Введение в эргодическую теории
Лекция 5

А.А.Шананин

Строгая эргодичность

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ называется строго эргодической, если она имеет единственную инвариантную вероятностную меру.

Задача. Из строгой эргодичности следует Эргодичность.

Решение

Допустим противное, что существует инвариантное множество $A = T^{-1}A, \mu(A) > 0, \mu(A) < 1.$
Определим меру ν такую, что $\forall B \in \Sigma \ \nu(B) = \dfrac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}.$
Заметим, что $\nu(T^{-1}B) = \dfrac{\mu(T^{-1}B \cap A)}{\mu(A)} = \dfrac{\mu(T^{-1}B \cap T^{-1}A)}{\mu(A)} =$

$$= \frac{\mu(T^{-1}(B \cap A))}{\mu(A)} = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \nu(B)$$

Таким образом, ν инвариантная мера.

Противоречие со строгой эргодичностью.

Задача

На окружности $S=\{z\in C \| z| = 1\}$ задано отображение $T:S\to S, Tz=z^2.$ Доказать, что

1. мера Лебега индуцирует инвариантную меру для отображения T;
2. динамическая система $\{S,\Lambda,T,\lambda\}$ является перемешиванием;

Решение (инвариантность меры Лебега)

Если $z = e^{2\pi i\varphi}$, то $z^2 = e^{4\pi i\varphi} = e^{2\pi i\{2\varphi\}}$.

Рассмотрим $T_\varphi : [0,1) \to [0,1), T_\varphi x = \{2x\}$.

Если $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_n}{2^n}$, где $\omega_n \in \{0,1\}$ $n = 1, 2, \ldots$ $T_\varphi x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_{n+1}}{2^n}$,

$(\omega_1, \omega_2, \ldots) \to (\omega_2, \omega_3, \ldots)$.

Если

$[\alpha,\beta] \subset [0,1)$, то $T_\varphi^{-1}[\alpha,\beta] = \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1+\beta}{2}\right]$,

$$\lambda([\alpha,\beta]) = \beta - \alpha,\ \lambda\left(T_\varphi^{-1}[\alpha,\beta]\right) = \lambda\left(\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right]\right) + \lambda\left(\left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1+\beta}{2}\right]\right) = \beta - \alpha.$$

Решение(перемешивание)

Система функций $\left\{ e^{2\pi in\varphi} \middle| n \in Z \right\}$ образует ортонормированный базис на окружности $\left\{ z \in C \middle\| z \right| = 1 \}$.

Заметим, что $U_{T_\varphi^k} e^{2\pi in\varphi} = e^{2\pi in 2^k \varphi}$.

Проверяя усиленный критерий перемешивания, получаем:

$$\lim_{k \to +\infty} \left(U_{T_\varphi^k} e^{2\pi in\varphi}, e^{2\pi im\varphi} \right) = 0 = \left(e^{2\pi in\varphi}, 1 \right) \left(1, e^{2\pi im\varphi} \right).$$

Задача

Доказать, что схема Бернулли является К-системой.

Доказательство. Рассмотрим схему Бернулли $\{\Omega_N, \Pi_N, \mu_N, \sigma_N\}$. Обозначим

$$A_i^j = \{\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega_N \,|\, \omega_i = j\},\ j \in \{0, \ldots, N-1\}, i \in Z.$$

Заметим, что $\sigma_N\left(A_i^j\right) = A_{i+1}^j$. Пусть $\mathfrak{R}$ б-алгебра, порожденная $A_i^j, i \le 0$. Тогда $\mathfrak{R} \subset \sigma_N \mathfrak{R}$.

К-системы

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ где T автоморфизм, называется К-системой, если существует подалгебра $\Re \subset \Sigma$, такая, что 1. $\Re \subset T\Re$,

2. $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} T^n \Re = \{M, \varnothing\}$, 3. $\overline{\bigvee\limits_{n=\infty}^{+\infty} T^n \Re} = \Sigma$, здесь $\overline{\bigvee\limits_{n=\infty}^{+\infty} T^n \Re}$

минимальная Б - алгебра, такая, что

$$\forall k \in Z \;\; T^k \Re \subset \overline{\bigvee\limits_{n=\infty}^{+\infty} T^n \Re}.$$

Задача: схема Бернулли К-система

Любое множество A_k^j содержится в $\sigma_N^k(\mathfrak{R})$.

