Стохастический анализ и моделирование

Преподаватель:
доц. С.Н. Смирнов

Семестр: 6-7
Нагрузка: 2 часа лекций в неделю
Форма отчетности: зачет в 6-ом семестре, экзамен в 7-ом семестре
Аннотация:
Предполагается, что слушатель уже знаком с основами теории вероятностей. Одна из задач курса - систематизация знаний на основе теоретического фундамента - аксиоматики Колмогорова. Другая цель - построение прикладной интерпретации, включая метод статистического моделирования. Предлагается также задание для компьютерного практикума, иллюстрирующего курс и развивающего технику моделирования стохастических процессов.

Программа курса:

1. Математическая модель явлений, в которых случайность выступает существенным фактором. Объективно-частотная и субъективная интерпретации вероятности.
2. Аксиоматика Колмогорова и непротиворечивость модели; терминология, содержание и интерпретация объектов.
3. Условная вероятность как модель с дополнительным ограничением. Независимость событий.
4. Схема Бернулли. Парадоксы фон Мизеса и д’Аламбера.
5. Пренебрежимые модификации модели. Нуль множества и пополнение вероятностного пространства. Непрерывные и дискретные модели.
6. Теорема Улама (частный случай). Роль аксиомы выбора. Борелевская сигма-алгебра. Теорема об изоморфизме.
7. Распределение вероятностей как частный вид модели. Случайные величины, вектора, функции. Интерпретация условия измеримости. Распределение как индуцированная мера.
8. Функция распределения как характеристика распределения и ее свойства. Моделирование случайных величин методом обращения функций распределения.
9. Альтернативный подход к аксиоматике на основе понятия среднего, эквивалентностьподходу на основе понятия вероятности. Построение интеграла Лебега.
10. Свойства математического ожидания (замена переменных, неравенство Йенсена и т.д.).
11. Субъективная интерпретация среднего. Формулировка закона больших чисел и объективная интерпретация среднего.
12. Отличие интеграла Лебега от интеграла Римана. Метод Монте-Карло как численный метод нахождения интеграла Лебега.
13. Ковариация, дисперсия и их свойства. Ковариационные матрицы.
14. Линейные модели. Задача регрессии. Свойства многомерного нормального распределения. Моделирование гауссовского случайного вектора.
15. Теорема Радона-Никодима. Абсолютно-непрерывные распределения, свойства плотности. Моделирование методом элиминации фон Неймана.
16. Дискретные распределения. Смеси распределений. Сингулярные распределения. Полная классификация распределений. Примеры наиболее частоупотребляемых на практике распределений.
17. Совместные и маргинальные распределения. Согласованность семейства распределений.
18. Теорема Колмогорова.
19. Условные распределения (существование регулярного варианта). Интегральные формулы типа полной вероятности.
20. Метод последовательного моделирования случайного вектора. Независимость

случайных величин.
21. Пуассоновское поле. Условия хаотичности, однородности, стационарности.
22. Марковское свойство.
23. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Представление для цепей Маркова (стохастическая динамическая система).
24. Однородность по времени, стационарность, эргодичность. Винеровский процесс. Процесс Орншейна-Уленбека.
25. Винеровский процесс. Процесс Орншейна-Уленбека.
26. Виды сходимости случайных величин: по вероятности, в среднем, почти наверное, по распределению — слабая и по вариации.

Рекомендованная литература:

1. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. – 5-е изд. – М.: МЦНМО, 2011.
2. Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей: учебное пособие. 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2011.

Дополнительная литература

1. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов. – М.: изд-во МГУ, 1992.
2. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. 2-е издание. М.: Наука, 1974.
3. Бернстайн П. Против богов: укрощение риска. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2000.
4. Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980.
5. Бернулли Я. О законе больших чисел. – М.: Наука, 1976.
6. Мизес Р. Вероятность и статистика. – М.: Либроком, 2009.
7. Райфа Х. Анализ решений. М.: Наука, 1977.
8. Кановей В.Г. Аксиома выбора и аксиома детерминированности. М.: Физматлит, 1984.
9. Уиттл П. Вероятность. – М.: Наука 1982.
10. Неве Ж.. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир 1969.
11. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука 1975.