

Динамические системы и биоматематика

Преподаватель:

[проф. А.С. Братусь](#), [доц. И.В. Рублев](#)

Семестр: 6

Нагрузка: 3 часа лекций в неделю

Форма отчетности: экзамен

Аннотация:

Изучаются общие свойства автономных динамических систем: лемма о выпрямлении векторного поля, теорема Лиувилля, первые интегралы. Доказывается теорема Пуанкаре-Бендиксона, вводятся индексы Пуанкаре и функция последования.

Подробно изучается предельное поведение динамических систем. Классические уравнения Ван дер Поля исследуются при помощи методов малых возмущений консервативных систем, а также с помощью отображений Пуанкаре.

Приводится теория Фоке-Ляпунова. Рассматриваются нормальные формы динамических систем в окрестности особых точек и доказывается теорема Андреева-Хопфа о бифуркации и рождении цикла на плоскости.

Изучаются дискретные и непрерывные модели динамики популяций. В основе рассмотрений лежит бифуркационный подход, когда наряду с фазовым портретом строится параметрический. В дискретном случае изучается бифуркация удвоения цикла и элементарная теория Файгенбаума. В непрерывном случае рассмотрены классические модели Лотка-Вольтерра, а также их различные модификации, приводящие к появлению предельных циклов. Изучаются общие случаи взаимодействия трёх видов в качестве примера возможного сложного поведения.

Программа курса:

1. Свойства динамических систем (виды фазовых траекторий, групповое свойство).
2. Лемма о выпрямлении векторного поля.
3. Теорема Лиувилля о скорости изменения фазового объёма.
4. Производные в силу системы и её свойства. Первые интегралы системы.
5. Гамильтоновы системы. Фазовые траектории движения частицы в потенциальном поле ($n=1$).
6. Классификация точек покоя линейных систем на плоскости и в пространстве.
7. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (лемма Федорюка о возмущении жордановой матрицы).
8. Предельное поведение траекторий. Свойства предельных множеств.
9. Условия несуществования замкнутой траектории Бендиксона-Дюлака. Применение теоремы Брауэра для доказательства существования неподвижных точек и замкнутых траекторий.
10. Функция последования (отображение Пуанкаре) и её свойства.
11. Теорема Бендиксона-Пуанкаре.
12. Теорема о монотонной функции Ляпунова.
13. Индексы по Пуанкаре и Брауэру.
14. Малые возмущения консервативных систем (по Л.С.Понтрягину). Приложение к уравнению Ван дер Поля с малым параметром.
15. Доказательство существования предельного цикла в общем уравнении Ван дер Поля с помощью отображения Пуанкаре.
16. Структурно устойчивые системы. Бифуркация. Бифуркации Андронова-Хопфа и гетероклиническая бифуркация.
17. Теорема Пуанкаре о нормальной форме в окрестности особой точки системы. Случай резонансов.
18. Нормальная форма в случае центра ($n=2$). Первая ляпуновская величина.

19. Теорема Андронова-Хопфа ($n=2$).
20. Теорема Флоке-Ляпунова и её применение к вопросу устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами.
21. Дискретные модели популяций. Хаос и бифуркация в одномерных отображениях. Элементы теории Файгенбаума.
22. Классическая модель Лотка-Вольтерра «хищник-жертва». Принцип Вольтерра. Модель Лотка-Вольтерра с учётом внутривидовой конкуренции.
23. Модель взаимодействия двух конкурирующих видов. Невозможность существования предельных циклов в классических моделях Лотка-Вольтерра на плоскости.
24. Модели типа Лотка-Вольтерра с учётом различных факторов: нелинейность размножения и насыщения и т.д. Модель "хищник-жертва" Гаузе-Колмогорова.
25. Моделирование эффекта Олли. Открытые модели с учётом эффекта Олли.
26. Системы Лотка-Вольтерра трёх и более популяций. Классификация трофических структур. Уравнение Лотка-Вольтерра для пищевой цепи.
27. Циклическое соревнование видов.
28. Невырожденные модели типа Лотка-Вольтерра. Точки поглощения, необходимые условия невырожденности.
29. Достаточные условия невырожденности.
30. Репликаторные системы. Случай гетероциклической репликации.
31. Популяционная модель с учётом возрастных распределений.
32. Билокальные модели (модели Тьюринга). Возникновение автоколебаний в простейших биологических моделях.
33. Биологические волны. Уравнение Фишера-Колмогорова. Уравнение Лотка-Вольтерра с учётом пространственных распределений.

Рекомендованная литература:

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Москва, Наука, 1971, 239 с.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - Москва, Наука, 1978, 302 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - Москва, Наука, 1964, 272 с.
4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Москва, Мир, 1986, 243 с.
5. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействия популяций. - М., Н., 1985, 179 с.
6. Hofbauer J., Sigmund K. The theory of Evolution and dynamical systems. - London Math. Soc. Student Texts 7, Cambridge University Press, 1988, 341 p.

Дополнительная литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - Москва, Наука, 1981, 508 с.
2. Марсден Д., Мак-Кракен Р. Бифуркация рождения цикла и её приложения. - Москва, Мир, 1981, 367 с.
3. Kuznetsov Y. Elements of Theory of Applied Bifurcation. - Springer-Verlag, 1995, p. 503
4. Murray J. Mathematical Biology. - Springer-Verlag, 1995, 701 p.
5. Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. - М., Н., 1978, 352 с.
6. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. - М., Н., 1976, 285 с.