Следовательно,

$$\Pi_N = \overline{\bigvee_{n=\infty}^{+\infty} \sigma_N^n \mathfrak{R}}.$$

Пусть $\mathfrak{I} = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_N^n \mathfrak{R}$ и A порождено конечным числом генераторов A_i^j. а

Задача: схема Бернулли К-система

Тогда

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \; \forall B \in \sigma_N^{-n}\mathfrak{R} \;\; \mu_N\left(A \cap B\right) = \mu_N\left(A\right)\mu_N\left(B\right),$$

$$\Rightarrow \forall A \in \Pi_N \forall B \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \sigma_N^{-n}\mathfrak{R} \; \mu_N\left(A \cap B\right) = \mu_N\left(A\right)\mu_N\left(B\right),$$

$$\Rightarrow \forall B \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \sigma_N^{-n}\mathfrak{R} \; \mu_N\left(B \cap B\right) = \mu_N\left(B\right)\mu_N\left(B\right) \Rightarrow \mu_N\left(B\right) = 0 \vee \mu_N\left(B\right) = 1.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_N^{n}\mathfrak{R} = \left\{\varnothing, \Omega_N\right\}.$$

Лебеговские спектры

Определение. Будем говорить, что $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ абстрактная динамическая система обладает лебеговским спектром, если в $L_2(M, \mu)$ существует полный ортонормированный базис , образованный функцией $f_0(x) \equiv 1$ и функциями $\left\{f_{i,j}(x) \middle| i \in I, j \in Z\right\}$ такими, что

$$\forall i \in I, \forall j \in Z \;\; U_T f_{i,j}(x) = f_{i,j}(Tx) = f_{i,j+1}(x).$$

Здесь I конечное или счетное множество.

Задача

Доказать, что К-система обладает лебеговским спектром.

Доказательство. Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ К-система и $L_2(\Re)$ подпространство гильбертова пространства $L_2(M, \mu)$ порожденное $\{\chi_A(x) \mid A \in \Re\}$. Заметим, что

$$U_T \chi_A(x) = \chi_{T^{-1}A}(x) \Rightarrow U_T L_2(\Re) = L_2\left(T^{-1}\Re\right) \Rightarrow U_T L_2(\Re) \subset L_2(\Re).$$

Тогда

$$L_2\left(\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} T^n \Re\right) = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} U_T^n L_2(\Re) \subset \ldots \subset U_T L_2(\Re) \subset L_2(\Re) \subset$$

$$\subset U_T^{-1} L_2(\Re) \subset \ldots \subset \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} U_T^n L_2(\Re)} = L_2\left(\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n \Re}\right) = L_2(M, \mu).$$

Задача: К-система обладает лебеговским спектром

Пусть H подпространство $\mathrm{L}_2(\mathfrak{R})$ ортогональное функции $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \equiv 1$, а $\mathrm{L}_2^{'}$ подпространство $\mathrm{L}_2(\mathrm{M}, \mu)$ ортогональное функции $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \equiv 1$. Тогда

$$\{0\} = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}_{\mathrm{T}}^{n}\mathrm{H} \subset \ldots \subset \mathrm{U}_{\mathrm{T}}\mathrm{H} \subset \mathrm{H} \subset \mathrm{U}_{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{H} \subset \ldots \subset \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}_{\mathrm{T}}^{n}\mathrm{H}} = \mathrm{L}_2^{'}.$$

Пусть $\mathrm{H}^{'}$ ортогональное дополнение в H к $\mathrm{U}_{\mathrm{T}}\mathrm{H}$. Выберем в $\mathrm{H}^{'}$ полный ортонормированный базис $\left\{\mathrm{h}_{\mathrm{j}} \,\middle|\, \mathrm{j} \in \mathrm{I}\right\}$.

