

или, переходя обратно к кванторам, $\forall \ell \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant \gamma \leqslant k$,

$$\langle \ell, x \rangle + \rho\left(\ell \,\middle|\, \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t, t_1)\right) \leqslant \rho\left(\ell \,\middle|\, -\int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) + \rho\left(\ell \mid \mathcal{M}(\gamma)\right),$$

что эквивалентно вложению

$$x + \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t, t_1) \subseteq \mathcal{M}(\gamma) - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \forall \gamma \in [0, k],$$

и окончательно по определению геометрической разности получаем

$$x \in \bigcap_{0 \leqslant \gamma \leqslant k} \left\{ \left( \mathcal{M}(\gamma) - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t, t_1) \right\}.$$

□

**Следствие 3.1.1.** *Множество $W^+[k, t]$ является выпуклым компактом.*

**Следствие 3.1.2.** *При $\mathcal{M}(k) \equiv M$ формула для максиминного множества разрешимости принимает вид*

$$W^+(k, t; t_1, M \times [0, \infty)) = \left( M - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \dot{-} \sqrt{k}\mathcal{S}(t, t_1). \tag{3.10}$$

Для сравнения приведем выражение для максиминного множества разрешимости в классе программных управлений при геометрических ограничениях $u(t) \in \mathcal{P}(t)$, $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ [49]:

$$W_G^+(t; t_1, \mathcal{M}) = \left( \mathcal{M} - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.11}$$

Сравнивая с (3.11) формулы (3.9) и (3.10), можно сделать следующие выводы:

1. По сравнению с (3.11) в формуле (3.9) присутствует пересечению по континууму множеств. Если в задаче с геометрическими ограничениями максиминное множество разрешимости можно было вычислить за две теоретико-множественные

операции (сложение и геометрическая разность), которым в терминах опорных функций соответствуют сложение и взятие выпуклой оболочки то при неоднотипных ограничениях к ним добавляется бесконечное (или, по крайней мере, достаточно большое, если взять сетку по $k$) число пересечений, которым соответствует достаточно трудоемкая операция инфимальной конволюции.

2. Хотя формулы (3.10) и (3.11) внешне очень похожи, они сильно отличаются при $t \to t_1$, так как при этом размер множества $\int_{t_1-\Delta t}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ имеет порядок $O(\Delta t)$, а размер эллипсоида $\mathcal{S}(t_1-\Delta t, t_1)$ — порядок $O(\sqrt{\Delta t})$.

**Следствие 3.1.3.** *Многозначная функция $W^+[k,t]$ является монотонной по $k$:*

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad W^+[k_1,t] \subseteq W^+[k_2,t].$$

Опишем формальную процедуру построения аналога альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина. С этой целью рассмотрим следующую суперпозицию множеств $W^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))$.

Пусть набор $\mathcal{T} = \{\tau_0,\ldots,\tau_m\}$ задает произвольное разбиение отрезка $\tau_0 = t \leqslant \tau \leqslant t_1 = \tau_m$. Положим на первом шаге $W^+_{\mathcal{T}}[k,\tau_{m-1}] = W^+(k,\tau_{m-1};\tau_m,\mathcal{M}(\cdot))$, то есть

$$W^+_{\mathcal{T}}[k,\tau_{m-1}] = \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \left( \mathcal{M}(\gamma) - \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\,\mathcal{S}(\tau_{m-1},\tau_m) \right\}.$$

Далее продолжим это построение следующим образом:

$$\begin{aligned} W^+_{\mathcal{T}}[k,\tau_{i-1}] &= W^+(k,\tau_{i-1};\tau_i,W^+_{\mathcal{T}}[\cdot,\tau_i]) = \\ &= \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \left( W^+_{\mathcal{T}}[\gamma,\tau_i] - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\,\mathcal{S}(\tau_{i-1},\tau_i) \right\}. \end{aligned}$$

Множество, полученное на последнем шаге, то есть $W^+_{\mathcal{T}}[k,\tau_0] = \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))$, будем называть *верхней интегральной суммой*, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Ее можно интерпретировать как множество разрешимости в многошаговой задаче с *коррекцией движения*, где каждый момент $\tau_i$ управлению сообщается текущее положение системы, а также значение помехи на отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$. При этом естественно предположить, что когда число шагов неограниченно возрастает, а их длина стремится к нулю, верхняя интегральная сумма стремится к множеству разрешимости задачи 3.1, так как в пределе поступающая информация ограничивается текущим положением системы $(x(t),k(t))$ и значением помехи $v(t)$.

**Определение 3.2.** Если при некотором значении $k$ существует хаусдорфов предел $\mathcal{I}^+[k,t] = \mathcal{I}^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))$ верхних интегральных сумм, то есть

$$\lim h\left(\mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)), \mathcal{I}^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))\right) = 0$$

при $\max\{\,\sigma_i = \tau_i - \tau_{i-1} \mid i = 1,\ldots,m\} \to 0$, $m \to \infty$, и этот предел не зависит от выбора разбиений, то множество $\mathcal{I}^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))$ будем называть *верхним альтернированным интегралом.*

**Лемма 3.2.** *Верхний альтернированный интеграл является выпуклым компактом.*

**Лемма 3.3.** *Если $\mathcal{T}'$ является измельчением разбиения $\mathcal{T}$, то выполняется вложение*

$$\mathcal{I}^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) \subseteq \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}'}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) \subseteq \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)).$$

**Следствие 3.3.1.** *Если верхний альтернированный интеграл существует, то он может быть найден по формуле*

$$\mathcal{I}^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \bigcap_{\mathcal{T}} \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)),$$

*где пересечение берется либо по всевозможным разбиениям, либо по последовательности разбиений, диаметр которых стремится к нулю.*

**Лемма 3.4.** *Верхний альтернированный интеграл удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$\mathcal{I}^+(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{I}^+(k,t;\tau,\mathcal{I}^+(\cdot,\tau;t_1,\mathcal{M}(\cdot))), \quad t \leqslant \tau \leqslant t_1.$$

## 3.3.2 Последовательный минимакс

**Определение 3.3.** *Множеством разрешимости минимаксного типа* в классе программных управлений будем называть совокупность векторов

$$W^-[k,\tau] = W^-(k,\tau;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \\ = \left\{ x \;\middle|\; \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(t_1)\geqslant 0}} \left\{ d^2(x(t_1),\mathcal{M}(k(t_1))) \;\middle|\; \begin{array}{c} x(\tau)=x,\\ k(\tau)=k \end{array} \right\} \leqslant 0 \right\},$$

то есть оно состоит из всех начальных положений $(x, k)$, для которых существует программное управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$, обеспечивающее попадание на целевое множество $\mathcal{M}$ при любом заранее неизвестном возмущении $v(\cdot)$, удовлетворяющем ограничению (3.7).

**Лемма 3.5.** *Для множества разрешимости минимаксного типа $W^-[k,t]$ справедлива формула*

$$W^-(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \Big(\mathcal{M}(\gamma) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t,t_1)\Big) - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
W^-[k,t] = \bigcup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \bigcap_{\substack{v(\cdot)\\ k(t_1)\geqslant 0}} \left\{ x \,\middle|\, x + \int_t^{t_1} (u(\tau)+v(\tau))\,\mathrm{d}\tau \in \mathcal{M}(k(t_1)) \right\} = \\
= \bigcup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \bigcap_{\substack{v(\cdot)\\ k(t_1)=\gamma}} \left\{ x \,\middle|\, x + \int_t^{t_1} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathcal{M}(\gamma) - \int_t^{t_1} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} = \\
= \bigcup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ x \,\middle|\, x + \int_t^{t_1} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathcal{M}(\gamma) - \int_t^{t_1} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ \forall v(\cdot) : k(t_1) = \gamma \right\} = \\
= \bigcup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \left(\mathcal{M}(\gamma) - \int_t^{t_1} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \dot{-} \left( \bigcup_{\substack{v(\cdot)\\ k(t_1)=\gamma}} \int_t^{t_1} v(\tau)\,\tau \right) \right\} = \\
= \bigcup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \left(\mathcal{M}(\gamma) - \int_t^{t_1} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t,t_1) \right\} = \\
= \bigcup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \left\{ \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \Big(\mathcal{M}(\gamma) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t,t_1)\Big) - \int_t^{t_1} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} = \\
= \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \Big(\mathcal{M}(\gamma) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t,t_1)\Big) - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\}.
\end{aligned}$$

□

**Следствие 3.5.1.** *Множество $W^-[k,t]$ является выпуклым компактом.*

Пусть набор $\mathcal{T} = \{\tau_0, \ldots, \tau_m\}$ задает произвольное разбиение отрезка $\tau_0 = t \leqslant \tau \leqslant$

$t_1 = \tau_m$. Положим на первом шаге

$$W^-_{\mathcal{T}}[k,\tau_{m-1}] = W^-(k,\tau_{m-1};\tau_m,\mathcal{M}(\cdot)) =$$
$$= \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \Big( \mathcal{M}(\gamma) \mathbin{\dot{-}} \sqrt{k-\gamma}\,\mathcal{S}(\tau_{m-1},\tau_m) \Big) - \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\}.$$

Далее последовательно применяем операцию взятия минимаксного множества

$$W^-_{\mathcal{T}}[k,\tau_{i-1}] = W^-(k,\tau_{i-1};\tau_i,W^-_{\mathcal{T}}[\cdot,\tau_i]) =$$
$$= \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \left\{ \Big( W^-_{\mathcal{T}}[\gamma,\tau_i] \mathbin{\dot{-}} \sqrt{k-\gamma}\,\mathcal{S}(\tau_{i-1},\tau_i) \Big) - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\}.$$

Множество, полученное на последнем шаге: $W^-_{\mathcal{T}}[k,\tau_0] = \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))$, будем называть *нижней интегральной суммой*, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Как и в предыдущем пункте, ее можно интерпретировать как множество разрешимости в многошаговой задаче с коррекцией движения, где каждый момент $\tau_i$ управлению сообщается текущее положение системы, однако дальнейшее значение помехи остается неизвестным.

