

## Элементы финансовой математики

**Преподаватель:**

[доц. С.Н. Смирнов](#)

**Семестр:** 1-2

**Нагрузка:** 2 часа лекций в неделю

**Форма отчетности:** зачет во 2-ом семестре, экзамен в 3-ем семестре

**Аннотация:**

В настоящее время производные финансовые инструменты приобретают все возрастающее значение в операциях крупнейших международных банков. Необходимой теоретической базой финансовой инженерии являются продвинутое математические модели для решения задач ценообразования, хеджирования и инвестирования. Курс построен на таких достижениях последних лет, как техника опционного разложения применительно к моделям финансовых рынков с дискретным временем.

**Программа курса:**

1. Оператор условного математического ожидания (относительно сигма-алгебры) и его свойства. Вероятностное пространство с фильтрацией и случайные процессы.
2. Мартингальное свойство случайного процесса. Мартингал разности. Субмартингалы и супермартингалы, примеры. Связь мартингального свойства, независимости и некоррелированности приращений. Выпуклое преобразование от обобщенного супермартингала.
3. Интегральное преобразование. Сохранение мартингального свойства при интегральном преобразовании. Игровой смысл мартингала.
4. Разложения Дуба: аддитивное и мультипликативное.
5. Марковские моменты и их свойства. Критерий измеримости в терминах марковских моментов. Остановленный процесс. Представление остановленного процесса в виде интегрального преобразования. Обобщенное субмартингальное свойство для моделей с ограниченным горизонтом.
6. Предельное поведение мартингалов. Теорема Дуба. Сохранение мартингального свойства на бесконечности. Обратный (обращенный) мартингал
7. Достаточные условия сохранения мартингального свойства в случайный момент времени
8. Оболочка Снелла. Оптимальные моменты остановки. Критерий оптимальности. Наибольший и наименьший оптимальные моменты остановки.
9. Финансовые рынки. Производные финансовые инструменты. Фьючерсные и форвардные контракты. Опционы.
10. Полезность. Стохастическое доминирование. Ожидаемая полезность; функция полезности Фон-Неймана - Моргенштерна. Дополнительные свойства ожидаемой полезности для распределений на прямой. Безрисковый эквивалент.
11. Интерпретация теории ожидаемой полезности. Уточняющие предположения относительно функции полезности. Практическое использование ожидаемой полезности для принятия решений в условиях неопределенности.
12. Одношаговая модель оптимального инвестирования. Связь постановки Г. Марковича и постановки, использующей подход ожидаемой полезности.
13. Многошаговая модель оптимального инвестирования и возникающие постановки. Многомерная функция полезности. Принципы ненасыщаемости и предпочтения ликвидности. Независимость предпочтений по разным компонентам.
14. Ценообразование и хеджирование. Самофинансируемость стратегий. Информационная эффективность рынка Арбитражные возможности на рынке ценных бумаг. Формализация наличия и отсутствия арбитража. Первая фундаментальная теорема финансовой математики (критерии отсутствия арбитражных возможностей).
15. Игровая постановка задачи гарантированного ценообразования для обусловленного обязательства европейского типа в стандартной форме (с фильтрованным вероятностным пространством) и нестандартной форме (в случае системы с полными

связями).

16. Построение решения задачи ценообразования для обусловленного обязательства американского типа в двух постановках. Тотальный минимальный супермартинал. Теорема Эль Каруи - Крамкова (опциональное разложение).
17. Перестановочность операторов условного математического ожидания и существенных супремумов и применение для вывода формулы гарантированной цены опциона.
18. Полные и неполные рынки. Критерии полноты рынка в двух постановках. Достижение наиболее неблагоприятных сценариев поведения цен. Роль выпуклости функции выплат. Условие достижимости супремума в задаче ценообразования обусловленного обязательства европейского типа.

### Рекомендованная литература:

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. - тт. 1-2, М. Фазис 2004.
2. Бьорк Т. Теория арбитража в непрерывном времени. М.: МЦНМО, 2010.
3. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Мельников А.В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. - М. Изд-во ТВП, 1997.

### Дополнительная литература

1. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции. - Инфра-М. - 2010.
2. Халл Дж. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. - Вильямс. - 2007.
3. Shreve S. Stochastic calculus for finance. Springer, 2004.

**Source URL:** <http://sa.cs.msu.su/node/216>