Управление по неполным данным для систем с импульсными и быстрыми управлениями

А. Н. Дарьин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

3 июня 2010 года

Введение

- *Дарьин А. Н., Дигайлова И. А., Куржанский А. Б.* О задаче синтеза импульсных управлений по результатам измерений // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. 92–105.
- *Daryin A. N., Digailova I. A., Kurzhanski A. B.* Output feedback strategies for systems with impulsive and fast controls // Proceedings of 48th IEEE Conference on Decision and Control. P. 2801–2806. Shanghai, 2009.

Введение

Особенности задачи:

- Импульсные и быстрые управления
- Неполные данные
- Две модели наблюдения:
  - непрерывные наблюдения
  - пуассоновские наблюдения (коммуникационные ограничения)
- Системы высоких размерностей

Основные элементы **решения**

- Методы динамического программирования
- Выпуклый анализ
- Эллипсоидальное исчисление

Численное моделирование

Система управления:

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние.
- $U(t) \in BV[t_0, t_1]$ — импульсное управление.
- Конечный момент времени t_1 фиксирован.

Обобщённый **функционал** типа Майера–Больца:

$$J(u(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \to \inf$$

- Функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ выпуклая, замкнутая.

Уравнение наблюдения:

$$y(t) = H(t)x(t) + \xi(t).$$

Задача 1

Для данной терминальной функции $\varphi(\cdot)$ найти **синтез управлений** по результатам измерений, минимизирующий функционал $J(U(\cdot))$, несмотря на помеху $\xi(\cdot)$:

$$\mathscr{J}(U(\cdot)) = \max\{J(U(\cdot)) \mid x(\cdot)\},$$

по всем траекториям, совместным с поступившими измерениями.

Разделим систему на две части:

- одна с **неопределённостью**
- другая с **импульсами**.

$$x(t) = X(t,t_1)x_1(t) + X(t,t_1)x_2(t),$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0, \\ dx_2(t) = B(t)dU(t), \quad x_2(t_0) = 0, \end{cases}$$

$X(t,\tau)$ — фундаментальная матрица:
$\partial X(t,\tau)/\partial t = A(t)X(t,\tau)$, $X(\tau,\tau) = I$.

Новое **уравнение наблюдения**:

$$y_1(t) = H(t)X(t,t_1)x_1(t) + \xi(t) = y(t) - H(t)X(t,t_1)x_2(t).$$

Информационное состояние

Определение

Задача разбивается на две —

- гарантированное оценивание состояния
- синтез управлений в пространстве состояний

(см. *А. Б. Куржанский.* О синтезе управлений по результатам наблюдений // ПММ. 2004. Т. 68. № 4. С. 547–563.)

Информационное состояние: $\{t, \mathscr{X}_1[t], x_2(t)\}$

$\mathscr{X}_1[t]$ — информационное множество всех векторов $x_1(t)$, совместных с

- моделью системы
- доступными измерениями $y_1(s)$, $s \in [t_0, t]$, $t \leqslant t_1$,
- ограничением $\mathscr{Q}$ на помеху $\xi(\cdot)$.

$$\mathscr{X}_1[t] = \bigcap \{H^{-1}(t)\,(y_1^*(\tau) - \mathscr{Q}(\tau)) \mid \tau \in [t_0, t]\},$$

при данной реализации наблюдения $y_1^*(t)$ на интервале $t \in [t_0, t]$.

- **опорная функция**

$$\rho(\ell \mid \mathscr{X}_1[t]) = \inf_{\lambda(\cdot)} \Big\{ \int_{t_0}^{t} \big(\langle \lambda(\tau), y_1^*(\tau)\rangle + $$
$$+ \rho(-\lambda(\tau) \mid \mathscr{Q}(\tau))\big)\, d\tau \mid \psi(t) = \ell \Big\},$$

где строка ψ — решение системы $\dot{\psi} = \lambda(t)H(t)$, $\psi(t_0) = 0$.