Задача: K-система обладает лебеговским спектром

Пусть K_i замыкание подпространства $\left\{U_T^n h_i \,\middle|\, n = 0, 1, \ldots\right\}$. По построению

$$K_i \perp K_j \text{ при } i \neq j, \left(U_T^n h_i, U_T^m h_j\right) = 0 \text{ при } m \neq n, m \geq 0, n \geq 0.$$

Из $\{0\} = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} U_T^n H$ следует, что $H = \oplus \sum_{j \in I} K_j$.

Тогда

$$L_2' = \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} U_T^n H} = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_T^{-n} H} = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_T^{-n} \left(\oplus \sum_{j \in I} K_j \right)} = \oplus \sum_{j \in I} \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} U_T^{-n} K_j}.$$

Задача: K-система обладает лебеговским спектром

Полагая $\aleph_j = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_T^{-n} K_j$, получаем, что

$$L_2' = \oplus \sum_{j \in I} \aleph_j .$$

В $\aleph_j$ система $\left\{ U_T^n h_j \middle| n \in Z \right\}$ образует базис.

Положим $f_{j,n} = U_T^n h_j, n \in Z, j \in I.$ Тогда

$$U_T f_{j,n} = U_T \left(U_T^n h_j \right) = U_T^{n+1} h_j = f_{j,n+1}, n \in Z, j \in I.$$

Система функций $1, \left\{ f_{j,n} \middle| n \in Z, j \in I \right\}$ о.н.б. в $L_2 \left(M, \mu \right).$

Лебеговские спектры

Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ обладающая лебеговским спектром является перемешивающей системой.

Доказательство. Достаточно проверить усиленный критерий для $f = f_{i,j}, g = f_{k,r}.$

Имеем $\left(U_T^n f, g\right) = \left(f_{i,j+n}, f_{k,r}\right) = 0$ при $j + n \neq r.$

Пример: линейный автоморфизм тора

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A=1, a_{11}+a_{22}>2.$

Отображение $A: R^2 \to R^2, A(x)=Ax$ при условии, что $a_{ij}\in Z\ i=1,2;\ j=1,2$ допускает факторизацию

$$T_A=\Psi\circ A\circ\Psi^{-1}: R^2/Z^2 \to R^2/Z^2.$$

Абстрактная динамическая система $\{R^2/Z^2, \Lambda, T_A, \lambda\}$ называется линейным автоморфизмом тора.

Пример: линейный автоморфизм тора

Функции $\left\{ f_p(x) = e^{2\pi i(p,x)} \,\middle|\, p = (p_1, p_2) \in Z^2 \right\}$ образуют полный ортонормированный базис в $L_2\left(R^2/Z^2, \lambda\right)$.

Заметим, что

$$\forall p \in Z^2 \;\; U_{T_A} f_p(x) = f_{A^* p}(x), \text{ т.к. } e^{2\pi i(p, Ax)} = e^{2\pi i\left(A^* p, x\right)}.$$

Кроме того,

$$U_{T_A}^k f_p(x) = f_p(x), k \neq 0 \Rightarrow \left(A^*\right)^k p = p, k \neq 0 \Rightarrow p = 0.$$

Следовательно, базис $\left\{ f_p(x) = e^{2\pi i(p,x)} \,\middle|\, p = (p_1, p_2) \in Z^2 \right\}$ распадается на орбиты оператора Купмана U_{T_A}.

Пример: линейный автоморфизм тора

Поскольку орбиты $H_i = \left\{ U_{T_A}^j f_p(x) \middle| j \in Z \right\}$ или не пересекаются, или совпадают и являются неограниченными за исключением p=0,

$$L_2\left(R^2/Z^2, \lambda\right) = \bigoplus_{i \in I} H_i.$$

Линейный автоморфизм тора обладает лебеговским спектром.

