

**О синтезе управлений
при неоднотипных классах
управлений и возмущений**

Дарьин Александр

Постановка задачи

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Геометрическое ограничение на управление:

$$u(t) \in P(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

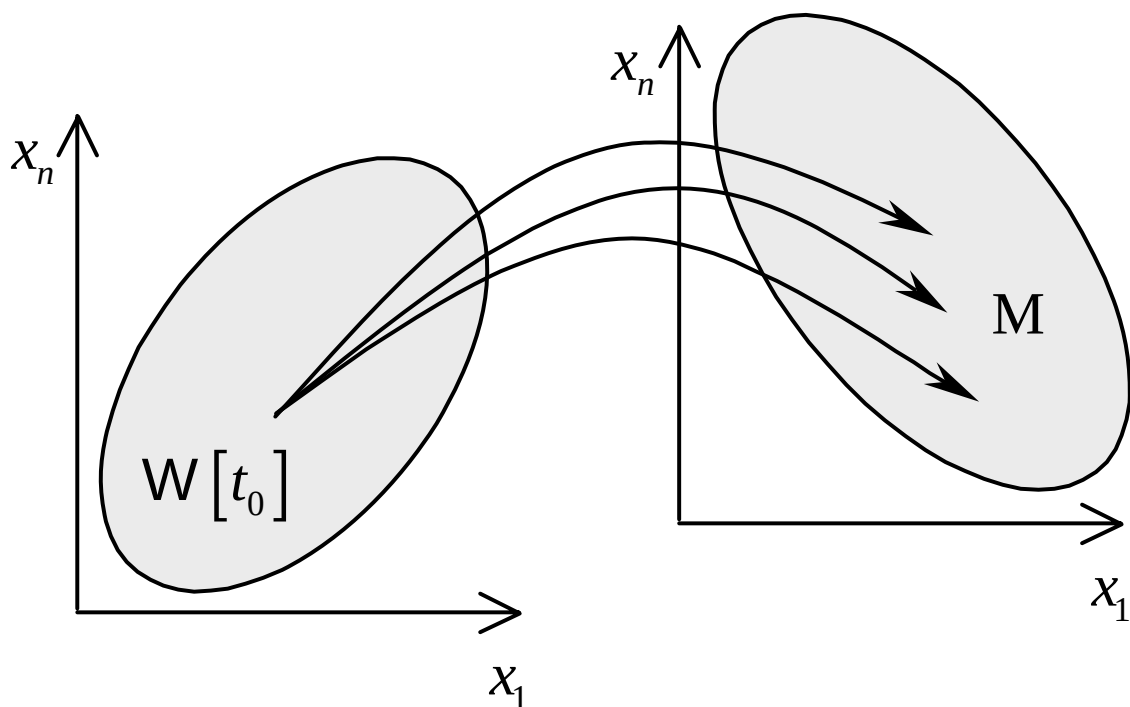
Интегральное ограничение на помеху:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|v(t)\|^2 dt \leq \mu$$

Классы управлений:

1. U_{OL} — программные управления
2. U_{CL} — позиционные стратегии с памятью:

$$u(t) \in U(t, x(\cdot), u(\cdot))$$



Эквивалентная постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) + v(t), \\ \dot{k}(t) = -\|v(t)\|^2 \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Ограничение на управление:

$$u(t) \in P(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

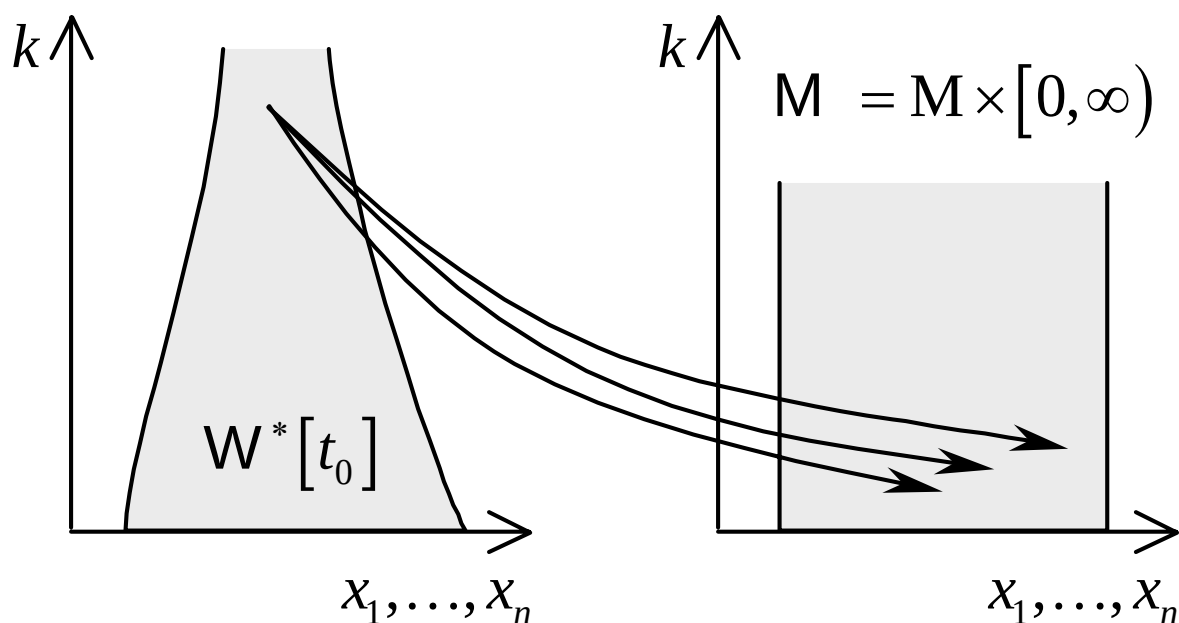
Фазовое ограничение:

$$k(t_1) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{k(t_0)}_{=\mu} - \int_{t_0}^{t_1} \|v(t)\|^2 dt \geq 0$$

Классы управлений:

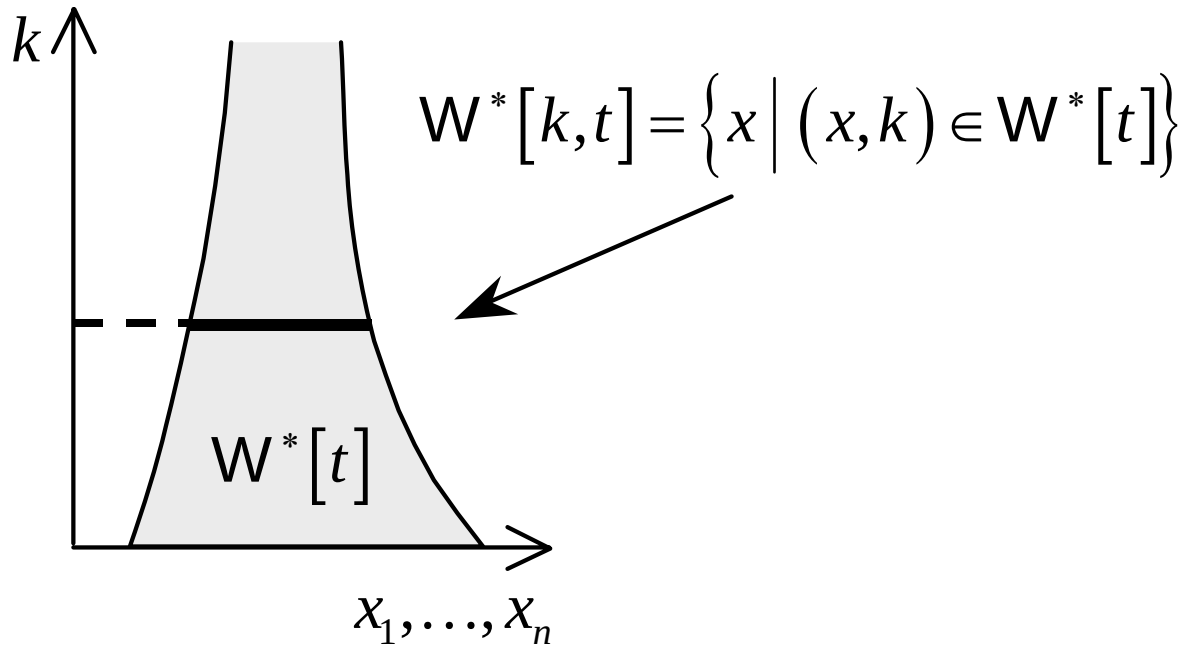
1. U_{OL} — программные управления
2. $U_{CL,k}$ — позиционные стратегии управления:

$$u(t) \in U(t, x(t), k(t))$$



Сечения множества разрешимости и целевого множества

Сечения множества разрешимости



Сечения целевого множества

$$M(k) = \{x \mid (x, k) \in M\}$$

Альтернированный интеграл

**Максиминное множество разрешимости
в классе программных управлений**

$$W^+[k, t] = \bigcap_{0 \leq \gamma \leq k} \left(M(\gamma) - \int_t^{t_1} P(\tau) d\tau \right) \div \sqrt{(t_1 - t)(k - \gamma)} B_1$$

