Введение в эргодическую теории
Лекция 6

А.А.Шананин

Проблемы классификации

Определение. Будем говорить, что измеримые пространства $\{M_1, \Sigma_1, \mu_1\}$ и $\{M_2, \Sigma_2, \mu_2\}$, изоморфны, если существуют отображения $\varphi : M_1 \to M_2$ и $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ такие, что

1. $\varphi^{-1} \circ \varphi(x) = x$ п.в.(по мере μ_1);
2. $\varphi \circ \varphi^{-1}(y) = y$ п.в.(по мере μ_2);
3. $\forall A \in \Sigma_2 \;\; \varphi^{-1}(A) \in \Sigma_1, \; \mu_1\left(\varphi^{-1}(A)\right) = \mu_2(A)$;
4. $\forall B \in \Sigma_1 \;\; \varphi(B) \in \Sigma_2, \; \mu_2\left(\varphi(B)\right) = \mu_1(B)$.

Изоморфизм абстрактных динамических систем

Определение. Будем говорить, что абстрактные динамические системы $\{M_1, \Sigma_1, \mu_1, T_1\}$ и $\{M_2, \Sigma_2, \mu_2, T_2\}$ изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi : M_1 \to M_2$ измеримых пространств $\{M_1, \Sigma_1, \mu_1\}$ и $\{M_2, \Sigma_2, \mu_2\}$, такой что для п.в. (по мере μ_1) $\varphi \circ T_1(x) = T_2 \circ \varphi(x)$.

Коммутативность диаграммы

P.S.

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "T_1"] & M_2 \arrow[d, "T_2"] \\
M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2
\end{tikzcd}
$$

Изоморфизм «преобразования пекаря» и $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Пусть $F: R^2/Z^2 \to R^2/Z^2,$

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(2x,\dfrac{y}{2}\right), \text{ если } 0\le x<\dfrac{1}{2};\\ \left(\{2x\},\dfrac{y+1}{2}\right), \text{ если } \dfrac{1}{2}\le x<1.\end{cases}$$

Динамическая система $\{R^2/Z^2, \Lambda, \lambda, F\}$

называется «преобразованием пекаря».

Пусть

$$\omega=(\ldots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\ldots),\omega_j\in\{0,1\}\ j\in Z;\varphi(\omega)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\omega_j}{2^{j+1}},\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_{-k}}{2^k}\right).$$

Отображение φ сохраняет меру

Рассмотрим цилиндр $C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{n_1,\ldots,n_k}, \mu_2\left(C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{n_1,\ldots,n_k}\right) = \dfrac{1}{2^k}.$

$\varphi\left(C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{n_1,\ldots,n_k}\right) = \bigcap_{j=1}^{k} \varphi\left(C_{\alpha_j}^{n_j}\right),$ где

$$\varphi\left(C_{\alpha_j}^{n_j}\right) = \begin{cases} \left\{(x,y) \middle| x \in [0,1), y \in [0,1), \dfrac{\alpha_j}{2} \le \left\{2^j x\right\} < \dfrac{\alpha_j + 1}{2}\right\}, & \text{если } n_j \ge 0; \\ \left\{(x,y) \middle| x \in [0,1), y \in [0,1) \dfrac{\alpha_j}{2} \le \left\{2^{-j-1} y\right\} < \dfrac{\alpha_j + 1}{2}\right\}, & \text{если } n_j < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu\left(\varphi\left(C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{n_1,\ldots,n_k}\right)\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{k} \varphi\left(C_{\alpha_j}^{n_j}\right)\right) = \prod_{j=1}^{k} \mu\left(\varphi\left(C_{\alpha_j}^{n_j}\right)\right) = \frac{1}{2^k}.$$

Коммутативность диаграммы

Пусть $\omega=(\ldots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\ldots),\omega_j\in\{0,1\}\ j\in Z;\varphi(\omega)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\omega_j}{2^{j+1}},\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_{-k}}{2^k}\right).$

Тогда

$$F(\varphi(\omega))=\begin{cases}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega_j}{2^j},\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_{-k}}{2^{k+1}}\right), \text{ если } \omega_0=0,\\ \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega_j}{2^j},\frac{\omega_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_{-k}}{2^{k+1}}\right), \text{ если } \omega_0=1,\end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(F(\varphi(\omega)))=\hat{\omega}=(\ldots,\hat{\omega}_{-1},\hat{\omega}_0,\hat{\omega}_1,\ldots),\hat{\omega}_j=\omega_{j+1}\ j\in Z\Rightarrow\varphi^{-1}(F(\varphi(\omega)))=\sigma_2(\omega).$$