Пример: линейный автоморфизм тора

Пусть $A=\begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 2\end{pmatrix}$. Собственные числа

$$0<\lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1<\lambda_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Прямая $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{s\}\\ \{(\lambda_2-1)s\}\end{pmatrix}, s\in(-\infty,+\infty)$ инварианта относительно преобразования T_A, т.к.

$$T_A\begin{pmatrix}\{s\}\\ \{(\lambda_2-1)s\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{s+(\lambda_2-1)s\}\\ \{s+2(\lambda_2-1)s\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{\lambda_2 s\}\\ \{\lambda_2(\lambda_2-1)s\}\end{pmatrix},\ \text{т.к. } \lambda_2^2-3\lambda_2+1=0.$$

Пример: линейный автоморфизм тора

Число $\lambda_2 - 1$ иррационально, поэтому $\left\{ (\lambda_2 - 1)^n \middle| n \in Z \right\}$ всюду плотны на окружности

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \{x_2\} \end{pmatrix} \middle| x_2 \in R \right\},$$

а кривая $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{s\} \\ \{(\lambda_2 - 1)s\} \end{pmatrix} \middle| s \in (-\infty, +\infty) \right\}$ всюду

плотна на торе R^2 / Z^2.

Пример: линейный автоморфизм тора

Заметим, что

$$T_A^n\begin{pmatrix}\{s\}\\ \{(\lambda_2-1)s\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{\lambda_2^n s\}\\ \{\lambda_2^n(\lambda_2-1)s\}\end{pmatrix}, \lim_{n\to+\infty} T_A^n\begin{pmatrix}\{s\}\\ \{(\lambda_2-1)s\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Выберем $f(x_1,x_2)=e^{2\pi i x_1}\in L_1\left(R^2/Z^2,\lambda\right)$. Тогда

$$\int_{R^2/Z^2} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i x_1}dx_1dx_2=0.$$

Пример: линейный автоморфизм тора

С другой стороны, для $x \in \gamma$ имеем, что

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(T_A^n x\right) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i x_1 \lambda_2^n} = 1,$$

поскольку из сходимости последовательности следует её сходимость по Чезаро.

Построен пример системы с перемешиванием, у которой на всюду плотном множестве временное и пространственное средние не совпадают.

Спектральные свойства

Абстрактная динамическая система:

$$\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1.$$

Эргодичность:

$$\forall f \in L_2(M,\mu),\ \forall g \in L_2(M,\mu)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(U_T^j f, g\right) = (f,1)(1,g).$$

Перемешивание:

$$\forall f \in L_2(M,\mu),\ \forall g \in L_2(M,\mu)\quad \lim_{n\to+\infty} \left(U_T^n f, g\right) = (f,1)(1,g).$$

Спектральные свойства

Абстрактная динамическая система:

$$\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1.$$

Эргодичность:

$$\forall f \in L_2(M,\mu),\ \forall g \in L_2(M,\mu)\ \ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(U_T^j f, g\right) = (f,1)(1,g).$$

Перемешивание:

$$\forall f \in L_2(M,\mu),\ \forall g \in L_2(M,\mu)\ \ \lim_{n\to+\infty}\left(U_T^n f, g\right) = (f,1)(1,g).$$

Теорема Купмана

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ эргодическая система и $U_T : L_2(M, \mu) \to L_2(M, \mu), U_T f(x) = f(Tx)$ оператор Купмана. Тогда

1. если $U_T f(x) = \lambda f(x), f(x) \neq 0$,то $|\lambda| = 1, |f(x)| = \mathrm{const}$ п.в. (по мере μ);
2. каждое собственное значение U_T простое;
3. множество собственных значений U_T образует подгруппу окружности $\{z \in C \| z| = 1\}$;

Теорема Купмана

4. если $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ перемешивание, то оператор Купмана U_T имеет единственное собственное значение 1.

Доказательство. 1. Пусть $U_T f(x) = \lambda f(x), f(x) \neq 0.$

Так как оператор U_T изометрический, имеем

$$(f, f) = (U_T f, U_T f) = (\lambda f, \lambda f) = \lambda \bar{\lambda} (f, f) \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

Теорема Купмана

Тогда $U_T f(x) = f(Tx) = \lambda f(x) \Rightarrow \left|f(Tx)\right| = \left|\lambda f(x)\right| = \left|f(x)\right|.$

Из критерия эргодичности следует, что

$\left|f(x)\right| = \mathrm{const}$ п.в. (по мере μ).