**Определение 3.4.** Если при некотором значении $k$ существует хаусдорфов предел $\mathcal{I}^-(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot))$ нижних интегральных сумм при $\max\{\sigma_i = \tau_i - \tau_{i-1} \mid i = 0,\ldots,m\} \to 0$, $m \to \infty$, и этот предел не зависит от выбора разбиений, то он называется *нижним альтернированным интегралом.*

**Лемма 3.6.** *Нижний альтернированный интеграл является выпуклым компактом.*

**Лемма 3.7.** *Если $\mathcal{T}'$ является измельчением разбиения $\mathcal{T}$, то выполняется вложение*

$$\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) \subseteq \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}'}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) \subseteq \mathcal{I}^-(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)).$$

**Следствие 3.7.1.** *Если нижний альтернированный интеграл существует, то он может быть найден по формуле*

$$\mathcal{I}^-(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \mathrm{cl}\bigcup_{\mathcal{T}} \mathcal{I}^-_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)),$$

*где пересечение берется либо по всевозможным разбиениям, либо по последовательности разбиений, диаметр которых стремится к нулю.*

**Лемма 3.8.** *Нижний альтернированный интеграл удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$\mathcal{I}^-(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{I}^-(k,t;\tau,\mathcal{I}^-(\cdot,\tau;t_1,\mathcal{M}(\cdot))), \quad t \leqslant \tau \leqslant t_1.$$

**Лемма 3.9.** *Для любых разбиений $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ выполняется вложение*

$$\mathcal{I}^-_{\mathcal{T}_1}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) \subseteq \mathcal{I}^+_{\mathcal{T}}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)).$$

**Лемма 3.10.** *Выполняется вложение $\mathcal{I}^-[k,t] \subseteq \mathcal{W}[k,t] \subseteq \mathcal{I}^+[k,t]$.*

**Определение 3.5.** Если верхний и нижний альтернированные интегралы равны между собой, то многозначное отображение $\mathcal{I}[k,t] = \mathcal{I}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{I}^-[k,t] = \mathcal{I}^+[k,t]$ называется *альтернированным множеством разрешимости* задачи 3.1, или альтернированным интегралом.

**Теорема 3.11.** *Множество разрешимости $\mathcal{W}[k,t]$ задачи 3.1 может быть представлено в виде альтернированного интеграла, если он существует:*

$$\mathcal{W}[k,t] = \mathcal{I}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad k \geqslant 0.$$

*При этом выполняется полугрупповое свойство*

$$\mathcal{W}(k,t;t_1,\mathcal{M}(\cdot)) = \mathcal{W}(k,t;\tau,\mathcal{W}(\cdot,\tau;t_1,\mathcal{M}(\cdot))), \quad t \leqslant \tau \leqslant t_1.$$

Выполнение принципа оптимальности означает, что в тройке $(t,x,k)$ содержится вся информация, необходимая для выбора управления в текущий момент — история траекторий системы и управления не внесет никаких существенных дополнений. Помимо этого полугрупповое свойство позволяет вычислять трубку разрешимости постепенно, продвигаясь от правого конца отрезка к левому: вычисленное в некоторой точке множество разрешимости может быть использовано для вычисления трубки разрешимости в предыдущие моменты. Для построения трубки разрешимости, таким образом, кроме процедуры, непосредственно следующей из определения альтернированного интеграла, может быть использован аппарат динамического программирования или эволюционных уравнений.

## 3.4 Синтез управлений

### 3.4.1 Функция цены и уравнение динамического программирования

Исходная задача задача не содержит оптимизационного критерия, так как в ней необходимо найти решение, гарантирующее попадание на целевое множество; в терминах [3] это *игра качества.* Для применения метода динамического программирования сведем задачу к экстремальной (то есть к *игре степени*), потребовав, чтобы расстояние от конца траектории до множества разрешимости было наименьшим возможным. Рассмотрим соответствующую *функцию цены*

$$V(t,x,k) = \min_{\mathcal{U}\in\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}} \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(t)\geqslant 0}} \max_{(x[t_1],k[t_1])\in\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}[t_1]} \left\{d^2\left(x[t_1], \mathcal{M}\left(k[t_1]\right)\right)\right\}, \tag{3.12}$$

где $\mathcal{Z}_{\mathcal{U}[\tau],v(\cdot)} = \mathcal{Z}_{\mathcal{U},v(\cdot)}(\tau;t,x,k)$ есть трубка достижимости дифференциального включения (3.8), выпущенная из точки $(x,k)$ в момент времени $t$, при условии выбора управления $\mathcal{U}$ и помехи $v(\cdot)$. Возведение расстояния в квадрат произведено для обеспечения необходимой гладкости функции цены.

**Задача 3.2.** *Указать стратегию управления $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{CL}$, при которой достигается минимум в* (3.12).

Очевидно, что множество разрешимости связано с функцией цены следующим утверждением:

**Лемма 3.12.** *Множество разрешимости является множеством уровня функции цены:*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[t] &= \{\,(x,k)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \mid V(t,x,k)\leqslant 0\},\\ \mathcal{W}[k,t] &= \{x\in\mathbb{R}^n \mid V(t,x,k)\leqslant 0\}. \end{aligned}$$

В общем случае функция цены может не обладать достаточной гладкостью (см. пример 3.2), поэтому мы примем следующие предположения:

**Предположение 3.1.** Функция $V(t,x,k)$ обладает непрерывными частными производными.

**Предположение 3.2.** Функция $V(t,x,k)$ является вогнутой по переменной $k$.

**Предположение 3.3.** Производная $\partial V/\partial k$ положительна.

При указанным предположениях для функции цены (3.12) можно составить формальное *уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \max_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, u + v \right\rangle - \|v\|_S^2 \frac{\partial V}{\partial k} \right\} = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad k > 0 \tag{3.13}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, u \right\rangle \bigg|_{k=0} = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{3.14}$$

и начальным условием

$$V(t_1, x, k) = d^2(x, \mathcal{M}(k)), \quad k \geqslant 0. \tag{3.15}$$

Следующая лемма позволяет обосновать выполнение граничного условия (3.14) и найти значение функции цены на границе в явном виде:

**Лемма 3.13.** *Функция* $V_0(t, x) = V(t, x, k)|_{k=0}$ *удовлетворяет уравнению* (3.14) *(в смысле классического решения) и может быть найдена по формуле*

$$V_0(t, x) = d^2(x, \mathcal{W}[0, t]) = d^2\left(x, \mathcal{M}(0) - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right). \tag{3.16}$$

*Доказательство.* Лемма доказывается точно так же, как соответствующее утверждение для линейной системы без неопределенности [73]. Приведем это доказательство для полноты изложения. Докажем вначале формулу (3.16). При $k = 0$ помеха не имеет возможности принимать какие-либо действия, поэтому мы снова воспользуемся тем фактом, что в отсутствие неопределенности использование класса $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$ дает управлению в точности такие же возможности, что и $\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}$:

$$\begin{aligned}
V_0(t, x) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} &\left\{ d^2(x(t_1), \mathcal{M}(0)) \;\middle|\; u(t) \in \mathcal{P}(t) \right\} = \\
&= \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \max_{\ell \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x \rangle + \int_t^{t_1} \langle \ell, u(\tau) \rangle\, \mathrm{d}\tau - \rho\,(\ell \mid \mathcal{M}(0)) - \tfrac{1}{4} \langle \ell, \ell \rangle \right\} = \\
&= \max_{\ell \in \mathbb{R}^n} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \left\{ \langle \ell, x \rangle + \int_t^{t_1} \langle \ell, u(\tau) \rangle\, \mathrm{d}\tau - \rho\,(\ell \mid \mathcal{M}(0)) - \tfrac{1}{4} \langle \ell, \ell \rangle \right\} = \\
&= \max_{\ell \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x \rangle - \int_t^{t_1} \rho\,(\ell \mid -\mathcal{P}(\tau))\, \mathrm{d}\tau - \rho\,(\ell \mid \mathcal{M}(0)) - \tfrac{1}{4} \langle \ell, \ell \rangle \right\} = \\
&\qquad\qquad = d^2\left(x, \mathcal{M}(0) - \int_t^{t_1} \mathcal{P}(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) = d^2(x, \mathcal{W}[0, t]).
\end{aligned}$$

Покажем теперь, что эта функция удовлетворяет уравнению (3.14). Производная $V_0(t,x)$ в силу системы равна

$$\frac{\mathrm{d}V_0(t,x)}{\mathrm{d}t} = 2h(t,x)\frac{\mathrm{d}h(t,x)}{\mathrm{d}t},$$

где

$$h(t,x) = d(x, \mathcal{W}[0,t]) = \max_{\|\ell\|\leqslant 1}\left\{\langle \ell, x\rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{W}[0,t]\right)\right\} = \langle \ell_0, x\rangle - \rho\left(\ell_0 \mid \mathcal{W}[0,t]\right).$$

Здесь $\ell_0$ — единственный максимизатор при $h(t,x)>0$, и $\ell_0 = 0$ при $h(t,x)=0$.

