# Введение в эргодическую теорию Лекция 1

А.А.Шананин

# Литература


1. Каток А.Б., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем// М.: «Факториал», 1999, 767с.
2. Синай Я.Г. Введение в эргодическую теорию // М.: «Фазис», 1996, 128 с.
3. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории // М.: Физ.-мат. лит., 1995, 201 с.
4. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики // РХД, 1999, 281 с.

5.Халмош П.Р. Лекции по эргодической теории // РХД, 1999, 134 с.

# Введение. Модели популяций с неперекрывающимися поколениями

$N(t+1)=f(N(t)),\ t=0,1,\ldots$

$N(0),\ N(1),\ldots$

$N(t+1)=aN(t)(1-N(t)/K)$

$x(t)=N(t)/K,$

$x(t+1)=ax(t)(1-x(t)),\ 0\le a\le 4,\ 0\le x(t)\le 1.$

# Введение

Дж. Фон Нейман и П.Улам: x(t+1)=4x(t)(1-x(t))

Замена переменных

$$x(t) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} y(t)\right),$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} y(t+1)\right) = \sin^2\left(\pi y(t)\right),$$

$$y(t+1) = 1 - \left|1 - 2y(t)\right|$$

# Введение

Пусть

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}, a_n \in \{0,1\},$$

$$y(t+1)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2^n}, \text{если } a_1=0,\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-a_{n+1}}{2^n}, \text{если } a_1=1.\end{cases}$$

# Введение

Инвариантная мера μ: для любого измеримого множества A справедливо

$$\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(A)$$

Для динамической системы фон Неймана-Улама инвариантной мерой является мера Лебега.

# Теорема Лиувилля

Система обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями, ограниченными по норме линейной функцией

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \qquad \ldots\ldots \\ \dfrac{dx_m}{dt} = X_m(x_1, \ldots, x_m) \end{cases}$$

$$\varphi(x, t)$$

# Теорема Лиувилля

Для того, чтобы гладкая функция p(x) была плотностью инвариантной меры преобразования $\varphi(x,t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(x)X_k(x)\right)=0.$$

# Доказательство

Функция p(x) плотность инвариантной меры для преобразования $\varphi(x,t) \Leftrightarrow$ для любого измеримого множества A

$$\int\limits_{R^m} \chi_A(x) p(x) dx = \int\limits_{R^m} \chi_A(\varphi(x,t)) p(x) dx,$$

$$\text{где } \chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

# Доказательство

Эквивалентно: для любой функции $f(x) \in C_0^\infty(R^m)$

$$\int_{R^m} f(x)p(x)dx = \int_{R^m} f(\varphi(x,t))p(x)dx.$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_{R^m} f(\varphi(x,t))p(x)dx\right) = 0,$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_{R^m} \frac{d}{dt}\left(f(\varphi(x,t))\right)p(x)dx = \int_{R^m}\left(X_k(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right)p(x)dx =$$

$$= \int_{R^m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(x)X_k(x)\right)\right)f(x)dx$$

# Примеры

Заряженная частица в стационарном электромагнитном поле

$$\frac{dx}{dt} = v, m\frac{dv}{dt} = q\left(E\left(x\right) + v \times B\left(x\right)\right),$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{3} q\left(\frac{\partial E_k\left(x\right)}{\partial v_k} + \frac{\partial \left(v \times B\left(x\right)\right)_k}{\partial v_k}\right) = 0.$$

# Примеры

Магнитная гидродинамика :

$$\frac{dx_k}{dt} = B_k(x), k = 1, 2, 3.$$

Гамильтоновы системы:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_j}, \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial^2 H(x,p)}{\partial x_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 H(x,p)}{\partial p_j \partial x_j} \right) = 0$$

# Примеры

Динамическая система в дискретном времени x(t+1)=f(x(t)), t=0,1,…,

Уравнение Перрона-Фробениуса-Рюэля

$$p(x) = \sum_{\{y | f(y)=x\}} \frac{p(y)}{|f'(y)|}$$

# Примеры

Отображение Гаусса

$$
\begin{gathered}
T:[0,1]\to[0,1],\\
T(x)=\begin{cases}\left\{\dfrac{1}{x}\right\}, \text{если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}
\end{gathered}
$$

Плотность инвариантной меры $p(x)=\dfrac{1}{1+x}.$

# Доказательство

Зафиксируем $x_0 \in [0,1)$.