Пример Мешалкина

Изоморфизм двух схем Бернулли $B\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. Положим

$$\varphi:\Omega_5\to\Omega_4,\ \forall\omega=\left(\dots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\dots\right)\in\Omega_5\ \ \varphi\left(\omega\right)=\hat{\omega}=\left(\dots,\hat{\omega}_{-1},\hat{\omega}_0,\hat{\omega}_1,\dots\right),$$

$$\varphi\left(\omega\right)_n=\hat{\omega}_n=\begin{cases}0, & \text{если } \omega_n\in\left\{0,1\right\};\\ 1, & \text{если } \omega_n\in\left\{2,3\right\};\\ 2, & \text{если } \omega_n=4,\omega_{t(n)}\in\left\{0,2\right\};\\ 3, & \text{если } \omega_n=4,\omega_{t(n)}\in\left\{1,3\right\};\end{cases}$$

здесь $t\left(n\right)>n$ наименьше число, такое что

$$\left|\left\{j\,\middle|\,n\le j\le t\left(n\right),\omega_j=4\right\}\right|=\left|\left\{j\,\middle|\,n\le j\le t\left(n\right),\omega_j\ne4\right\}\right|.$$

Задача о разорении

Для п.в. ω функция $t(n)$ определена. Обозначим $P(\tau)$ вероятность разорения при игре в «орлянку» с начальным капиталом τ. Тогда

$$0 \le P(\tau) \le 1, P(0) = 1,$$

$$P(\tau) = \frac{1}{2}P(\tau+1) + \frac{1}{2}P(\tau-1) \Rightarrow P(\tau) = \alpha + \beta\tau$$

$$\Rightarrow P(\tau) = 1.$$

Отображение φ сохраняет меру

Рассмотрим цилиндр $C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}, \mu_4\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right) = \frac{1}{4^k}.$

Обозначим

$$B = \varphi^{-1}\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right); I_\beta = \left\{n_j \middle| \alpha_j = \beta\right\}, \beta = 0,1,2,3.$$

Тогда $|I_0| + |I_1| + |I_2| + |I_3| = k.$ Функция $t(n)$

определена при $n \in I_2 \cup I_3.$

Рассмотрим

$$B(t(n)) = \left\{\omega \in B \middle| t(n) = m_{t(n)}, n \in I_2 \cup I_3\right\},$$

$$B = \bigcup_{t(n)} B(t(n)), \sum_{t(n)} \mu_5\left(\omega \in B(t(n)) \middle| \omega \in B\right) = 1.$$

Отображение φ сохраняет меру

Тогда

$$\mu_5(B)=\sum_{t(n)}\mu_5\Big(\omega\in B\big(t(n)\big)\Big|\omega\in B\Big)\mu_5\Big\{\omega\Big|\omega_n\in\{0,1\}\text{ для }n\in I_0,$$

$$\omega_n\in\{2,3\}\text{ для }n\in I_1,\omega_n=5\text{ для }n\in I_2\cup I_3,\omega_{t(n)}\in\{0,2\}\text{ для }n\in I_2,$$

$$\omega_{t(n)}\in\{1,3\}\text{ для }n\in I_3\Big\}=\sum_{t(n)}\mu_5\Big(\omega\in B\big(t(n)\big)\Big|\omega\in B\Big)\left(\frac{1}{4^{|I_0|}}\frac{1}{4^{|I_1|}}\frac{1}{2^{|I_2|+|I_3|}}\frac{1}{2^{|I_2|+|I_3|}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4^k}.$$

Следовательно, $\mu_4\left(C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{n_1,\ldots,n_k}\right)=\mu_5\left(\varphi^{-1}\left(C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{n_1,\ldots,n_k}\right)\right)$.

Теорема.

Если $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}$ и $\{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}$ изоморфны, то операторы Купмана U_{T_1} и U_{T_2} унитарно эквивалентны и их спектры совпадают
$\Lambda_{pp}(T_1) = \Lambda_{pp}(T_2)$.