(*) То же самое для геометрических ограничений

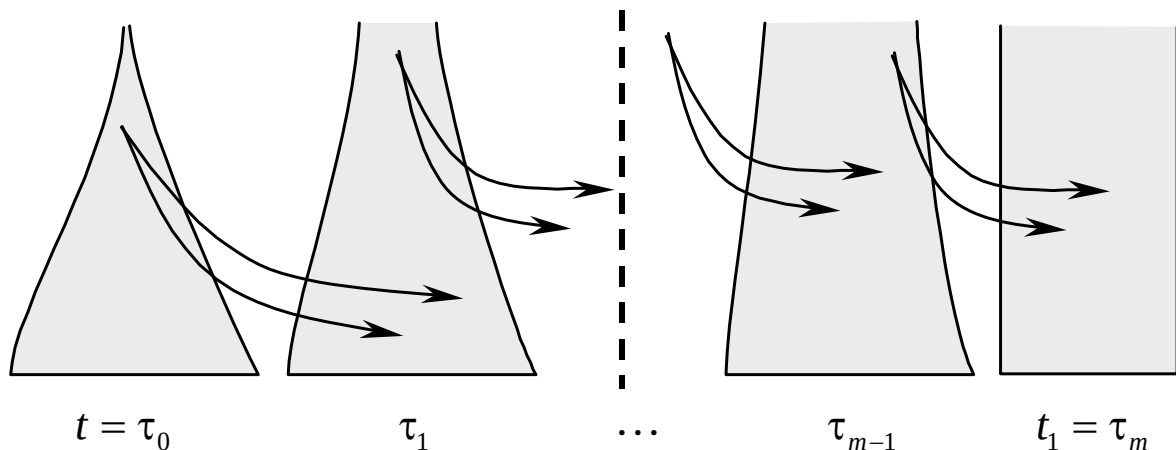
$$W^+[t] = \left(M - \int_t^{t_1} P(\tau) d\tau \right) \div \int_t^{t_1} Q(\tau) d\tau$$

Верхние интегральные суммы

$$T : t = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{m-1} < \tau_m = t_1$$

$$I^+(k, \tau_m, T) = M(k)$$

$$I^+(k, \tau_{i-1}, T) = \bigcap_{0 \leq \gamma \leq k} \left(I^+(\gamma, \tau_i, T) - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} P(\tau) d\tau \right) \div \sqrt{(\tau_i - \tau_{i-1})(k - \gamma)} B_1$$



Альтернированный интеграл (продолжение)

Верхний альтернированный интеграл

$$\lim_{\text{diam } T \rightarrow 0} h\left(l^+(k,t,T), l^+(k,t)\right) = 0$$

Эволюционное уравнение

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \max_{0 \leq \gamma \leq k} h_+\left(l^+(k,t) + \sqrt{\sigma(k-\gamma)}, l^+(\gamma,t) - \sigma P(t)\right) = 0$$

Альтернированный интеграл

$$l(k,t) = l^+(k,t) = l^-(k,t) = W^*[k,t]$$

Функция цены

$$V(t, x, k) = \min_{u(\cdot, \cdot, \cdot)} \max_{v(\cdot)} \left\{ d^2 \left(x(t_1, M(k(t_1))) \right) \left| \begin{array}{l} k(t_1) \geq 0 \\ x(t) = x \\ k(t) = k \end{array} \right. \right\}$$
$$W^*[t, k] = \{x \mid V(t, x, k) \leq 0\}$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in P(t)} \max_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, u + v \right\rangle - \|v\|^2 \frac{\partial V}{\partial k} \right\} = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in P(t)} \left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, u \right\rangle \Big|_{k=0} = 0$$
$$V(t_1, x, k) = d^2(x, M(k))$$

Полугрупповое свойство

$$V(t, x, k; V(t_1, \cdot, \cdot)) = V(t, x, k; V(\tau, \cdot, \cdot; V(t_1, \cdot, \cdot)))$$
$$V(t_1, x, k) = d^2(x, M(k))$$

Синтез управления через функцию цены

$$U^*(t, x, k) = \text{Arg min} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, u \right\rangle \left| u \in P(t) \right. \right\}$$

Синтез управления через множество разрешимости

Оценка для функции цены

$$V(t, x, k) \leq d^2(x, W^*[k, t])$$

Неравенство для расстояния до множества разрешимости

$$H(t, x, k) = d^2(x, W^*[t, k])$$

или

$$H(t, x, k) = d^2(x, l^-[t, k])$$

$$\begin{aligned} & \min_{u \in P(t)} \max_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{dH(t, x(t), k(t))}{dt} = \\ & = \frac{\partial H}{\partial t} + \min_{u \in P(t)} \max_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, u + v \right\rangle - \|v\|^2 \frac{\partial H}{\partial k} \right\} \leq 0 \end{aligned}$$