По теореме о дифференцировании максимума [11] имеем

$$\frac{\mathrm{d}h(t,x)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h(t,x)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial h(t,x)}{\partial x}, \dot{x}\right\rangle = \\ = -\frac{\partial \rho\left(\ell_0 \mid \mathcal{W}[0,t]\right)}{\partial t} + \langle \ell_0, u\rangle = \langle \ell_0, u\rangle + \rho\left(\ell_0 \mid -\mathcal{P}(t)\right).$$

Так как опорная функция $\rho\left(\ell_0 \mid -\mathcal{P}(t)\right)$ непрерывно зависит от времени, то $V_0(t,x)$ имеет непрерывные производные первого порядка, и

$$\min_{u\in\mathcal{P}(t)}\frac{\mathrm{d}V_0(t,x)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V_0}{\partial t} + \min_{u\in\mathcal{P}(t)}\left\langle \frac{\partial V_0}{\partial x}, u\right\rangle = 0.$$

□

### 3.4.2 Последовательный максимин и последовательный минимакс

Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{T}$ отрезка $[t,t_1]$, то есть $t = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{m-1} < \tau_m = t_1$, и определим набор функций $V^+_{\mathcal{T}}(\tau_i,x,k)$ рекуррентным соотношением:

$$V^+_{\mathcal{T}}(\tau_m,x,k) = d^2(x,\mathcal{M}(k)),$$
$$V^+_{\mathcal{T}}(\tau_{i-1},x,k) = \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau_i)\geqslant 0}}\ \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}}\left\{V^+_{\mathcal{T}}(\tau_i,x(\tau_i),k(\tau_i)) \;\middle|\; k(\tau_{i-1}) = k\right\},\quad i=1,\ldots,m.$$

Аналогичным образом определим набор функций $V^-_{\mathcal{T}}(t,x,k)$ следующими соотношениями:

$$V^-_{\mathcal{T}}(\tau_m,x,k) = d^2(x,\mathcal{M}(k)),$$
$$V^-_{\mathcal{T}}(\tau_{i-1},x,k) = \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}}\ \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau_i)\geqslant 0}}\left\{V^-_{\mathcal{T}}(\tau_i,x(\tau_i),k(\tau_i)) \;\middle|\; k(\tau_{i-1}) = k\right\},\quad i=1,\ldots,m.$$

Функции $V_{\mathcal{T}}^{+}(t,x,k)$ и $V_{\mathcal{T}}^{-}(t,x,k)$ можно рассматривать как функцию цены задачи программного управления с коррекцией в моменты времени $\tau_0,\dots,\tau_{m-1}$, когда помеха на текущем шаге известна (функция $V_{\mathcal{T}}^{+}$) или неизвестна (функция $V_{\mathcal{T}}^{-}$) управлению заранее.

**Лемма 3.14.** *1. Для любого разбиения $\mathcal{T}$ выполняется неравенство*

$$V_{\mathcal{T}}^{+}(t,x,k) \leqslant V(t,x,k) \leqslant V_{\mathcal{T}}^{-}(t,x,k), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, k \geqslant 0.$$

*2. Верхний и нижний альтернированные интегралы являются соответственно множествами уровня функций $V_{\mathcal{T}}^{+}$ и $V_{\mathcal{T}}^{-}$:*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}^{+}[k,t] = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; V_{\mathcal{T}}^{+}(t,x,k) \leqslant 0\right\}, \quad \mathcal{I}_{\mathcal{T}}^{-}[k,t] = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; V_{\mathcal{T}}^{-}(t,x,k) \leqslant 0\right\}.$$

*3. При $d = \max\{\tau_i - \tau_{i-1}\} \to 0$ существуют поточечные пределы*

$$\begin{aligned} V^{+}(t,x,k) &= \lim_{d\to 0} V_{\mathcal{T}}^{+}(t,x,k) = \sup_{\mathcal{T}} V_{\mathcal{T}}^{+}(t,x,k),\\ V^{-}(t,x,k) &= \lim_{d\to 0} V_{\mathcal{T}}^{-}(t,x,k) = \inf_{\mathcal{T}} V_{\mathcal{T}}^{-}(t,x,k). \end{aligned}$$

*4. Функции $V^{+}(t,x,k)$ и $V^{-}(t,x,k)$ удовлетворяют неравенству*

$$V^{+}(t,x,k) \leqslant V(t,x,k) \leqslant V^{-}(t,x,k), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, k \geqslant 0.$$

Функцию $V^{+}(t,x,k)$ назовем *последовательным максимином*, а $V^{-}(t,x,k)$ — *последовательным минимаксом.*

Обозначим

$$\begin{aligned} V^{+}(t,x,k) &= V^{+}(t,x,k;t_1,V^{+}(t_1,\cdot,\cdot)) = V^{+}(t,x,k;t_1,d^2(x,\mathcal{M}(\cdot))),\\ V^{-}(t,x,k) &= V^{-}(t,x,k;t_1,V^{-}(t_1,\cdot,\cdot)) = V^{-}(t,x,k;t_1,d^2(x,\mathcal{M}(\cdot))). \end{aligned}$$

**Лемма 3.15.** *1. Функции $V^{+}(t,x,k)$ и $V^{-}(t,x,k)$ удовлетворяют полугрупповому свойству, то есть для произвольного момента времени $\tau \in [t,t_1]$ выполняются равенства*

$$V^{+}(t,x,k;t_1,V^{+}(t_1,\cdot,\cdot)) = V^{+}(t,x,k;\tau,V^{+}(\tau,\cdot,\cdot;V^{+}(t_1,\cdot,\cdot))), \tag{3.17}$$

$$V^{-}(t,x,k;t_1,V^{-}(t_1,\cdot,\cdot)) = V^{-}(t,x,k;\tau,V^{-}(\tau,\cdot,\cdot;V^{-}(t_1,\cdot,\cdot))). \tag{3.18}$$

*2. Для произвольного момента времени $\tau \in [t, t_1]$ справедливы неравенства:*

$$V^+(t,x,k) \geqslant \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau)\geqslant 0}} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{OL}} \left\{ V^+(\tau, x(\tau), k(\tau)) \;\middle|\; k(t)=k,\ x(t)=x \right\}, \tag{3.19}$$

$$V^-(t,x,k) \leqslant \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{OL}} \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau)\geqslant 0}} \left\{ V^-(\tau, x(\tau), k(\tau)) \;\middle|\; k(t)=k,\ x(t)=x \right\}. \tag{3.20}$$

*Доказательство.* Доказательства приведем для последовательного максимина.

1. Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — произвольные разбиения отрезков $[t, \tau]$ и $[\tau, t_1]$ соответственно. Рассмотрим разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$. Тогда по определению получаем

   $$V^+_{\mathcal{T}}(t,x,k;t_1, V^+_{\mathcal{T}}(t_1,\cdot,\cdot)) = V^+_{\mathcal{T}_1}(t,x,k;\tau, V^+_{\mathcal{T}_2}(\tau,\cdot,\cdot;t_1, V^+_{\mathcal{T}}(t_1,\cdot,\cdot))).$$

   Взяв предел при измельчении разбиений $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, выводим полугрупповое свойство (3.17).

2. Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{T}$, у которого $\tau_0 = t$, $\tau_1 = \tau$. По лемме 3.14 имеем $V^+(t,x,k) \geqslant V^+_{\mathcal{T}}(t,x,k)$. Взяв в правой части верхнюю грань по всем таким разбиениям, получаем неравенство (3.19).

□

**Лемма 3.16.** *Выполняются оценки*

$$V^+(t,x,k) \leqslant d^2(x, \mathcal{I}^+[k,t]), \tag{3.21}$$

$$V^-(t,x,k) \leqslant d^2(x, \mathcal{I}^-[k,t]), \tag{3.22}$$

*то есть при применении оптимальной позиционной стратегии расстояние до целевого множества в конечный момент должно быть не больше расстояния до множества разрешимости.*

*Доказательство.* Докажем оценку для $V^+(t,x,k)$; оценка для $V^-(t,x,k)$ доказывается аналогично. Достаточно показать, что для любого разбиения $\mathcal{T}$ выполняется неравенство

$$V^+_{\mathcal{T}}(t,x,k) \leqslant d^2(x, W^+_{\mathcal{T}}[k,t]),$$

из которого предельным переходом при измельчении $\mathcal{T}$ получается неравенство (3.21).