Доказательство

Если $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}$ и $\{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}$ изоморфны, то существует изоморфизм $\varphi : M_1 \to M_2$ измеримых пространств $\{M_1, \Sigma_1, \mu_1\}$ и $\{M_2, \Sigma_2, \mu_2\}$ такой, что для п.в. (по мере μ_1) $\varphi \circ T_1(x) = T_2 \circ \varphi(x)$.

Откуда следует, что

$$\forall f(x) \in L_2(M_2, \mu_2) \;\; f(T_2\varphi(x)) = f(\varphi(T_1 x)) \Rightarrow U_{T_2} U_\varphi f(x) = U_\varphi U_{T_1} f(x)$$

$$\Rightarrow U_\varphi{}^* U_{T_2} U_\varphi = U_{T_1} \Rightarrow \Lambda_{pp}(T_1) = \Lambda_{pp}(T_2).$$

Динамические системы с чисто точечным спектром

Определение. Будем говорить, что абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ имеет чисто точечный спектр, если в гильбертовом пространстве $L_2(M, \mu)$ существует ортонормированный базис из собственных функций оператора Купмана $U_T : L_2(M, \mu) \to L_2(M, \mu), U_T f(x) = f(Tx)$.

Обозначим $\Lambda_{pp}(T)$ множество собственных значений оператора Купмана U_T.

Пример

Эргодическая динамическая система «сдвиг на торе» $\left\{ R^n / Z^n, \Lambda, T_g, \lambda \right\}$ обладает чисто точечным спектром.

По теореме Вейля-фон Неймана $g_1, \dots, g_n, 1$ рационально независимы.

Спектр $\Lambda_{pp}\left(T_g\right) = \left\{ e^{2\pi i (g,m)} \middle| m \in Z^n \right\}$.

Ортонормированный базис и собственных векторов $\left\{ e^{2\pi i (m,x)} \middle| m \in Z^n \right\}$.

Теорема (Дж. фон Нейман, П.Халмош)

Эргодические абстрактные динамические системы $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}, \mu_1(M_1) = 1, \{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}, \mu_2(M_2) = 1$ с чисто точечным спектром изоморфны тогда и только тогда, когда $\Lambda_{pp}(T_1) = \Lambda_{pp}(T_2)$.

Доказательство. Необходимость следует из унитарной эквивалентности операторов Купмана U_{T_1} и U_{T_2}.

Доказательство теоремы фон Неймана - Халмоша

Достаточность. По гомологической лемме можем выбрать ортонормированные базисы $\left\{ f_\lambda^1 \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}\left(T_1\right) \right\}$ в $L_2\left(M_1, \mu_1\right)$ и $\left\{ f_\lambda^2 \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}\left(T_2\right) \right\}$ в $L_2\left(M_2, \mu_2\right)$, такие, что

$$\forall \lambda \in \Lambda_{pp}\left(T_j\right)\ U_{T_j} f_\lambda^j = \lambda f_\lambda^j; \forall \lambda_1 \in \Lambda_{pp}\left(T_j\right) \forall \lambda_2 \in \Lambda_{pp}\left(T_j\right)\ f_{\lambda_1}^j f_{\lambda_2}^j = f_{\lambda_1 \lambda_2}^j; j = 1, 2.$$

Определим линейный оператор $V : L_2\left(M_1, \mu_1\right) \to L_2\left(M_2, \mu_2\right)$

$$V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda_{pp}\left(T_1\right)} a_\lambda f_\lambda^1 \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{pp}\left(T_2\right)} a_\lambda f_\lambda^2.$$

Доказательство теоремы фон Неймана - Халмоша

Если $g = \sum_{\lambda\in\Lambda_{pp}(T_1)} b_\lambda f_\lambda^1, h = \sum_{\lambda\in\Lambda_{pp}(T_1)} c_\lambda f_\lambda^1$, то

$$(g,h) = (Vg, Vh), V(gh) = V(g)V(h).$$

Пусть

$$\forall A_1 \in \Sigma_1 \left(\chi_{A_1}(x)\right)^2 = \chi_{A_1}(x) \Rightarrow V\left(\chi_{A_1}(x)\right) = V\left(\left(\chi_{A_1}(x)\right)^2\right) = \left(V\left(\chi_{A_1}(x)\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow \exists A_2 \in \Sigma_2 : V\left(\chi_{A_1}(x)\right) = \chi_{A_2}(y); \mu_1(A_1) = \mu_2(A_2).$$