- **эволюционное уравнение**:

$$\lim_{\sigma \to 0+0} \sigma^{-1} h\big(\mathscr{X}_1[t+\sigma], \mathscr{X}_1[t] \cap H^{-1}(t)(y_1^*(t) - \mathscr{Q}(t))\big) = 0.$$

(See A. B. Kurzhanski and T. F. Filippova, “On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control,” in *Advances in Nonlinear Dynamics and Control*, ser. PSCT. Boston: Birkhäuser, 1993, no. 17, pp. 122–188.)

Задача 2

Для данной позиции $\{t, \mathscr{X}_1, x_2\}$, $t \in [t_0, t_1]$ указать стратегию импульсного управления по неполным данным, минимизирующую функционал

$$\mathscr{J}(U(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) + \varphi(\mathscr{X}_1[t_1] + x_2(t_1+0)),$$

$$\varphi(\mathscr{X}) = \max\{\varphi(x) \mid x \in \mathscr{X}\},$$

каким бы ни было наблюдение $y_1(t)$.

Пусть $V(t,x;t_1,\varphi(\cdot))$ — **функция цены** в задаче импульсного управления с данной терминальной функцией $\varphi(x)$:

$$V(t,x;t_1,\varphi(\cdot)) = \min_{U(\cdot)}\Big\{\operatorname*{Var}_{[t,t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \;\Big|\; x(t)=x,\ dx = B(\tau)dU\Big\}.$$

(See A. N. Daryin, A. B. Kurzhanski, and A. V. Seleznev, "A dynamic programming approach to the impulse control synthesis problem," in *Proc. Joint 44th IEEE CDC-ECC 2005*. Seville: IEEE, 2005.)

Оценка функции цены $\mathscr{V}(t,\mathscr{X}_1,x_2)$ в задаче 2:

$$\mathscr{V}(t,\mathscr{X}_1,x_2) \leqslant V(t,0;t_1,\boldsymbol{\varphi}(\cdot)),$$
$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \max\{\varphi(x+z) \mid z \in \mathscr{X}_1 + x_2\}.$$

В частности, для $\varphi(x) = I(x \mid \mathscr{M})$: $\boldsymbol{\varphi}(x) = I(x \mid \mathscr{M} \dot{-} (\mathscr{X}_1 + x_2))$.

Функция цены $V(t,x;t_1,\varphi(\cdot))$ — решение вариационного неравенства типа **Гамильтона–Якоби–Беллмана**:

$$\min\{H_1(t,x,V_t,V_x),\ H_2(t,x,V_t,V_x)\} = 0,$$

с начальным условием $V(t_1,x) = V(t_1,x;t_1,\varphi(\cdot))$ и гамильтонианами

$$H_1(t,x,\xi_t,\xi_x) = \xi_t, \quad H_2(t,x,\xi_t,\xi_x) = \min\{\langle \xi_x, B(t)u\rangle + 1 \mid \|u\| = 1\}.$$

В позиции (t,x):

- либо $H_1 = 0$, и управление может быть выбрано $dU(t) = 0$,
- либо $H_1 > 0$, тогда обязательно $H_2 = 0$, и управление имеет импульс в направлении $-B'(t)V_x$.

Эллипсоидальная аппроксимация

Эллипсоид $\mathscr{E}(r, R)$ — выпуклое множество с опорной функцией

$$\rho(p \mid \mathscr{E}(r, R)) = \langle p, r \rangle + \langle p, Rp \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

- центр $r \in \mathbb{R}^n$
- матрица конфигурации $R \geqslant 0$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(See A. B. Kurzhanski and I. Vályi, *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, ser. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.)

Пусть множества $\mathscr{Q}(t)$ и $\mathscr{M}$ — эллипсоиды

$$\mathscr{Q}(t) = \mathscr{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathscr{M} = \mathscr{E}(m, M),$$

Заменим $\mathscr{X}_1[t]$ эллипсоидальной аппроксимацией $\mathscr{Y}_+(t) = \mathscr{E}\left(\eta(t), Y(t)\right)$

- дискретный аналог эволюционного уравнения
- внешняя аппроксимация пересечения двух эллипсоидов

(See L. Ros, A. Sabater, F. Thomas, "An ellipsoidal calculus based on propagation and fusion," *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 2002.)