Пусть уже доказано, что $V^+_{\mathcal{T}}(\tau_i,x,k) \leqslant d^2\left(x, W^+_{\mathcal{T}}[k,\tau_i]\right)$ (при $i = m$ это очевидно), покажем, что неравенство будет выполняться и в момент $\tau_{i-1}$.

$$
\begin{aligned}
V_{\mathcal{I}}^{+}(\tau_{i-1},x,k) = {} & \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau_i)\geqslant 0}} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \left\{ V_{\mathcal{I}}^{+}(\tau_i, x(\tau_i), k(\tau_i)) \;\middle|\; k(\tau_{i-1}) = k \right\} \leqslant \\
& \leqslant \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau_i)\geqslant 0}} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \left\{ d^2\left(x(\tau_i), W_{\mathcal{I}}^{+}[\tau_i, k(\tau_i)]\right) \;\middle|\; k(\tau_{i-1}) = k \right\} = \\
= \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau_i)\geqslant 0}} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} & \left\{ \langle \ell, x\rangle + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle \ell, u+v\rangle\,\mathrm{d}\tau - \rho\left(\ell \;\middle|\; W_{\mathcal{I}}^{+}[\tau_i, k(\tau_i)]\right) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\}.
\end{aligned}
$$

Функция, стоящая под знаком максимума, линейна по $u(\cdot)$, вогнута по $\ell$ и стремится к бесконечности при $\|\ell\| \to \infty$. Следовательно, операции взятия минимума и максимума перестановочны [78]. Поэтому

$$
\begin{aligned}
V_{\mathcal{I}}^{+}(\tau_{i-1},x,k) &= \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau_i)\geqslant 0}} \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathrm{OL}}} \left\{ \langle \ell, x\rangle + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle \ell, u+v\rangle\,\mathrm{d}\tau - \rho\left(\ell \;\middle|\; W_{\mathcal{I}}^{+}[k(\tau_i), \tau_i]\right) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = \\
&= \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau_i)\geqslant 0}} \left\{ \langle \ell, x\rangle + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(-\rho\left(\ell \mid -\mathcal{P}\right) + \langle \ell, v\rangle\right)\mathrm{d}\tau - \rho\left(\ell \;\middle|\; W_{\mathcal{I}}^{+}[k(\tau_i), \tau_i]\right) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = \\
&= \max_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \max_{\substack{v(\cdot)\\ k(\tau_i)\geqslant \gamma}} \left\{ \langle \ell, x\rangle + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(-\rho\left(\ell \mid -\mathcal{P}\right) + \langle \ell, v\rangle\right)\mathrm{d}\tau - \rho\left(\ell \;\middle|\; W_{\mathcal{I}}^{+}[\gamma, \tau_i]\right) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = \\
&= \max_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle \underbrace{- \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \rho\left(\ell \mid -\mathcal{P}\right)\mathrm{d}\tau + \rho\left(\ell \;\middle|\; \sqrt{k-\gamma}\,\mathcal{S}\right) - \rho\left(\ell \;\middle|\; W_{\mathcal{I}}^{+}[\gamma, \tau_i]\right)}_{A(\ell)} - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = \\
&= \max_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle - A(\ell) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} \leqslant \max_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle - \operatorname{conv} A(\ell) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = \\
&= \max_{0\leqslant\gamma\leqslant k} \max_{\ell\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle \ell, x\rangle - \rho\left(\ell \;\middle|\; \left(W_{\mathcal{I}}^{+}[\gamma, \tau_i] - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\,\mathcal{S}(\tau_{i-1}, \tau_i)\right) - \tfrac{1}{4}\|\ell\|^2 \right\} = \\
&= \max_{0\leqslant\gamma\leqslant k} d^2\left(x, \left(W_{\mathcal{I}}^{+}[\gamma, \tau_i] - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\,\mathcal{S}(\tau_{i-1}, \tau_i)\right) \leqslant d^2(x, W_{\mathcal{I}}^{+}[k, \tau_{i-1}]).
\end{aligned}
$$

□

**Теорема 3.17.** *Если последовательный максимин и последовательный минимакс совпадают, то справедливы следующие утверждения:*

1. *Выполняется принцип оптимальности, то есть для произвольного момента* $\tau \in [t, t_1]$ *верно равенство*

$$
\begin{gathered}
V(t, x, k; t_1, V(t_1, \cdot, \cdot)) = V(t, x, k; \tau, V(\tau, \cdot, \cdot; t_1, V(t_1, \cdot, \cdot))), \\
V(t_1, x, k) = d^2(x, \mathcal{M}(k)).
\end{gathered}
$$

2. *Если у функции* $V(t,x,k)$ *существуют непрерывные частные производные, то она является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана* (3.13) *с граничным условием* (3.14) *и начальным условием* (3.15).

3. *Выполняется оценка*
$$V(t,x,k) \leqslant d(x, \mathcal{W}[k,t]).$$

*Доказательство.* Поскольку последовательные максимин и минимакс совпадают друг с другом, то они совпадают и с функцией цены, поэтому первая часть теоремы следует из леммы 3.15.

Переходя к пределу в неравенствах (3.19), (3.20), получаем

$$\max_{v\in\mathbb{R}^n}\min_{u\in\mathcal{P}(t)} \frac{\mathrm{d}V^+(t,x,k)}{\mathrm{d}t} \leqslant 0, \quad \min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max_{v\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}V^-(t,x,k)}{\mathrm{d}t} \geqslant 0.$$

Поскольку функции $V^+(t,x,k)$ и $V^-(t,x,k)$ совпадают с $V(t,x,k)$, и выполнены условия теоремы о существовании седловой точки, то

$$\max_{v\in\mathbb{R}^n}\min_{u\in\mathcal{P}(t)} \frac{\mathrm{d}V(t,x,k)}{\mathrm{d}t} = \min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max_{v\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}V(t,x,k)}{\mathrm{d}t} = 0,$$

то есть функция цены является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса. □

**Следствие 3.17.1.** *В условиях теоремы управление, решающее задачу 3.2, находится следующим образом:*

$$\mathcal{U}^*(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, u \right\rangle. \tag{3.23}$$

Последнее утверждение теоремы означает: управление $\mathcal{U}^*(t,x,k)$ гарантирует, что траектории дифференциального включения (3.8) не будут удаляться от множества разрешимости с течением времени и в конечный момент окажутся на расстоянии от целевого множества, не превосходящем расстояния до множества разрешимости в начальный момент.

### 3.4.3 Эволюционное уравнение и синтезирующие стратегии

Многозначное отображение $\mathcal{Z}[k,t]\colon \mathbb{R}\times T \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ называется *слабо инвариантным*, если при $t_0 \leqslant t < t+\sigma \leqslant t_1$ имеет место вложение

$$\begin{aligned}&\mathcal{Z}[k,t] \subseteq W^+(k,t;t+\sigma,\mathcal{Z}[\cdot,t+\sigma]) = \\ &\qquad = \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k}\left\{\left(\mathcal{Z}[\gamma,t+\sigma] - \int_t^{t+\sigma}\mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \dot{-} \sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t-\sigma,t)\right\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что слабо инвариантными будут верхний и нижний альтернированный интегралы, а также множество разрешимости $\mathcal{W}[k,t]$, при этом последнее будет максимальным по включению слабо инвариантным множеством.

**Лемма 3.18.** *Каждое слабо инвариантное многозначное отображение $\mathcal{Z}[k,t]$ является решением следующего* эволюционного уравнения*:*

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\max_{0\leqslant\gamma\leqslant k} h_+\left(\mathcal{Z}[k,t-\sigma] + \sqrt{\sigma(k-\gamma)}\mathcal{E}\left(0,S^{-1}(t)\right), \mathcal{Z}[\gamma,t] - \sigma\mathcal{P}(t)\right) = 0, \qquad (3.24)$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad k \geqslant 0.$$

*Доказательство.* Используя определение слабо инвариантного множества, имеем

$$\begin{aligned}&\mathcal{Z}[k,t-\sigma] \subseteq \bigcap_{0\leqslant\gamma\leqslant k}\left(\mathcal{Z}[\gamma,t] - \int_{t-\sigma}^{t}\mathcal{P}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \dot{-} \left[\sqrt{k-\gamma}\mathcal{S}(t-\sigma,t)\right] \subseteq \\ &\qquad \subseteq (\mathcal{Z}[\gamma,t] - \sigma\mathcal{P}(t)) \dot{-} \left[\sqrt{\sigma(k-\gamma)}\mathcal{E}\left(0,S^{-1}(t)\right)\right] + o(\sigma)\mathcal{B}_1, \quad \forall\gamma\in[0,k].\end{aligned}$$

По определению геометрической разности получаем

$$\mathcal{Z}[k,t-\sigma] + \sqrt{\sigma(k-\gamma)}\mathcal{E}\left(0,S^{-1}(t)\right) \subseteq \mathcal{Z}[\gamma,t] - \sigma\mathcal{P}(t) + o(\sigma)\mathcal{B}_1, \quad \forall\gamma\in[0,k],$$

откуда по определению хаусдорфовой полуметрики

$$h_+\left(\mathcal{Z}[k,t-\sigma] + \sqrt{\sigma(k-\gamma)}\mathcal{E}\left(0,S^{-1}(t)\right), \mathcal{Z}[\gamma,t] - \sigma\mathcal{P}(t)\right) = o(\sigma), \quad \forall\gamma\in[0,k],$$

что и доказывает лемму. □

Примем следующие предположения о структуре слабо инвариантного отображения:

**Предположение 3.4.** Существуют непрерывные частные производные опорной функции $\rho\left(\ell \mid \mathcal{Z}[k,t]\right)$ по переменным $t$ и $k$.