$$\forall A_1 \in \Sigma_1, \forall B_1 \in \Sigma_1 \qquad \chi_{A_1}(x)\chi_{B_1}(x) = \chi_{A_1\cap B_1}(x) \Rightarrow$$

$$V\left(\chi_{A_1\cap B_1}(x)\right) = V\left(\chi_{A_1}(x)\chi_{B_1}(x)\right) = V\left(\chi_{A_1}(x)\right)V\left(\chi_{B_1}(x)\right)$$

$$\Rightarrow \exists A_2 \in \Sigma_2 : V\left(\chi_{A_1}(x)\right) = \chi_{A_2}(y), \exists B_2 \in \Sigma_2 : V\left(\chi_{B_1}(x)\right) = \chi_{B_2}(y)$$

$$\Rightarrow V\left(\chi_{A_1\cap B_1}(x)\right) = \chi_{A_2}(y)\chi_{B_2}(y) = \chi_{A_2\cap B_2}(y).$$

Линейные гамильтоновы системы

В окрестности устойчивого положения равновесия функция Гамильтона приближается

$$H(q,p)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}p_ip_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}q_iq_j,$$

где $\left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1,\dots,n}, \left\|b_{ij}\right\|_{i,j=1,\dots,n}$ матрицы положительно определенных квадратичных форм.

Линейные гамильтоновы системы

Линейной заменой переменных

$$\hat{q}_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} q_j, \hat{p}_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} p_j$$

обе формы квадратичные формы приводятся к виду

$$H(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\hat{p}_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\hat{q}_i)^2$$

Линейные гамильтоновы системы

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = \lambda_i \hat{p}_i, \ \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -\mu_i \hat{q}_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Первые интегралы $I_i\left(\hat{q}, \hat{p}\right) = \frac{1}{2}\mu_i\left(\hat{q}_i\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda_i\left(\hat{p}_i\right)^2, i = 1, \dots, n.$

Множество $I_i\left(\hat{q}, \hat{p}\right) = c_i, \ i = 1, \dots, n$ тор. Введем на этом торе координаты $\varphi_i = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\mu_i}{\lambda_i}}\frac{\hat{q}_i}{\hat{p}_i}\right), i = 1, \dots, n.$

Тогда динамика на торе описывается

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sqrt{\lambda_i \mu_i}, i = 1, \dots, n.$$

Гомологическая лемма

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ эргодическая абстрактная динамическая система, $\Lambda_{pp}(T)$ множество собственных значений оператора Купмана U_T. Тогда можно так выбрать систему собственных функций $\left\{f_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\right\}$, что $\forall \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\ |f_\lambda(x)| \equiv 1$ и

$$\forall \lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall \lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) = f_{\lambda_1 \lambda_2}(x).$$

Доказательство

Если $\left\{\tilde{f}_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\right\}, \left|\tilde{f}_\lambda(x)\right| \equiv 1$ какая-то система собственных функций оператора Купмана, то

$$\forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ \tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x) = c(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x),$$

где $\forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ \left|c(\lambda_1, \lambda_2)\right| = 1.$

Достаточно доказать, что

$$\exists a(\lambda), \left|a(\lambda)\right| = 1:\ \forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ c(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{a(\lambda_1\lambda_2)}{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}.$$

Тогда $\left\{f_\lambda(x) = a(\lambda)\tilde{f}_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\right\}.$

Доказательство

Заметим, что

$$\forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_3 \in \Lambda_{pp}(T)$$

$$1.\quad c(1,\lambda_1) = 1,$$

$$\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2} = \tilde{f}_{\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_1}(x),$$

$$\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x) = c(\lambda_1,\lambda_2)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x), \tilde{f}_{\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_1} = c(\lambda_2,\lambda_1)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x), \Rightarrow$$

$$2.\quad c(\lambda_1,\lambda_2) = c(\lambda_2,\lambda_1),$$

$$\left(\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x)\right)\tilde{f}_{\lambda_3}(x) = \tilde{f}_{\lambda_1}(x)\left(\tilde{f}_{\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_3}(x)\right),$$

$$\left(\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x)\right)\tilde{f}_{\lambda_3}(x) = c(\lambda_1,\lambda_2)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_3}(x) = c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x),$$

$$\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\left(\tilde{f}_{\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_3}(x)\right) = \tilde{f}_{\lambda_1}(x)c(\lambda_2,\lambda_3)\tilde{f}_{\lambda_2\lambda_3}(x) = c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x), \Rightarrow$$

$$3.\quad c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3) = c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3).$$

Доказательство

Запишем $\Lambda_{pp}(T) = \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$.

