Семинар

03.03.2021

Задача 1

При каких значениях параметра в игре не будет равновесий по Нэшу?

$$\begin{pmatrix} (4,6) & (1,3) & (a,7) \\ (5,1) & (7,0) & (2,3) \\ (3,2) & (4,5) & (3,4) \end{pmatrix}$$

Игра в нормальной форме

$$\Gamma = \left\{ N, \left\{ X_i \right\}_{i \in N}, \left\{ u_i\left(x_i, x_{-i} \right) \right\}_{i \in N} \right\},$$

$$N = \left\{ 1, \ldots, n \right\}$$

$$\forall i \in N \;\; x_i \in X_i;$$

$$\hat{x} = \left(x_1, \ldots, x_n \right) \in X = X_1 \times \ldots \times X_n$$

$$x_{-i} = \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \right) \in X_{-i} = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \ldots \times X_n$$

$$\widehat{x} = \left(x_i, x_{-i} \right)$$

Определение равновесия по Нэшу

Исход игры $x^* = \left(x_1^*, ..., x_n^*\right) \in X$ называется равновесием по Нэшу, если

$$\forall i \in N \ \forall x_i \in X_i \ u_i\left(x_i^*, x_{-i}^*\right) \geq u_i\left(x_i, x_{-i}^*\right),$$

$$x_{-i}^* = \left(x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, ..., x_n^*\right).$$

Биматричная игра

Игра двух игроков $n = 2,$ в которой у каждого игрока конечное число стратегий

$$X_1 = \{1, \ldots, m\}, X_2 = \{1, \ldots, k\}.$$

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \ldots & (a_{1k}, b_{1k}) \\ . & . & . \\ (a_{m1}, b_{m1}) & \ldots & (a_{mk}, b_{mk}) \end{pmatrix}.$$

Ответ

Равновесием по Нэшу может быть только исход с выигрышами $(a, 7)$.

Ответ: $a < 3$.

Задача 9

Пользуясь теоремой Какутани, доказать лемму Гейла-Никайдо-Дебре.

Теорема Какутани

Пусть K выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и многозначное отображение $D : K \to 2^K$ слабо полунепрерывно сверху, $\forall x \in K \;\; D(x)$ непустое, выпуклое, замкнутое множество. Тогда $\exists \hat{x} \in K$ такой, что $\hat{x} \in D(\hat{x})$.

Теорема Какутани

Пусть K выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и многозначное отображение $D: K \to 2^K$ полунепрерывно сверху, $\forall x \in K$ $D(x)$ непустое, выпуклое, замкнутое множество. Тогда $\exists \hat{x} \in K$ такой, что $\hat{x} \in D(\hat{x})$.

Полунепрерывное сверху отображение

Пусть X и Y топологические пространства, $f : X \to 2^Y$ многозначное отображение. Будем говорить, что f полунепрерывно сверху в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $U \supset f(x_0)$ существует открытое множество $V, x_0 \in V$ такое, что

$$\forall x \in V \; f(x) \subset U.$$

Предложение

Всякое полунепрерывное сверху отображение $f:\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ является слабо полунепрерывным сверху.

Доказательство.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \left\|x - x_0\right\| < \delta \Rightarrow f\left(x\right) \subset f\left(x_0\right) + \varepsilon B,$$

где $B = \left\{y \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \left\|y\right\| < 1\right\}$. Тогда $\forall p \in \mathbb{R}^m$

$$\rho\left(f\left(x\right), p\right) \le \rho\left(f\left(x_0\right) + \varepsilon B, p\right) \le \rho\left(f\left(x_0\right), p\right) + \varepsilon\left\|p\right\|.$$

Теорема Гейла-Никайдо-Дебре

Пусть $C : M_n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ многозначное отображение с непустыми значениями. Если

1. C слабо полунепрерывно сверху;
2. $\forall x \in M_n$ множество $C(x) - \mathbb{R}^n_+$ выпуклое замкнутое множество;
3. $\forall x \in M_n \quad \rho\big(C(x), x\big) \geq 0$ (закон Вальраса),

то $\exists x^* \in M_n$, такой, что $C(x^*) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing$.

Теорема Гейла-Никайдо-Дебре

Пусть $C : M_n \to 2^{\Gamma}$ многозначное отображение с непустыми значениями, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ компакт. Если

1. C полунепрерывно сверху;
2. $\forall x \in M_n$ множество $C(x)$ выпуклое замкнутое множество;
3. $\forall x \in M_n \; \forall u \in C(x) \; (u, x) \geq 0$ (закон Вальраса),

то $\exists x^* \in M_n$,такой, что $C(x^*) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing$.

Доказательство

Пусть $\Gamma = \mathrm{conv}\Gamma.$ Рассмотрим отображение

$$\theta : \Gamma \times M_n \to M_n, \theta = \left(\theta_1, \ldots, \theta_n\right),$$

$$u = \left(u_1, \ldots, u_n\right) \in \Gamma, p = \left(p_1, \ldots, p_n\right) \in M_n,$$

$$\theta_j\left(u, p\right) = \frac{p_j + \max\left(0, -u_j\right)}{1 + \sum_{i=1}^{n} \max\left(0, -u_i\right)}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Отображение $f = C \times \theta : \Gamma \times M_n \to 2^{\Gamma \times M_n}, f\left(u, p\right) = C\left(u\right) \times \theta\left(u, p\right)$ полунепрерывно сверху с непустыми, выпуклыми, замкнутыми значениями.