Синтез управления

$$U^0(t, x, k) = \text{Arg min} \left\{ \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, u \right\rangle \mid u \in P(t) \right\}$$

Задача с интегральным ограничением на управление и геометрическим ограничением на помеху

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) + v(t) & k(t_1) \geq 0 \\ \dot{k}(t) = -\|u(t)\|^2 & v(t) \in Q(t) \end{cases}$$

Эволюционное уравнение для множества разрешимости

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} h\left(W^*[k, t - \sigma] + \sigma Q(t), \bigcup_{0 \leq \gamma \leq k} W^*[\gamma, t] - \sqrt{\sigma(k - \gamma)} B_1\right) = 0$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathbb{R}^n} \max_{v \in Q(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, u + v \right\rangle - \|u\|^2 \frac{\partial V}{\partial k} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{v \in Q(t)} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, v \right\rangle \Big|_{k=0} = 0$$

$$V(t_1, x, k) = d^2(x, M(k))$$

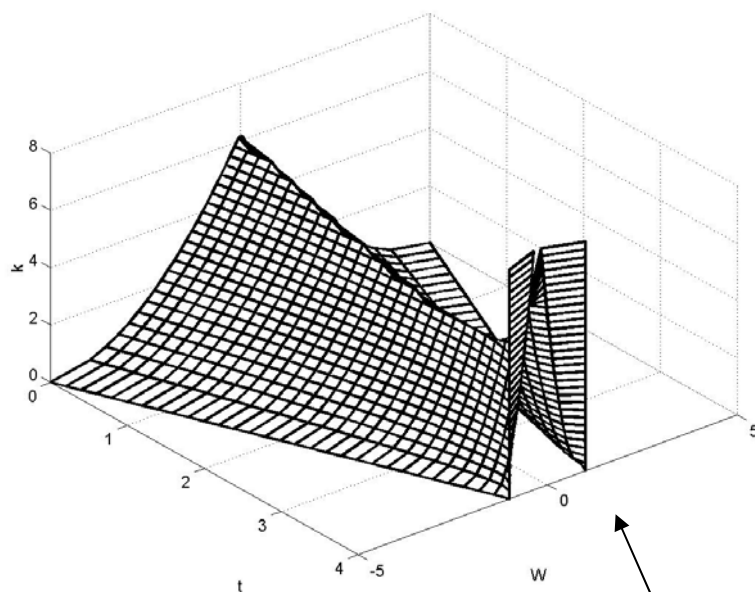
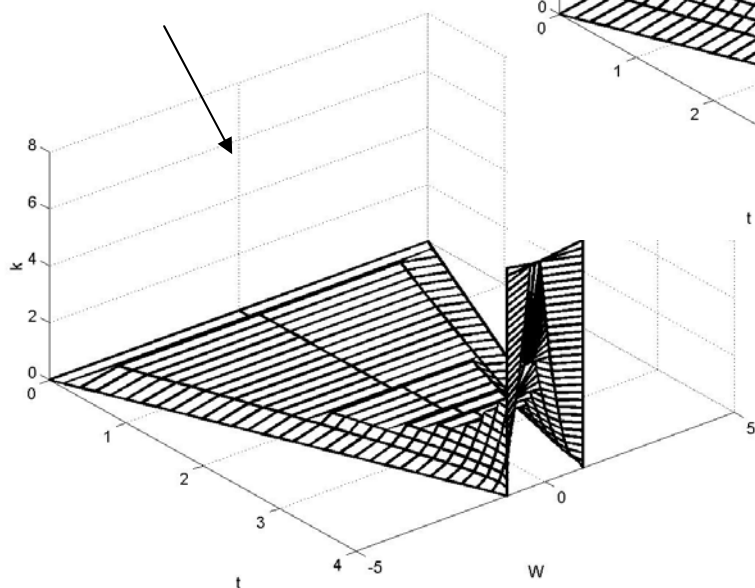
Синтез управления

$$U^*(t, x, k) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & x \in W^*[k, t], \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial k} \right)^{-1} \frac{\partial V}{\partial x}, & x \notin W^*[k, t] \end{cases}$$

$$V(t, x, k) = d^2(x, W^*[k, t])$$

Множество разрешимости в одномерном случае

Минимаксное



Максиминное

**В классе
позиционных стратегий**