Обозначим Λ_{pp}^n подгруппу, порождённую $1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ и предположим, что на Λ_{pp}^n определена функция $a(\lambda)$ такая, что

$$\forall \lambda \in \Lambda_{pp}^n, \forall \mu \in \Lambda_{pp}^n \ \ c(\lambda, \mu) = \frac{a(\lambda\mu)}{a(\lambda)a(\mu)}.$$

Далее доказательство по индукции.

Если $n = 0$, то положим $a(1) = 1$.

Доказательство. Шаг 1.

Предположим, что $\lambda_{n+1} \notin \Lambda_{pp}^{n}$. Если $\forall r \in Z \setminus \{0\}$ $\lambda_{n+1}^{r} \notin \Lambda_{pp}^{n}$, то положим $a(\lambda_{n+1}) = 1.$

Если $\exists r \in Z \setminus \{0\}$ $\lambda_{n+1}^{r} \in \Lambda_{pp}^{n}$, то множество $\left\{ r \in Z \middle| \lambda_{n+1}^{r} \in \Lambda_{pp}^{n} \right\}$ являются подгруппой Z.

Следовательно, $\exists h \in Z : \lambda_{n+1}^{r} \in \Lambda_{pp}^{n} \Leftrightarrow r = h \times m, m \in Z.$

Из индуктивного предположения следует, что уже определено $a(\lambda_{n+1}^{r})$, если $\lambda_{n+1}^{r} \in \Lambda_{pp}^{n}$.

Доказательство. Шаг 1.

Требуется, чтобы

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}\right)=\frac{a\left(\lambda_{n+1}^{p+1}\right)}{a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)a\left(\lambda_{n+1}\right)}\Rightarrow\prod_{p=0}^{h-1}c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}\right)=\frac{a\left(\lambda_{n+1}^{h}\right)}{\left(a\left(\lambda_{n+1}\right)\right)^{h}}.$$

Поскольку

$$\left(a\left(\lambda_{n+1}\right)\right)^{h}=a\left(\lambda_{n+1}^{h}\right)\left(\prod_{p=0}^{h-1}c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}\right)\right)^{-1},$$

с учётом индуктивного предположения правая часть уже определена, положим $a\left(\lambda_{n+1}\right)$ равным некоторому корню этого уравнения.

Доказательство. Шаг 2.

Положим для m>0

$$a\left(\lambda_{n+1}^{m}\right)=\left(a\left(\lambda_{n+1}\right)\right)^{m}\prod_{p=0}^{m-1}c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}\right).$$

Положим для m<0

$$a\left(\lambda_{n+1}^{m}\right)=\left(a\left(\lambda_{n+1}^{-m}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{m},\lambda_{n+1}^{-m}\right)\right)^{-1}.$$

Доказательство. Шаг 2.1.

Покажем, что

$$a\left(\lambda_{n+1}^{p+q}\right)=a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right). \qquad (1)$$

Будем доказывать по индукции по p.

Рассмотрим сначала случай $p\geq 0, q\geq 0.$

Для $p=0$ $a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right)=a(1)a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(1,\lambda_{n+1}^{q}\right)\Leftrightarrow c\left(1,\lambda_{n+1}^{q}\right)=1.$

Подставляя выражения $a\left(\lambda_{n+1}^{p+q}\right), a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right), a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right),$

получаем, что (1) эквивалентно

$$\prod_{s=0}^{p+q-1} c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)\prod_{s=0}^{p-1} c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)\prod_{s=0}^{q-1} c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right). \qquad (2)$$

Доказательство. Шаг 2.1.

Считая по индуктивному предположению, выполненным (2). Требуется доказать, что

$$\prod_{s=0}^{p+q} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right) = c\left(\lambda_{n+1}^{p+1}, \lambda_{n+1}^{q}\right) \prod_{s=0}^{p} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right) \prod_{s=0}^{q-1} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right). \quad (3)$$

С учётом (2) равенство (3) эквивалентно

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p+q}, \lambda_{n+1}\right) c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}^{q}\right) = c\left(\lambda_{n+1}^{p+1}, \lambda_{n+1}^{q}\right) c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}\right). \quad (4)$$