**Предположение 3.5.** $\partial\rho\left(\ell \mid \mathcal{Z}[k,t]\right)/\partial k < 0$

**Теорема 3.19.** *Пусть $\mathcal{Z}[k,t]$ — слабоинвариантное многозначное отображение, для которого выполнены предположения 3.4 и 3.5. Тогда*

1. *функция*
$$G(t,x,k) = d^2(x,\mathcal{Z}[k,t]) = h^2(t,x,k)$$
*непрерывно дифференцируема;*

2. *полная производная функции $G(t,x(t),k(t))$ в силу системы* (3.5) *при всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k > 0$ удовлетворяет неравенству*
$$\min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max_{v\in\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{d}G(t,x,k)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial G}{\partial t} + \min_{u\in\mathcal{P}(t)}\max_{v\in\mathbb{R}^n}\left\{\left\langle\frac{\partial G}{\partial x}, u+v\right\rangle - \|v\|_S^2\frac{\partial G}{\partial k}\right\} \leqslant 0; \quad (3.25)$$

3. *если верно вложение $\mathcal{Z}[k,t_1] \subseteq \mathcal{M}(k)$, то позиционная стратегия управления*
$$\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t,x,k) = \operatorname*{Arg\,min}_{u\in\mathcal{P}(t)}\left\langle\frac{\partial G(t,x,k)}{\partial x}, u\right\rangle$$
*является решением задачи 3.1.*

*Доказательство.* Покажем, что у функции $G(t,x,k)$ существуют непрерывные частные производные. Для этого представим функцию $h(t,x,k)$ в виде
$$h(t,x,k) = \max\left\{\langle\ell,x\rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{Z}[k,t]\right) \mid \|\ell\| \leqslant 1\right\} = \left\langle\ell^0,x\right\rangle - \rho\left(\ell^0 \;\middle|\; \mathcal{Z}[k,t]\right),$$
где $\ell^0 = \ell^0(t,x,k) \neq 0$ — единственный максимизатор при условии $h(t,x,k) > 0$ и $\ell^0(t,x,k) = 0$ при $h(t,x,k) = 0$. По теореме о дифференцировании функции максимума [11] имеем
$$\frac{\partial G}{\partial t} = -2h(t,x,k)\frac{\partial\rho\left(\ell^0 \mid \mathcal{Z}[k,t]\right)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 2h(t,x,k)\ell^0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial k} = -2h(t,x,k)\frac{\partial\rho\left(\ell^0 \mid \mathcal{Z}[k,t]\right)}{\partial k},$$
причем эти частные производные существуют и непрерывны в силу условий теоремы, что и доказывает первое утверждение.

Частично повторяя доказательство леммы 3.16, получаем
$$\max_{v(\cdot)}\min_{u(\cdot)} G(t+\sigma,x(t+\sigma),k(t+\sigma)) = \max_{v(\cdot)}\min_{u(\cdot)} d^2(x(t+\sigma),\mathcal{Z}[t+\sigma,k(t+\sigma)]) \leqslant$$
$$\leqslant d^2(x,W^+(k,t;t+\sigma,\mathcal{Z}[\cdot,t+\sigma])) \leqslant d^2(x,\mathcal{Z}[k,t])) = G(t,x,k),$$

следовательно,

$$\max_{v(\cdot)}\min_{u(\cdot)}\{G(t+\sigma,x(t+\sigma),k(t+\sigma))-G(t,x,k)\}\leqslant 0.$$

Разделив последнее неравенство на $\sigma$ и перейдя к пределу при $\sigma\to 0$, получаем неравенство (3.25).

Фиксируем суммируемую помеху $v(t)$. Так как множество разрешимости удовлетворяет эволюционному уравнению (3.24), то оно непрерывно как функция переменных $t$ и $k$, следовательно, стратегия $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t,x,k)$ будет полунепрерывной сверху по включению и принадлежит классу $\mathcal{U}_{\mathrm{CL}}$.

Покажем, что управление $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}$ является решением задачи (3.1). Это следует из того, что по определению этого управления

$$\max_{v\in\mathbb{R}^n}\left.\frac{\mathrm{d}G(t,x,k)}{\mathrm{d}t}\right|_{u\in\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t,x,k)}\leqslant 0,$$

следовательно, функция $G(t,x(t),k(t))$ будет невозрастающей вдоль траекторий системы, и в частности $G(t_1,x(t_1),k(t_1))\leqslant G(t_0,x(t_0),k(t_0))$, поэтому если точка $(x(t_0),k(t_0))$ лежит во множестве $\mathcal{Z}[t_0,k(t_0)]$, то и конец траектории $(x(t_1),k(t_1))$ будет лежать в целевом множестве $\mathcal{Z}[k(t_1),t_1]\subseteq\mathcal{M}(k(t_1))$. $\square$

*Замечание* 3.1. Хотя позиционная стратегия стратегия $\mathcal{U}^0$ и не является оптимальной в смысле игры степени, в которой требуется минимизировать расстояние до целевого множества, она решает задачу 3.1 и кроме того, как и оптимальная позиционная стратегия, гарантирует, что расстояние до целевого множества в конечный момент не превзойдет расстояния до множества разрешимости.

## 3.5 Одномерный случай

Процесс вычисления альтернированного интеграла и экстремальной к нему стратегии существенно упрощается, если пространство положений системы $x$ одномерно[1], то есть $n=1$. Упрощение достигается за счет того, что сечения множества разрешимости являются отрезками, для задания которых необходимо лишь указать координаты левого и правого концов. Поскольку координаты концов сечений зависят от времени и

[1]Система (3.5) при этом двумерная, так как содержит кроме $x$ еще и переменную $k$.

от резерва помехи, то построение альтернированных интегралов сведется к решению дифференциального уравнения в частных производных особого вида.

Дополнительное упрощение дает тот факт, что в цепочке вложений

$$W^{-}[k,t] \subseteq \mathcal{I}^{-}[k,t] \subseteq \mathcal{I}^{+}[k,t] \subseteq W^{+}[k,t] \tag{3.26}$$

каждое из вложений может быть строгим только в том случае, если меньшее из множеств пусто. Например, если $W^{-}[k,t] \neq \varnothing$, то автоматически

$$W^{-}[k,t] = \mathcal{I}^{-}[k,t] = \mathcal{I}^{+}[k,t] = W^{+}[k,t].$$

Иначе говоря, для тех пар $(t,k)$, где минимаксное множество программное разрешимости не пусто, нет необходимости вычислять $\mathcal{I}^{-}$ и $\mathcal{I}^{+}$ как пределы интегральных сумм: они равны $W^{-}[k,t]$. Если же множество $W^{+}$ пусто, то тем более пусты и все остальные множества в (3.26).

Функция цены в одномерном случае в точности равна квадрату расстояния до сечения множества разрешимости, если оно непусто, а в общем случае имеет вид $(d(x,[a,b]) + h)^2$, где $a \leqslant b$ и $h \geqslant 0$.

### 3.5.1 Эволюция множества разрешимости

Как мы уже говорили, сечения интересующих нас множеств являются отрезками, так как они выпуклы и компактны. Отрезок мы будем описывать координатами его концов[2]: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Используемые операции над множествами при этом примут вид:

$$\begin{aligned} [a_1,b_1] + [a_2,b_2] &= [a_1 + a_2, b_1 + b_2]\,, & [a_1,b_1] \cap [a_2,b_2] &= [a_1 \vee b_1, b_1 \wedge b_2]\,, \\ [a_1,b_1] \dot{-} [a_2,b_2] &= [a_1 - a_2, b_1 - b_2]\,, & \operatorname{conv} [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] &= [a_1 \wedge a_2, b_1 \vee b_2]\,, \\ \lambda \cdot [a,b] &= [\lambda a, \lambda b] \quad (\lambda \geqslant 0), & \lambda \cdot [a,b] &= [\lambda b, \lambda a] \quad (\lambda \leqslant 0). \end{aligned} \tag{3.27}$$

При этом в операциях пересечения и геометрической разности результат $[a,b]$ будет пустым, если $a > b$.