$$Y(t+\Delta t) = \alpha Z^{-1}, \quad \eta(t+\Delta t) = Z^{-1}(\pi W_1 q_1 + (1-\pi) W_2 q_2),$$

$$Z = \pi W_1 + (1-\pi) W_2, \quad W_1 = Y^{-1}(t), \quad W_2 = H^T(t) Q^{-1}(t) H(t),$$

$$q_1 = \eta(t), \quad q_2 = H^{-1}(t)(y(t) - q(t)),$$

$$\alpha = 1 - \pi(1-\pi)\big\langle q_2 - q_1, W_2 Z^{-1} W_1 (q_2 - q_1)\big\rangle,$$

где π находится численно из

$$\alpha(\det Z)^2 \operatorname{tr}(Z^{-1}(W_1 - W_2)) - \eta(\det Z)^2 \big(2\langle \eta(t+\Delta t), W_1 q_1 - W_2 q_2\rangle + \langle \eta(t+\Delta t), (W_2 - W_1)\eta(t+\Delta t)\rangle - \langle q_1, W_1 q_1\rangle + \langle q_2, W_2 q_2\rangle\big) = 0.$$

Внутренняя аппроксимация $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \dot{-} \mathscr{Y}_+(t)$ равна $\mathscr{M}'_- = \mathscr{E}\left(m', M'\right)$

$$m' = m - \eta(t),$$

$$M' = \left(1 - \left(\frac{\langle \ell, M\ell \rangle}{\langle \ell, Y\ell \rangle}\right)^{\frac{1}{2}}\right) M + \left(1 - \left(\frac{\langle \ell, Y\ell \rangle}{\langle \ell, M\ell \rangle}\right)^{\frac{1}{2}}\right) Y.$$

Эллипсоид $\mathscr{E}\left(m', M'\right)$ используется как целевое множество:

$$\varphi^*(p) = \left\langle p, m' \right\rangle + \left\langle p, M'p \right\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Численные алгоритмы реализованы с помощью **Ellipsoidal Toolbox**. (See A. A. Kurzhanskiy and P. Varaiya, Ellipsoidal toolbox, `http://code.google.com/p/ellipsoids/`)

Коммуникационные ограничения

Пусть измерения поступают в дискретные моменты τ_i, имеющие пуассоновское распределение с параметром λ:

$$y(\tau_i) = Hx_1(\tau_i) + \xi(\tau_i), \quad i = \overline{1,k}, \quad t_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k \leqslant \vartheta$$

и помеха $\xi(\tau_i)$ равномерно распределена по множеству

$$\mathscr{Q} = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid |\eta_\ell| \leq \nu,\ \ell = \overline{1,n}\}.$$

Задача 3

Найти интервал времени длины $\vartheta - t_0$ и стратегию управления $U = U(t, \mathscr{X}_1, x_2)$, удовлетворяющую ограничению $\mathrm{Var}_{[t_0,\vartheta]}\, U(\cdot) \leq \mu$, такие, что задача

$$\min\{\|x_1(\vartheta) + x_2(\vartheta)\| \mid U\} \leq \gamma$$

при данном типе наблюдений будет разрешима с вероятностью $P^0 \geq 1 - \varepsilon$, при наперёд заданных γ, $\varepsilon > 0$.

Задача 3 разделяется на две подзадачи:

- ***Задача 3-I:*** найти ϑ, при котором $\mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq \gamma\mathscr{C}(0) + x_1^*$ для некоторого x_1^* с вероятностью P^0, при заданных γ, ε ($\mathscr{C}(0)$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле).
- *Задача 3-II:* найти управление, для которого $x_2(\vartheta) = -x_1^*$.

Поскольку неизвестный вектор $x_1(t) = c = \mathrm{const}$, и $\mathscr{Q} = -\mathscr{Q}$, получаем

$$c \in \bigcap \{H^{-1}(y(t_i) + \mathscr{Q}) \mid i = 1, \dots, k\} = c^* + \mathscr{R}(k, \vartheta),$$

$$\mathscr{R}(k, \vartheta) = \bigcap \{H^{-1}(\xi^*(t_i) + \mathscr{Q}) \mid i = 1, \dots, k\}, \ \vartheta > t_k,$$

где $\xi^*(t_i)$ — реализация $\xi(t_i)$, $\mathscr{R}(k, \vartheta)$ — ошибка наблюдения после k измерений, и c^* — реализовавшийся вектор c.