Пусть

$$\frac{1}{n+1} < x_n \leq \frac{1}{n}, \left[\frac{1}{x_n}\right] = n, T(x_n) = \left\{\frac{1}{x_n}\right\} = x_0,$$

$$x_n = \frac{1}{x_0 + n}, n = 1, 2, \ldots$$

# Доказательство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dx_n}{1+x_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x_0+n}}\left|\frac{dx_n}{dx_0}\right|dx_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x_0+n\right)dx_0}{\left(1+x_0+n\right)\left(x_0+n\right)^2}=$$

$$=dx_0\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_0+n}-\frac{1}{x_0+n+1}\right)=\frac{dx_0}{1+x_0}$$

# Теорема Боголюбова-Крылова

Пусть M компактное топологическое пространство и $T: M \to M$ непрерывное отображение. Тогда на M всегда существует хотя бы одна инвариантная относительно преобразования T мера.

# Доказательство

Пусть $\nu$ произвольная неотрицательная мера на M, такая что $\nu(\mathrm{M})=1.$

Положим $\nu_k(\mathrm{A})=\nu\left(\mathrm{T}^{-k}(\mathrm{A})\right), k=0,1,\ldots$

$$\tilde{\nu}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k(\mathrm{A}).$$

Очевидно, что $\tilde{\nu}_n(\mathrm{M})=1.$

По теореме Банаха-Алуоглу множество нормированных мер $\text{слабо}^*$ компактоно.

# Доказательство

Выделим из последовательности $\left\{\tilde{\nu}_n \,\middle|\, n = 1, 2, \ldots\right\}$ $\text{слабо}^*$ сходящуюся к мере $\mu$ подпоследовательность $\left\{\tilde{\nu}_{n_j} \,\middle|\, j = 1, 2, \ldots\right\}$, где $\lim\limits_{j\to\infty} n_j = \infty.$

Инвариантность меры $\mu$ означает, что для любой функции $f(x) \in L_\infty(M)$ справедливо равенство

$$\int\limits_M f(x)\mu(dx) = \int\limits_M f(Tx)\mu(dx).$$

# Доказательство

Поскольку M компактное топологическое пространство, C(M) плотно в $L_\infty(M)$.

Поэтому достаточно проверить равенство для $f(x) \in C(M)$

$$\int_M f(x)\mu(dx) = \lim_{j\to\infty}\int_M f(x)\tilde{\nu}_{n_j}(dx) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_M f(x)\nu_k(dx) =$$

$$= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\left\{\sum_{k=1}^{n_j}\int_M f(x)\nu_k(dx) + \int_M f(x)\nu_0(dx) - \int_M f(x)\nu_{n_j}(dx)\right\} =$$

$$= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{k=1}^{n_j}\int_M f(T^k x)\nu(dx) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_M f(Tx)\nu_k(dx) = \int_M f(Tx)\mu(dx).$$

# Определение

Абстрактной динамической системой называется $\{M, \Sigma, T, \mu\}$, где $M$ фазовое пространство, б- алгебра $\sum$ на М,
$T : M \to M$ измеримое отображение, т.е. для любого множества $A \in \Sigma, T^{-1}(A) \in \Sigma,$
$\mu$ инвариантная мера для Т, т.е. для любого множества $A \in \Sigma, \mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A).$

# Теорема Пуанкаре о возвращении

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ абстрактная динамическая система, $\mu(M) = 1$ и $A \in \Sigma, \mu(A) > 0.$ Тогда для почти всех по мере μ $x \in A$ существует бесконечно возрастающая последовательность номеров $\{n_k \,|\, k = 1, 2, \ldots\},$ при которых $T^{n_k} x \in A.$

# Доказательство

Пусть $A_1 = \left\{ x \in A \middle| \exists j > 0\ T^j x \in A \right\}$. Положим $B = \left\{ x \in A \middle| \forall k > 0 T^k x \notin A \right\}$.