[2]На первый взгляд, было бы удобнее воспользоваться другим определением отрезка, по аналогии с определением эллипсоида: $\mathcal{I}(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leqslant r\}$. Однако операция пересечения отрезков, выраженная в терминах середины $a$ и полудлины отрезка $r$, имеет слишком сложный вид, если отрезки не являются концентрическими. Поскольку при вычислении множеств программной разрешимости эта операция активно используется, то мы предпочтем задавать отрезок координатами его концов.

Будем считать, что множества–параметры задачи 3.1 заданы отрезками

$$\mathcal{M}(k) = [M_a(k), M_b(k)]\,, \qquad\qquad \mathcal{P}(t) = [P_a(t), P_b(t)]\,.$$

**Лемма 3.20.** *Сечения множеств программной разрешимости являются отрезками* $W^+[k,t] = \big[W_a^+(k,t), W_b^+(k,t)\big]$, $W^-[k,t] = \big[W_a^-(k,t), W_b^-(k,t)\big]$ *с концами*

$$\begin{aligned}
&\underbrace{W_a^+(k,t) = W_a^-(k,t)}_{W_a(k,t)} = \underbrace{\max_{0\leqslant\gamma\leqslant k}\Big\{M_a(\gamma) + \sqrt{(k-\gamma)\mathbf{S}(t,t_1)}\Big\}}_{W_a^0[k,t]} - \int_t^{t_1} P_b(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\\
&\underbrace{W_b^+(k,t) = W_b^-(k,t)}_{W_b(k,t)} = \underbrace{\min_{0\leqslant\gamma\leqslant k}\Big\{M_b(\gamma) - \sqrt{(k-\gamma)\mathbf{S}(t,t_1)}\Big\}}_{W_b^0[k,t]} - \int_t^{t_1} P_a(\tau)\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

*причем максиминное множество $W^+[k,t]$ непусто, если $W_a^+(k,t) \leqslant W_b^+(k,t)$, а минимаксное — если $W_a^0(k,t) \leqslant W_b^0(k,t)$.*

Непосредственно из (3.28) получаем

**Следствие 3.20.1.** *Минимаксное множество разрешимости $W^-[k,t]$ либо пусто, либо совпадает с максиминным множеством $W^+[k,t]$.*

Применяя это утверждение необходимое число раз, по индукции выводим

**Следствие 3.20.2.** *Для произвольного разбиения $\mathcal{T}$ отрезка $[t,t_1]$ в цепочке вложений*

$$W^-[k,t] \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}^-[k,t] \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}^+[k,t] \subseteq W^+[k,t] \tag{3.29}$$

*только одно из вложений может быть строгим, и при этом меньшее из множеств в этом вложении является пустым.*

Наконец, переходя к пределу в (3.29), получаем

**Следствие 3.20.3.** *В цепочке вложений* (3.26) *только одно из вложений может быть строгим, и при этом меньшее из множеств в этом вложении является пустым. При этом*

$$\mathcal{I}^+[k,t] = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\tau \in [t,t_1]:\ W^+[k,\tau] = \varnothing. \tag{3.30}$$

Представим теперь верхний и нижний альтернированные интегралы в виде отрезков $\mathcal{I}^+[k,t] = \big[I_a^+(k,t), I_b^+(k,t)\big]$ и $\mathcal{I}^-[k,t] = \big[I_a^-(k,t), I_b^-(k,t)\big]$. Нас будут интересовать дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют концы этих отрезков.

**Лемма 3.21.** *Пусть функция $M_a(k)$ вогнутая и обладает непрерывной положительно производной, а функция $M_b(k)$, напротив, выпуклая с непрерывной отрицательной производной. Тогда при $\Delta t = t_1 - t = o(k)$ имеют место приближения*

$$W_a(k,t) = M_a(k) + \frac{\Delta t}{4S(t)M_a'(k)} - P_b(t)\Delta t + o(\Delta t), \tag{3.31}$$

$$W_b(k,t) = M_b(k) + \frac{\Delta t}{4S(t)M_b'(k)} - P_a(t)\Delta t + o(\Delta t). \tag{3.32}$$

*Доказательство.* В силу вогнутости функции $M_a(k)$ имеем

$$W_a^0(k,t) \leqslant \max_{0\leqslant \Delta k\leqslant k} \Big\{ M_a(k) - \Delta k M_a'(k) + \sqrt{\mathbf{S}(t,t_1)\Delta k} \Big\}.$$

При малых $\Delta t$ максимум достигается в точке $\Delta k^* = \frac{1}{4}\mathbf{S}(t,t_1)/(M_a'(k))^2$, поэтому

$$W_a^0(k,t) \leqslant M_a(k) + \frac{\mathbf{S}(t,t_1)}{4M_a'(k)}. \tag{3.33}$$

С другой стороны,

$$W_a^0(k,t) \geqslant M_a(k-\Delta k^*) + \sqrt{\Delta k^* \mathbf{S}(t,t_1)}.$$

Пользуясь разложениями

$$M_a(k-\Delta k^*) = M_a(k) - M_a'(k)\Delta k^* + o(\Delta k^*), \quad \mathbf{S}(t,t_1) = S^{-1}(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta k^* = O(\Delta t),$$

получаем

$$W_a^0(k,t) \geqslant M_a(k) + \frac{\Delta t}{4S(t)M_a'(k)} + o(\Delta t). \tag{3.34}$$

Объединяя (3.34) с (3.33) и разложением для интеграла от $P_b(t)$, получаем формулу (3.31). Приближение (3.32) доказывается полностью аналогично. □

Объединяя доказанные выше утверждения, получаем следующий результат:

**Теорема 3.22.** *Каждый из альтернированных интегралов либо пуст, либо является отрезком* $[I_a(k,t), I_b(k,t)] = W^+[k,t]$*. Если функции* $I_a$ *и* $I_b$ *обладают непрерывными частными производными и выполнены предположения 3.4 и 3.5, то справедливы следующие дифференциальные уравнения:*

$$\frac{\partial I_a}{\partial t} + \frac{1}{4S(t)}\left(\frac{\partial I_a}{\partial k}\right)^{-1} - P_b(t) = 0, \quad I_a(t_1,k) = M_a(k), \quad \left.\frac{\partial I_a}{\partial t} - P_b(t)\right|_{k=0} = 0; \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial I_b}{\partial t} + \frac{1}{4S(t)}\left(\frac{\partial I_b}{\partial k}\right)^{-1} - P_a(t) = 0, \quad I_b(t_1,k) = M_b(k), \quad \left.\frac{\partial I_b}{\partial t} - P_a(t)\right|_{k=0} = 0. \tag{3.36}$$

*При этом непустоту* $\mathcal{I}^+[k,t]$ *можно определить, исходя из критерия* (3.30)*, а достаточным условием непустоты* $\mathcal{I}^-[k,t]$ *является*

$$\exists r > 0: \quad \operatorname{diam} W^+[k,\tau] \geqslant r, \quad \tau \in (t, t_1]. \tag{3.37}$$

*Доказательство.* Уравнения (3.35) и (3.36) выводятся подстановкой в (3.31) и (3.32) вместо целевого множества верхнего и нижнего альтернированных интегралов.

Для того, чтобы доказать достаточность условия (3.37), воспользуемся леммой 3.20. В момент $t + \Delta t$ длина нижнего альтернированного интеграла по условию не меньше $r$. В момент $t$ он будет непустым, если $W_a^0(k,t) \leqslant W_b^0(k,t)$. Пользуясь (3.31), (3.32) получаем

$$W_b^0(k,t) - W_a^0(k,t) \geqslant r + \frac{\Delta t}{4S(t)}\left(\frac{1}{M_b'(k)} - \frac{1}{M_a'(k)}\right) + o(\Delta t),$$

что больше нуля при малых значениях $\Delta t$. □

Дифференциальные уравнения (3.35), (3.36) являются одномерным аналогом эволюционного уравнения (3.24) и могут быть выведены непосредственно из последнего.