? — с какой вероятностью $\mathscr{R}(k, \vartheta) \subseteq \gamma\mathscr{C}(0)$?
Если $\xi(t_i)$ пройдёт в малых окрестностях $\mathscr{D}(v_m, \sigma)$ всех 2^n вершин v_m, $m = \overline{1, 2^n}$, то $\mathscr{R}(k, \vartheta) \subset \mathscr{D}(0, \sigma)$ и объём $V_{\mathscr{R}}(k, \vartheta)$ множества $\mathscr{R}(k, \vartheta)$ устремится к нулю при $\sigma \to 0$

$$V_{\mathscr{R}}(k, \vartheta) \leq (2\sigma)^n \to 0.$$

(See A. B. Kurzhanski, “Identification: a theory of guaranteed estimates,” in *From Data to Model*, J. C. Willems, Ed. Springer, 1989, pp. 135–214.)

Коммуникационные ограничения

То же верно для любых $n+1$ вершин v_j, образующих симплекс. Вероятность такого события

$$P(\sigma, k) = (1-(1-\sigma^n \nu^{-n})^k)^{n+1} \to 1 \quad \forall \sigma > 0.$$

Выберем $\sigma = \sigma^0$, так что $\mathscr{R}(k, \vartheta) \subseteq \gamma \mathscr{C}(0)$, и число $k = k^0$, так что $P(\sigma^0, k^0) \geq 1 - \delta$. Тогда $\mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq x_1^*(\vartheta) + \mathscr{D}(0, \sigma^0)$ для некоторого $x_1^*(\vartheta)$ из уравнения

$$\rho(\ell \mid \mathscr{X}_1[\tau_k]) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{k} \Big\langle \ell^{(i)}, y^*(\tau_i) \Big\rangle + \rho(-\ell^{(i)} \mid \mathscr{Q}) \;\Big|\; \ell^{(i)} \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1,k}, \sum_{i=1}^{k} \ell^{(i)} = \ell \Big\}.$$

Коммуникационные ограничения

Вероятность $P(k, \vartheta - t_0)$ поступления k измерений на $[t_0, \vartheta]$

$$P(k, \vartheta - t_0) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda(\vartheta - t_0))^j}{j!} \exp(-\lambda(\vartheta - t_0)) \to 1 \quad \forall k.$$

Интервал наблюдений $[t_0, \vartheta^0]$, обеспечивающий $P^0 \geq 1 - \varepsilon$, определяется из

$$P^0 = P(k^0, \vartheta - t_0) P(\sigma^0, k^0) \geqslant P(k^0, \vartheta^0 - t_0)(1 - \delta) \geq 1 - \varepsilon.$$

Наконец, для $\delta = \varepsilon/2$ число ϑ^0 определяем из

$$P(k^0, \vartheta^0 - t_0) \geqslant 2(1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon)^{-1}.$$

Коммуникационные ограничения

Теорема

Задача 3 разрешима на интервале длины не менее $\vartheta^0 - t_0$, с достаточно большим ограничением μ на управление U для обеспечения равенства $x_2(\vartheta^0) = -x_1^*(\vartheta)$.