Покажем, что $\mu\left(B\right) = 0$. Заметим, что $T^{-k}B \bigcap B = \varnothing$,

т.к. $B \subset A, T^{-k}B \not\subset A \text{ при } k > 0$. Аналогично доказывается, что множества $\left\{ T^{-k}B \middle| k = 1, 2, \ldots \right\}$ попарно не пересекаются. Поэтому $\mu\left( \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}B \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(T^{-k}B\right) \le \mu\left(M\right) = 1$.

В силу инвариантности меры

$$\mu\left(T^{-k}B\right) = \mu\left(B\right) \Rightarrow \mu\left(B\right) = 0.$$

# Доказательство

Положим $A_{k+1} = \left\{ x \in A_k \,\middle|\, \exists j > 0\ T^j x \in A_k \right\},\ k \geq 1.$

Тогда $\mu\left(A_k\right) = \mu\left(A_{k+1}\right)$ при $k \geq 1$

Положим $A_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$

Тогда $\mu\left(A_\infty\right) = \lim\limits_{k \to +\infty} \mu\left(A_k\right) = \mu\left(A\right).$

Откуда следует, что $\mu\left(A \setminus A_\infty\right) = 0.$

# О частоте возвращения

Пусть

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A, \end{cases}$$

характеристическая функция множества А.

Заметим, что

$$\chi_{T^{-k}A}(x) = \chi_A\left(T^k x\right), \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{T^{-k}A}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A\left(T^k x\right).$$

Частота возвращения $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A\left(T^k x\right).$

# Основной вопрос эргодических теорем

Существует ли, в каком смысле и какими свойствами обладает предел

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) = f^*\left(x\right)?$$

# Оператор Купмана

Определим $U_T : L_1(M,\mu) \to L_1(M,\mu); U_T\left(f(x)\right) = f(Tx).$

**Лемма 1.** Преобразование $T : M \to M$ имеет инвариантную меру $\mu$ тогда и только тогда, когда оператор $U_T$ является изометрическим, т.е. $\forall f \in L_1(M,\mu)\ \left\|U_T(f)\right\|_{L_1(M,\mu)} = \|f\|_{L_1(M,\mu)}$ .

**P.S.** $\forall f(x) \in L_p(M,\mu), 1 < p < +\infty\ \left\|U_T\left(f(x)\right)\right\|_{L_p(M,\mu)} = \left\|f(x)\right\|_{L_p(M,\mu)} \Leftrightarrow$

$\forall f(x) \in L_1(M,\mu),\ \left\|U_T\left(f(x)\right)\right\|_{L_1(M,\mu)} = \left\|f(x)\right\|_{L_1(M,\mu)}$

# Доказательство леммы 1

**Достаточность.** Пусть множество $A \in \Sigma,\ \mu(A) < +\infty$ и $\chi_A(x)$ его характеристическая функция.

Тогда $U_T(\chi_A(x)) = \chi_A(Tx) = \chi_{T^{-1}A}(x)$.

Заметим, что

$$\left\|U_T(\chi_A(x))\right\|_{L_1(M,\mu)} = \left\|\chi_A(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} \Leftrightarrow \mu\left(T^{-1}A\right) = \mu(A).$$

# Доказательство леммы 1

**Необходимость.** Поскольку

$$\left\|U_T\left(\chi_A(x)\right)\right\|_{L_1(M,\mu)} = \left\|\chi_A(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} \Leftrightarrow \mu\left(T^{-1}A\right) = \mu(A),$$

равенство $\left\|U_T(f)\right\|_{L_1(M,\mu)} = \left\|f\right\|_{L_1(M,\mu)}$ для функций f, являющихся характеристическими функциями измеримых множеств конечной меры, а, значит, в силу линейности оператора $U_T$ для простых функций.