### 3.5.2 Функция цены и синтез управлений

Целью данного параграфа будет показать, что в каждый момент времени функция цены, рассматриваемая как функция переменной $x$ при фиксированных значениях $t$ и $k$, принадлежит трехпараметрическому семейству

$$\mathcal{V} = \left\{ x \to (d(x,[a,b]) + h)^2 \;\middle|\; a \leqslant b,\ h \geqslant 0 \right\}, \tag{3.38}$$

то есть представима в виде

$$V(t,x,k) = (d(x,[a(t,k),b(t,k)]) + h(t,k))^2.$$

Докажем некоторые свойства класса функций (3.38):

**Лемма 3.23.** *Пусть $\mathcal{Y}$ — отрезок, тогда функция*

$$V(x) = \min_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ (d(x+y,[a,b]) + h)^2 \right\},$$

*принадлежит классу $\mathcal{V}$.*

*Доказательство.* Лемма представляет собой частный случай аналогичного утверждения для пространства $\mathbb{R}^n$: если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — выпуклые компакты, то

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} d(x-y,\mathcal{X}) = d(x,\mathcal{X}+\mathcal{Y}).$$

□

**Лемма 3.24.** *Пусть $\mathfrak{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ — непустое ограниченное множество параметров, тогда функция*

$$V(x) = \max_{(a,b,h) \in \mathfrak{P}} \left\{ (d(x,[a,b]) + h)^2 \right\}$$

*принадлежит классу $\mathcal{V}$.*

*Доказательство.* Представив расстояние через сопряженную функцию, получаем

$$\max_{\ell \in \{-1,0,1\}} \max_{(a,b,h) \in \mathfrak{P}} \{\ell x - \rho\,(\ell \mid [a,b]) + h\} =$$

$$= \max\Big\{ \underbrace{\max_{(a,b,h)\in\mathfrak{P}} h}_{h^0},\ x + \underbrace{\max_{(a,b,h)\in\mathfrak{P}} \{h-b\}}_{-c^+},\ -x + \underbrace{\max_{(a,b,h)\in\mathfrak{P}} \{a+h\}}_{c^-} \Big\} =$$

$$= \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}(c^- + c^+)\right| + \frac{1}{2}(c^- - c^+), & c^- - c^+ \geqslant 2h_0, \\ d(x,[c^- - h_0, c^+ + h_0]) + h_0, & c^- - c^+ \leqslant 2h_0. \end{cases}$$

□

**Лемма 3.25.** *Пусть $\{V_i(\cdot)\} \subset \mathcal{V}$ — монотонная последовательность функций с равномерно ограниченными множествами уровня, для которой существует поточечный предел $V(\cdot)$. Тогда функция $V(\cdot)$ также принадлежит классу $\mathcal{V}$.*

Применяя леммы 3.23, 3.24 и 3.25, получаем следующий результат:

**Теорема 3.26.** *В одномерном случае последовательный максимин $V^+(t,x,k)$ и последовательный минимакс $V^-(t,x,k)$ являются функциями класса $\mathcal{V}$ и при существовании верхнего или нижнего альтернированного интеграла соответственно допускают представления*

$$V^+(t,x,k) = d^2(x,\mathcal{I}^+[k,t]), \qquad V^-(t,x,k) = d^2(x,\mathcal{I}^-[k,t]).$$

## 3.6 Примеры

**Пример 3.1.** Рассмотрим одномерную систему со следующими данными:

$$\mathcal{M} = \{\, (x,k) \mid x \in [-1,1], k \geqslant 0\}, \quad \mathcal{P}(t) = [-1,1], \quad S(t) = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = T.$$

В этом случае

$$W_a(k,t) = -(T-t) + \sqrt{k(T-t)} - 1, \qquad W_b(k,t) = (T-t) - \sqrt{k(T-t)} + 1.$$

При этом максиминное множество $W^+[k,t]$ непусто, если $(T-t) - \sqrt{k(T-t)} + 1 \geqslant 0$, а минимаксное — если $k(T-t) \leqslant 1$. Граница этих множеств представлена на рисунках 3.1 и 3.2 соответственно.

Позиционное множество разрешимости $\mathcal{W}[k,t]$ непусто, если выполнено следующее условие:

$$\tau - \sqrt{k\tau} + 1 \geqslant 0, \quad \forall \tau \in [0, T-t].$$

Легко установить, что это эквивалентно следующему требованию:

$$k \leqslant 4 \quad \text{либо} \quad \begin{cases} k \geqslant 4(T-t), \\ (T-t) - \sqrt{k(T-t)} + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Граница множества разрешимости изображена на рисунке 3.3.

**Пример 3.2.** Как видно из предыдущего примера, при $k < 4$ множество разрешимости непусто и функция цены равна расстоянию до отрезка $[W_a(k,t), W_b(k,t)]$, то есть

$$V(t,x,k) = \left(0 \vee \left(|x| - (T-t) + \sqrt{k(T-t)} - 1\right)\right)^2.$$

После возведения в квадрат видно, что выражение для функции цены содержит слагаемое $\sqrt{k(T-t)}$, которое не обладает производной при $t = T$ или $k = 0$. Это происходит из-за того, что нарушено предположение 3.3. График функции цены при $t = T - 3$ показан на рисунке 3.4.

## 3.7 Иллюстрации

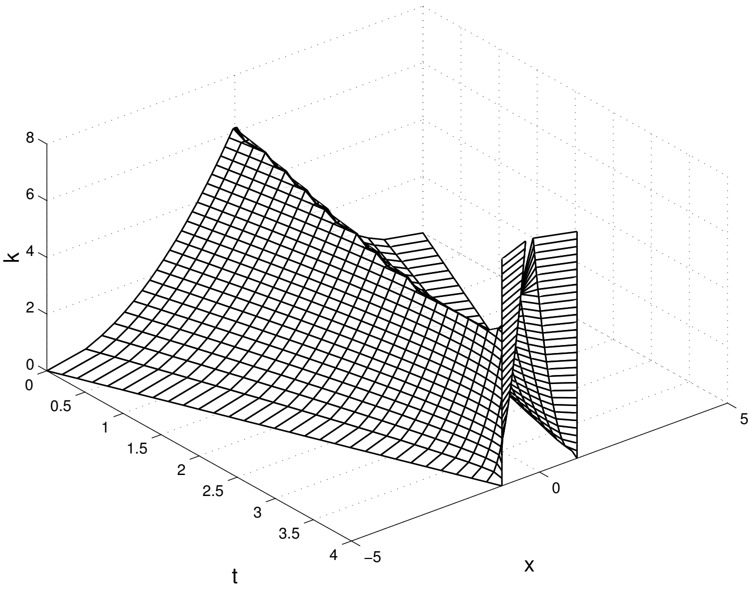


Рис. 3.1: Пример 3.1: граница максиминного множества разрешимости

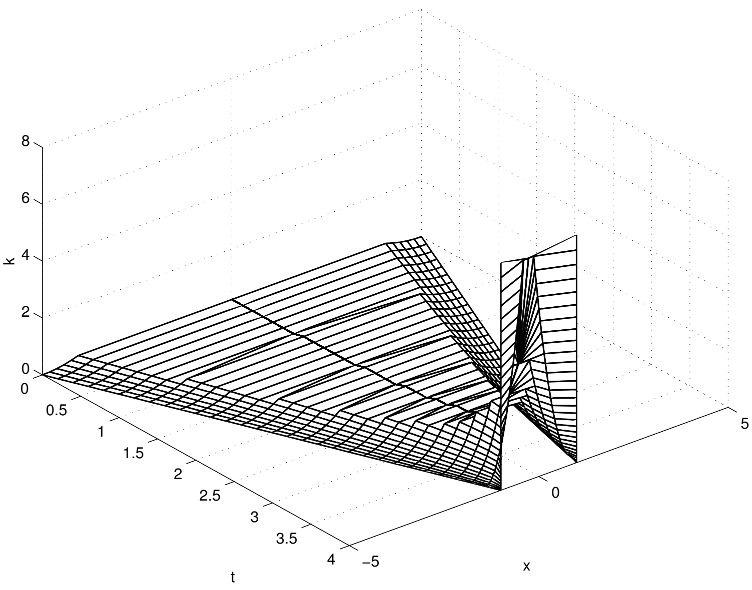


Рис. 3.2: Пример 3.1: граница минимаксного множества разрешимости

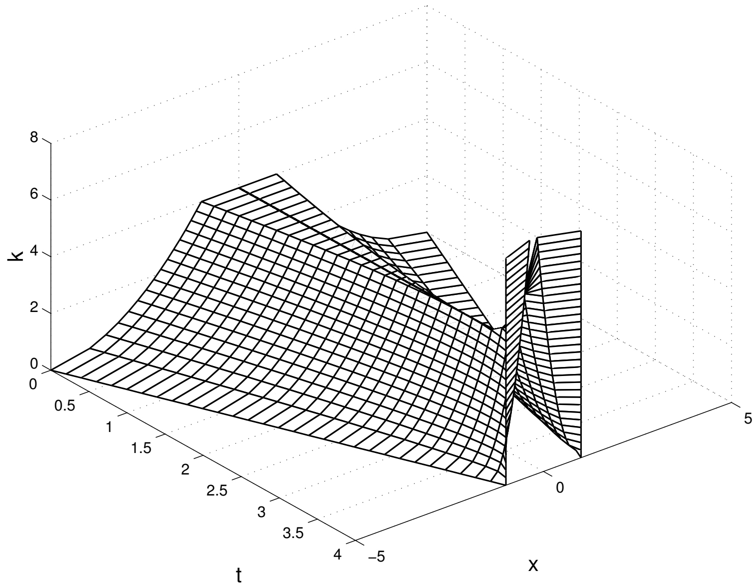


Рис. 3.3: Пример 3.1: граница множества разрешимости в одномерном случае

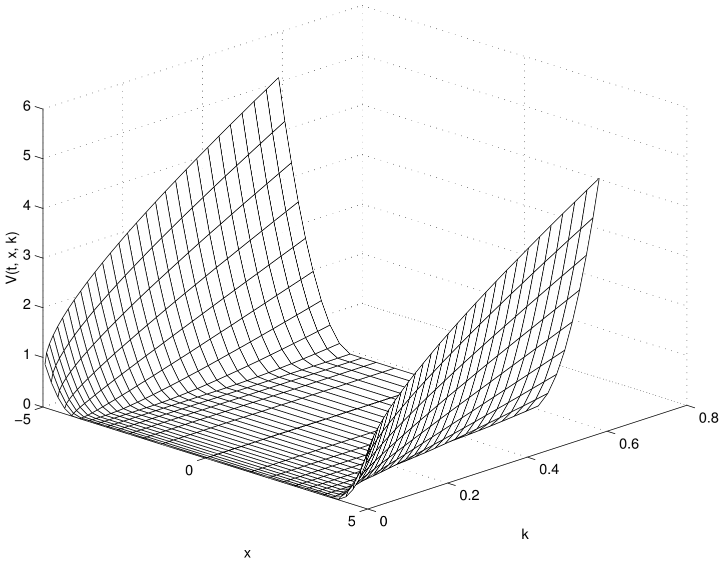


Рис. 3.4: Пример 3.2: график функции цены

# Заключение

В заключение кратко сформулируем основные результаты работы.