Доказательство

По теореме Какутани существуют $u^* \in \operatorname{conv}\Gamma, p^* \in M_n$ такие, что $u^* \in C(p^*), \theta(u^*, p^*) = p^*.$

Для завершения доказательства достаточно показать, что $u^* \in \mathbb{R}^n_+.$

Имеем, что

$$p_j^* = \frac{p_j^* + \max(0, -u_j^*)}{1 + \sum_{i=1}^{n} \max(0, -u_i^*)}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство

Откуда

$$p_j^* \sum_{i=1}^{n} \max\left(0, -u_i^*\right) = \max\left(0, -u_j^*\right),\ j = 1, \ldots, n.$$

Умножая на u_j^* обе части равенства и суммируя по j, получаем, что

$$\left(p^*, u^*\right) \sum_{i=1}^{n} \max\left(0, -u_i^*\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j^* \max\left(0, -u_j^*\right).$$

Доказательство

Учитывая тождество $t \max(0,t) = \left(\max(0,t)\right)^2$,

получаем, что

$$-\left(p^*, u^*\right)\sum_{i=1}^{n}\max\left(0,-u_i^*\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\max\left(0,-u_j^*\right)\right)^2.$$

Поскольку $u^* \in C\left(p^*\right)$, из закона Вальраса получаем, что $\left(p^*, u^*\right) \geq 0.$ Следовательно,

$$\max\left(0,-u_i^*\right) = 0,\ i = 1,\ldots,n.$$

Доказательство

Тогда

$$-u_j^* \le \max\left(0, -u_j^*\right) = 0,\ j = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow u^* \in C\left(p^*\right) \bigcap \mathbb{R}_+^n.$$

Задача 10

Пользуясь леммой Гейла-Никайдо-Дебре, получить как следствие теорему Брауэра.

Теорема Брауэра

Пусть $M_n = \left\{ x = \left(x_1, \ldots, x_n \right) \geq 0 \middle| \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\}$ и $f : M_n \to M_n$ непрерывное отображение. Тогда существует $x^* \in M_n$, такой, что $f\left(x^* \right) = x^*$.

Решение

Пусть $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \geq 0, \sum_{j=1}^{n} f_j(x) = 1.$

Положим

$$C(x) = (C_1(x), \dots, C_n(x)),$$

$$C_j(x) = \frac{(f(x), x)}{(x, x)} x_j - f_j(x), \ j = 1, \dots, n.$$

Тогда $C(x)$ однозначная непрерывная функция. Кроме того, $(C(x), x) \equiv 0.$

Решение

По теореме Гейла-Никайдо-Дебре существует $x^* \in M_n$ такой, что $C\left(x^*\right) \geq 0,$ то есть

$$C_j\left(x^*\right) = \frac{\left(f\left(x^*\right), x^*\right)}{\left(x^*, x^*\right)} x_j^* - f_j\left(x^*\right) \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку $x^* \geq 0, \left(C\left(x^*\right), x^*\right) = 0,$ получаем, то

$$x_j^* C_j\left(x^*\right) = x_j^* \left(\frac{\left(f\left(x^*\right), x^*\right)}{\left(x^*, x^*\right)} x_j^* - f_j\left(x^*\right) \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Решение

Откуда если $x_j^* > 0,$ то

$$\frac{\left(f\left(x^*\right), x^*\right)}{\left(x^*, x^*\right)} x_j^* = f_j\left(x^*\right).$$

Если же $x_j^* = 0,$ то

$$0 = \frac{\left(f\left(x^*\right), x^*\right)}{\left(x^*, x^*\right)} x_j^* \geq f_j\left(x^*\right) \geq 0.$$

Решение

Таким образом,

$$\frac{\left(f\left(x^*\right), x^*\right)}{\left(x^*, x^*\right)} x_j^* = f_j\left(x^*\right),\ j = 1, \ldots, n.$$

Суммируя по j и учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1, \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x^*\right) = 1,$$

получаем, что $\dfrac{\left(f\left(x^*\right), x^*\right)}{\left(x^*, x^*\right)} = 1 \Rightarrow f\left(x^*\right) = x^*.$

Задача 11

Пользуясь теоремой Брауэра, получить как следствие лемму Кнастера-Куратовского-Мазуркевича.

Лемма Кнастера-Куратовского-Мазуркевича

Пусть $\left\{F_j \,\middle|\, j=1,\dots,n\right\}$ семейство замкнутых подмножеств стандартного симплекса M_n такое, что $\forall T \subset \{1,\dots,n\}$ справедливо, что

$$K_T = \left\{x = (x_1,\dots,x_n) \in M_n \,\middle|\, x_j = 0 \text{ при } j \notin T\right\} \subset \bigcup_{j\in T} F_j.$$

Тогда

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_j \neq \varnothing.$$

Решение

Допустим противное, что $\bigcap_{j=1}^{n} F_j = \varnothing$.

Тогда множества $\left\{ V_j = \mathbb{R}^n \setminus F_j \,\middle|\, j = 1,\dots,n \right\}$ образуют открытое покрытие M_n. Пусть $\left\{ f_j(x) \,\middle|\, j = 1,\dots,n \right\}$ непрерывное разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию

$$\left\{ V_j = \mathbb{R}^n \setminus F_j \,\middle|\, j = 1,\dots,n \right\}.$$

Решение

Тогда $f(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_n(x)\right) : M_n \to M_n$ непрерывное отображение. По теореме Брауэра существует неподвижная точка

$$x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) \in M_n, f_j\left(x^*\right) = x_j^*, j = 1, \ldots, n.$$

Положим $T = \left\{ j \middle| x_j^* > 0 \right\}$. По построению $x^* \in K_T$.

Если $j \in T$, то $0 < x_j^* = f_j\left(x^*\right) \Rightarrow x^* \in V_j \Rightarrow x^* \notin F_j$.

Следовательно, $x^* \notin \bigcup\limits_{j \in T} F_j \Rightarrow K_T \not\subset \bigcup\limits_{j \in T} F_j$. Противоречие.