# Доказательство леммы 1

Любая неотрицательная функция, например, $\left|f(x)\right|$ является пределом в смысле поточечной сходимости возрастающей последовательности неотрицательных простых функций $\left\{f_n(x) \middle| n = 1, 2, \ldots\right\}$.
Последовательность $\left\{U_T\left(f_n(x)\right) = f_n(Tx) \middle| n = 1, 2, \ldots\right\}$ является последовательностью неотрицательных простых функций поточечно сходящихся к функции $U_T\left(\left|f(x)\right|\right) = \left|f(Tx)\right|$.

# Доказательство леммы 1

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)\|_{L_1(M,\mu)}=\|f(x)\|_{L_1(M,\mu)},\quad \lim_{n\to\infty}\|U_T(f_n(x))\|_{L_1(M,\mu)}=\|U_T(f(x))\|_{L_1(M,\mu)}.$$

Поскольку для простых функций справедливо $\|U_T(f_n(x))\|_{L_1(M,\mu)}=\|f_n(x)\|_{L_1(M,\mu)}$, получаем, что

$$\|U(f(x))\|_{L_1(M,\mu)}=\|f(x)\|_{L_1(M,\mu)}.$$

# Лемма 2.

Пусть $U: L_2 \to L_2$ изометрический оператор. Тогда соотношение $Uf = f, f \in L_2$ эквивалентно соотношению $U^* f = f$.

# Доказательство леммы 2

Докажем сначала, что оператор U изометрический тогда и только тогда, когда $U^*U = I,$ где $\mathbf{I}$ тождественный оператор, т.е. $\forall f \in L_2 \;\; I(f) = f.$

**P.S.** Приведите пример оператора U, для которого из $U^*U = I$ не следует, что $UU^* = I.$

# Доказательство леммы 2

Поскольку оператор U изометрический,

имеем $\forall f \in L_2, \forall g \in L_2 \ \left(U(f+g), U(f+g)\right) = (f+g, f+g).$

Откуда получаем, что $\forall f \in L_2, \forall g \in L_2 \ \operatorname{Re}\left(U(f), U(g)\right) = \operatorname{Re}(f, g)$

Аналогично из $\forall f \in L_2, \forall g \in L_2 \ \left(U(f+ig), U(f+ig)\right) = (f+ig, f+ig)$

следует, что $\forall f \in L_2, \forall g \in L_2 \ \operatorname{Im}\left(U(f), U(g)\right) = \operatorname{Im}(f, g).$

Значит, $\forall f \in L_2, \forall g \in L_2 \ \left(U(f), U(g)\right) = (f, g) \Leftrightarrow \forall f \in L_2, \forall g \in L_2 \ \left(U^* U f, g\right) = (f, g).$

Следовательно, $\forall f \in L_2 \ U^* U f = f \Leftrightarrow U^* U = I.$

# Доказательство леммы 2

**Необходимость.** Из $Uf = f$, применяя к обеим частям равенства оператор $U^*$, получаем $U^*f = U^*Uf = f$.

**Достаточность.** Пусть $U^*f = f$. Тогда

$$\|Uf - f\|^2 = (Uf - f, Uf - f) = (Uf, Uf) - (Uf, f) - (f, Uf) + (f, f) =$$

$$= (U^*Uf, f) - (f, U^*f) - (U^*f, f) + (f, f) = 0.$$

# Статистическая эргодическая теорема Дж. фон Неймана

Пусть $U : L_2 \to L_2$ изометрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве $L_2$ и $P : L_2 \to L_2$ оператор проектирования на подпространство $F = \left\{ f \in L_2 \middle| Uf = f \right\}$ векторов, инвариантных относительно оператора U.

Тогда

$$\forall f \in L_2 \ \lim_{n\to\infty} \left\| \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(f) \right) - P(f) \right\|_{L_2} = 0.$$