1. Решена задача синтеза для системы с двойным ограничением на управление. В частности, получено явное выражение для функции цены.

2. Для системы с нелинейной зависимостью геометрического ограничения от интегрального доказаны теоремы о существовании и единственности оптимального управления. Получено явное выражение для функции цены.

3. Решена задача синтеза для системы с двойным ограничением на управление при наличии помех, стесненных геометрическим ограничением. В частности, построен аналог схемы альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина; получена верхняя оценка для функции цены; указана синтезирующая стратегия, разрешающая задачу.

4. Решена задача синтеза для системы, в которой управление и помеха выбираются в различных классах (геометрические и интегральные ограничения, соответственно). В частности, построен аналог схемы альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина; получена верхняя оценка для функции цены; указана синтезирующая стратегия, разрешающая задачу.

# Литература


1. *Азамов А. О.* О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Математический сборник. 1982. Т. 118 (160). № 3 (7). с. 422–430.

2. *Азимов А. Я., Гусейнов Ф. В.* О некоторых классах дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1972. № 3. с. 9–16.

3. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

4. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.

5. *Бондаренко В. И., Красовский Н. Н., Филимонов Ю. М.* К задаче об успокоении линейной системы // ПММ. 1965. Т. 29. № 5. с. 828–834.

6. *Бондаренко В. И., Филимонов Ю. М.* О применении линейного программирования к экстремальным задачам теории управления // ПММ. 1968. Т. 32. № 1. с. 147–153.

7. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

8. *Дарьин А. Н.* Об управлении при двойном ограничении с зависимостью геометрического ограничения от интегрального // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. с. 21–29.

9. *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* Управление в условиях неопределенности при двойных ограничениях // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 11. с. 1474–1486.

10. *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* Нелинейный синтез управления при двойных ограничениях // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 11. с. 1476–1484.

11. *Демьянов В. Ф.* Минимакс: производные по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.

12. *Иванов Г. Е., Половинкин Е. С.* О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 10. с. 1641–1648.

13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 5-е изд., 1981.

14. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче преследования // ПММ. 1963. Т. 27. № 2. с. 244–254.

15. *Красовский Н. Н.* К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления // ПММ. 1965. Т. 29. № 2. с. 218–225.

16. *Красовский Н. Н.* К задаче преследования в случае линейных однотипных объектов // ПММ. 1966. Т. 30. № 2. с. 209–225.

17. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

18. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.

19. *Красовский Н. Н.* Минимаксное поглощение в игре сближения // ПММ. 1971. Т. 35. № 6. с. 945–951.

20. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения I // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1973. № 2. с. 3–18.

21. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения II // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1973. № 3. с. 22–41.

22. *Красовский Н. Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Математический сборник. 1978. Т. 107 (149). № 4 (12). с. 541–571.

23. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

24. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

25. *Красовский Н. Н., Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Минимаксная дифференциальная игра // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 2. с. 277–280.

26. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

27. *Куржанский А. Б.* Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 3. с. 491–494.

28. *Куржанский А. Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. Т. 224. с. 234–248.

29. *Куржанский А. Б., Мельников Н. Б.* О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби // Математический сборник. 2000. Т. 191. № 6. с. 69–100.

30. *Куржанский А. Б., Никонов О. И.* К задаче синтеза стратегий управления. Эволюционные уравнения и многозначное интегрирование // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311. № 4. с. 788–793.

31. *Куржанский А. Б., Никонов О. И.* Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Доклады РАН. 1993. Т. 333. № 4. с. 578–581.

32. *Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф.* Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Доклады АН СССР. 1986. Т. 289. № 1. с. 38–41.

33. *Ледяев Ю. С.* Регулярные дифференциальные игры со смешанными ограничениями на управления // Труды МИАН. 1985. Т. 167. с. 207–215.

34. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. Т. 5. с. 3–9.

35. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174. № 1. с. 27–29.

36. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

37. *Никольский М. С.* Нестационарные линейные дифференциальные игры // Вестник МГУ. Сер. матем., механика. 1969. № 3. с. 65–73.

38. *Никольский М. С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 6. с. 964–971.

39. *Никольский М. С.* Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Математический сборник. 1981. Т. 126 (158). № 1 (9). с. 136–144.

40. *Никольский М. С.* О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Математический сборник. 1985. Т. 128 (170). № 1 (9). с. 35–49.

41. *Половинкин Е. С.* Неавтономные дифференциальные игры // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 6. с. 1007–1017.

42. *Половинкин Е. С., Иванов Г. Е., Балашов М. В., Константинов Р. В., Хорев А. В.* Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 10. с. 95–122.

43. *Пономарев А. П.* Оценка погрешности численного метода построения альтернированного интеграла Понтрягина // Вестник МГУ. Сер. вычисл. матем. и киберн. 1978. Т. 4. с. 37–43.

44. *Пономарев А. П., Розов Н. Х.* Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестник МГУ. Сер. вычисл. матем. и киберн. 1978. Т. 1. с. 82–90.

45. *Пономарев А. П., Розов Н. Х.* О дифференцируемости опорной функции альтернированного интеграла // Математические заметки. 1981. Т. 30. № 6. с. 865–870.

46. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 5-е изд., 1982.

47. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх I // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. с. 1278–1280.

48. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх II // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. с. 910–912.

49. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). с. 307–330.

50. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

51. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

52. *Сансоне Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1953.

53. *Субботин А. И.* К задаче об игровой встрече движений // ПММ. 1967. Т. 31. № 5. с. 834–840.

54. *Субботин А. И.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 3. с. 552–555.

55. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.

56. *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М., И.: Институт компьютерных исследований, 2003.

57. *Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков // ПММ. 1975. Т. 39. № 3. с. 387–396.

58. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

59. *Субботина Н. Н.* Метод динамического программирования для класса локально-липшицевых систем // Доклады РАН. 2003. Т. 389. № 2. с. 1–4.

60. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

61. *Ушаков В. Н.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // ПММ. 1972. Т. 36. № 1. с. 15–23.

62. *Ушаков В. Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 4. с. 29–36.

63. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

64. *Черноусько Ф. Л., Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.

65. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued Analysis. Boston: Birkhäuser, 1990.

66. *Başar T., Bernhard P.* $H^\infty$ Optimal Control and Related Minimax Design Problems. SCFA. Boston: Birkhäuser, 2nd edition, 1995.

67. *Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L.* // Transactions of American Mathematical Society. 1984. V. 282. p. 487–502.

68. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of American Mathematical Society. 1983. V. 277. p. 1–41.

69. *Daryin A.* Nonlinear synthesis for uncertain systems with diverse types of constraints // Proc. NOLCOS-01. V. 2. IFAC, Elsevier Science, St. Petersburg, 2001.

70. *Fleming W. H.* The convergence problem for differential games // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1961. V. 3. p. 102–116.

71. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York: Springer Verlag, 1993.

72. *Krasovski N. N., Subbotin A. I.* Positional Differential Games. Springer Verlag, 1988.

73. *Kurzhanski A. B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.

74. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Internal approximation // Systems and Control Letters. 2000. V. 41. p. 201–211.

75. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Dynamic optimization for reachability problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2001. V. 108. N. 2. p. 227–251.

76. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization methods and software. 2002. V. 17. p. 177–237.

77. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On reachability under uncertainty // SIAM Journal on Control. 2002. V. 41. N. 1. p. 181–216.

78. *Ky F.* Minimax theorems // Proc. Nat. Acad. of Sci. USA. 1953. V. 39. N. 1. p. 42–47.

79. *Lions P.-L., Souganidis P. E.* Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaac's equations // SIAM Journal on Control an Optimization. 1995. V. 23. p. 566–583.

80. *Varaiya P., Lin J.* Existence of saddle points in differential games // SIAM Journal on Control an Optimization. 1969. V. 7. N. 1. p. 142–157.