2. Пусть $U_T f(x) = \lambda f(x), f(x) \neq 0, U_T g(x) = \lambda g(x).$

Тогда

$$U_T\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{g(Tx)}{f(Tx)} = \frac{U_T g(x)}{U_T f(x)} = \frac{\lambda g(x)}{\lambda f(x)} = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

В силу критерия эргодичности $\frac{g(x)}{f(x)} = \mathrm{const}$ п.в.

Теорема Купмана

3. Если $U_T f(x) = \lambda f(x), f(x) \neq 0$, то

$$U_T \overline{f}(x) = \overline{f}(Tx) = \overline{\lambda}\overline{f}(x) = \lambda^{-1}\overline{f}(x), \overline{f}(x) \neq 0.$$

Следовательно, если λ собственное число оператора Купмана U_T, то λ^{-1} тоже является собственным числом.

Если $U_T f(x) = \lambda f(x), f(x) \neq 0, U_T g(x) = \nu g(x), g(x) \neq 0,$

то $U_T\left(f(x)g(x)\right) = f(Tx)g(Tx) = U_T\left(f(x)\right)U_T\left(g(x)\right) = \lambda\nu f(x)g(x).$

Теорема Купмана

Таким образом, если λ и ν собственные числа оператора U_T, то $\lambda\nu$ тоже собственное число.

4. Пусть $U_T f(x) = \lambda f(x), f(x) \neq 0$ и $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ перемешивание. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\left(U_T^n f(x), f(x)\right) = \left(f(x), 1\right)\left(1, f(x)\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\lambda^n = \mathrm{const} \Rightarrow \lambda = 1.$$

Гомологическая лемма

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ эргодическая абстрактная динамическая система, $\Lambda_{pp}(T)$ множество собственных значений оператора Купмана U_T. Тогда можно так выбрать систему собственных функций $\left\{ f_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T) \right\}$, что $\forall \lambda \in \Lambda_{pp}(T) \; |f_\lambda(x)| \equiv 1$ и

$$\forall \lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall \lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T) \; f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) = f_{\lambda_1 \lambda_2}(x).$$

Задача: доказать гомологическую лемму

Если $\left\{\tilde{f}_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\right\}, \left|\tilde{f}_\lambda(x)\right| \equiv 1$ какая-то система собственных функций оператора Купмана, то

$$\forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ \tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x) = c(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x),$$

где $\forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ \left|c(\lambda_1, \lambda_2)\right| = 1.$

Достаточно доказать, что

$$\exists a(\lambda), \left|a(\lambda)\right| = 1 : \forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ c(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{a(\lambda_1\lambda_2)}{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}.$$

Тогда $\left\{f_\lambda(x) = a(\lambda)\tilde{f}_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\right\}.$

Слабое перемешивание

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$, называется слабым перемешиванием, если

$$\forall A \in \Sigma,\ \forall B \in \Sigma \ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \mu\left(T^{-j} A \cap B\right) - \mu(A)\mu(B) \right| = 0.$$

P.S.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \hat{x} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left| x_j - \hat{x} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} x_j = \hat{x}.$$

Задача. Доказать:

Для того, чтобы ограниченная последовательность $\left\{x_n \middle| n = 0,1,\ldots\right\}$ удовлетворяла условию $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\left|x_j - \hat{x}\right| = 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовало подмножество J множества натуральных чисел, такое, что

$$1.\ \lim_{\substack{n\to+\infty,\\ n\notin J}} x_n = \hat{x},$$

$$2.\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\left\{k \middle| 0 \le k < n, k \in J\right\}\right|}{n} = 0.$$

Задача. Доказать:

следующие утверждения эквивалентны

1. $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ слабое перемешивание;

2. $\forall f(x) \in L_2(M, \mu), \forall g(x) \in L_2(M, \mu)$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_M f(T^j x) g(x) \mu(dx) - \int_M f(x) \mu(dx) \int_M g(x) \mu(dx) \right| = 0;$$

3. любая собственная функция U_T константа;

4. $\{M \times M, \Sigma \times \Sigma, \mu \times \mu, \hat{T}\}$, где $\forall x_1 \in M, \forall x_2 \in M$ $\hat{T}(x_1, x_2) = (Tx_1, Tx_2)$,

эргодическая система.