Теорема

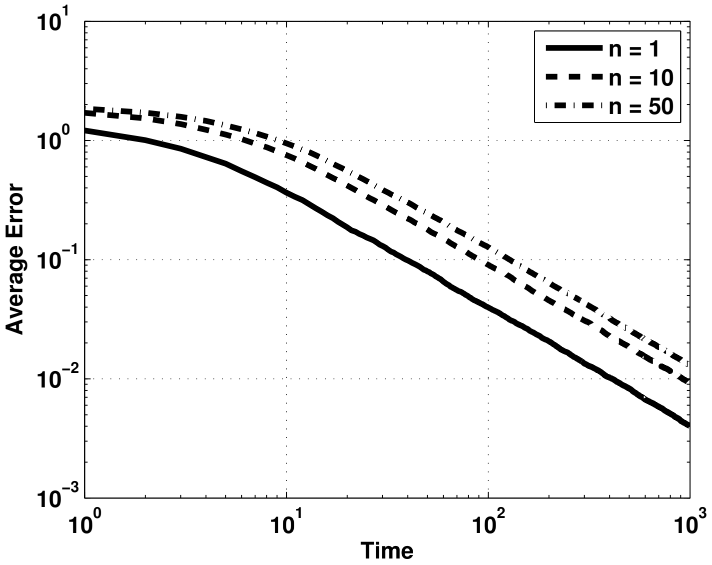
Для любой начальной позиции $\{t_0, x^0\}$ с изначально неизвестным x^0 существует конечное время $T = \vartheta^0 - t_0$, для которого начало координат $\{0\}$ достижимо с вероятностью 1 при достаточно большом μ.

Замечание

Изложенная схема допускает распространение на нестационарные системы (например, на периодические)

$$H(t) = HX(t_0, t)x, \quad B(t) = X(t_0, t)B.$$

Численные результаты



Список литературы

W. M. Wonham, “On the separation theorem of stochastic control,” *SIAM Journal on Control*, vol. 6, no. 2, pp. 312–326, 1968.

T. Basar and P. Bernhard, *H^∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems*, 2nd ed., ser. SCFA. Basel: Birkhäuser, 1995.

A. N. Krasovskii and N. N. Krasovskii, *Control Under Lack of Information*. Boston: Birkhäuser, 1995.

A. B. Kurzhanski, “The problem of measurement feedback control,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2004.

M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, and E. Walter, Eds., *Bounding Approach to System Identification*. London: Plenum Press, 1996.

A. B. Kurzhanski, *Control and Observation under Uncertainty*. Moscow, Nauka, 1977.

M. R. James and J. S. Baras, “Partially observed differential games, infinite-dimensional Hamilton–Jacobi–Isaacs equations and nonlinear H^∞ control,” *SIAM J. Control & Optim.*, 1996.

A. Bensoussan and J.-L. Lions, *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles*. Paris: Dunod, 1982.

Список литературы

- A. B. Kurzhanski and A. N. Daryin, "Dynamic programming for impulse controls," *Annual Reviews in Control*, vol. 32, pp. 213–227, 2008.
- A. N. Daryin and A. B. Kurzhanski, "Impulse control inputs and the theory of fast controls," in *Proc. 17th IFAC Congress*. Seoul: IFAC, 2008.
- R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970.
- A. B. Kurzhanski and T. F. Filippova, "On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control," in *Advances in Nonlinear Dynamics and Control*, ser. PSCT. Boston: Birkhäuser, 1993, no. 17, pp. 122–188.
- A. N. Daryin, A. B. Kurzhanski, and A. V. Seleznev, "A dynamic programming approach to the impulse control synthesis problem," in *Proc. Joint 44th IEEE CDC-ECC 2005*. Seville: IEEE, 2005.
- N. N. Krasovski, "On a problem of optimal regulation," *Prikl. Math. & Mech.*, vol. 21, no. 5, pp. 670–677, 1957, in Russian.
- L. W. Neustadt, "Optimization, a moment problem and nonlinear programming," *SIAM Journal on Control*, vol. 2, no. 1, pp. 33–53, 1964.

Список литературы

- L. Schwartz, *Théorie des distributions*. Paris: Hermann, 1950.
- I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized Functions*. N.Y.: Academic Press, 1964.
- A. B. Kurzhanski and I. Vályi, *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, ser. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.
- A. A. Kurzhanskiy and P. Varaiya, “Ellipsoidal toolbox,” `http://code.google.com/p/ellipsoids/`, 2005.
- L. Ros, A. Sabater, and F. Thomas, “An ellipsoidal calculus based on propagation and fusion,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 32, no. 4, 202.
- A. B. Kurzhanski, “Identification: a theory of guaranteed estimates,” in *From Data to Model*, J. C. Willems, Ed. Springer, 1989, pp. 135–214.